

## DAS TORSIONSPROBLEM DER $\top$ , $\sqsubset$ und $\sqsubset$ TRÄGER

von

W. BASILEWITSCH (Beograd)

Wie aus der Elastizitätstheorie bekannt ist, soll bei Torsion die Spannungsfunktion  $\Phi(x, y)$  im Gebiet des Querschnitts die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 G \Theta \quad (1)$$

befriedigen und die Randbedingung

$$\Phi(\xi, \eta) = 0 \quad (2)$$

erfüllen, wo mit

$G$  = das Gleitungsmaß,

$\Theta$  = der Torsionswinkel,

$\xi, \eta$  = die Randkoordinaten

bezeichnet sind.

Die Formen der Spannungsfunktion werden für jeden Rechteckteil des Querschnittes unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingungen an der Berührungslinie gesondert gewählt.

A) Für das  $\top$  Profil (Abb. 1) wird die Spannungsfunktion im Gebiet der Flansche A, B, C, D in folgender Form angenommen:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= G\Theta (a^2 - x^2) + \sum_{n=1,3}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} = \\ &= \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ G\Theta \frac{32 a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (3) \end{aligned}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen auf den Strecken A - C und B - D.

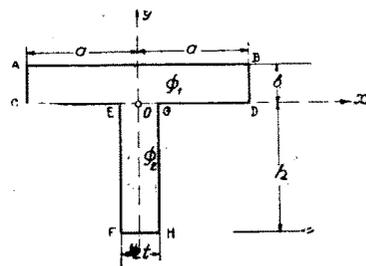


Abb. 1

Die Randbedingung auf der Strecke  $A - B$  wird erfüllt, wenn

$$B_n = -G \Theta \frac{32 a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} - A_n \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \quad (4)$$

angenommen wird.

Im Gebiet des Steges  $E, G, F, H$  wird die Spannungsfunktion in folgender Form angenommen:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= G \Theta (t^2 - x^2) + \sum_{m=1,3}^{\infty} \left( C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{2t} + D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{2t} \right) \cos \frac{m\pi x}{2t} = \\ &= \sum_{m=1,3}^{\infty} \left[ G \Theta \frac{32 t^2}{m^3 \pi^3} (-1)^{1/2(m-1)} + C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{2t} + D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{2t} \right] \cos \frac{m\pi x}{2t}. \quad (5) \end{aligned}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen auf den Strecken  $E - F$  und  $G - H$ .

Die Randbedingung auf der Strecke  $F - H$  wird erfüllt, wenn

$$C_m = -G \Theta \frac{32 t^2}{m^3 \pi^3} (-1)^{1/2(m-1)} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi h}{2t}} + D_m \operatorname{th} \frac{m\pi h}{2t} \quad (6)$$

angenommen wird.

Auf der Strecke  $C - E$  und  $G - D$  muss die Funktion  $(\Phi_1)_{y=0}$  den Wert Null annehmen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Multiplikator der Funktion (5)

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a < x < -t \\ \cos \frac{m\pi x}{2t} & \text{für } -t < x < +t \\ 0 & \text{für } +t < x < +a \end{cases} \quad (7)$$

in Fouriersche Reihe entwickelt

$$f_1(x) = \frac{4 m t}{\pi a} (-1)^{1/2(m-1)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi t}{a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (8)$$

und in (9) eingesetzt wird.

Auf der Berührungslinie der beiden Gebiete  $E - G$  müssen die Funktionen  $(\Phi_1)_{y=0}$  und  $(\Phi_2)_{y=0}$  denselben Wert haben. Demnach folgt aus (3), (5) und (8)

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ G \Theta \frac{32 a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} + A_n \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} =$$

$$= \sum_{m=1,3}^{\infty} \left[ G \Theta \frac{32 t^2}{m^3 \pi^3} (-1)^{1/2(m-1)} + C_m \right] \frac{4 m t}{\pi a} (-1)^{1/2(m-1)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x}{2a}.$$
(9)

Nach (9) sollen die Koeffizienten  $A_n$  und  $C_m$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$A_n = G \Theta \frac{32 a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{4 t^3}{\pi a^3} \cos \frac{n\pi t}{2a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[ m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2 \right]} - \frac{(-1)^{1/2(n-1)}}{n^3} \right\} +$$

$$+ \frac{4 t}{\pi a} \cos \frac{n\pi t}{2a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{m (-1)^{1/2(m-1)}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} C_m.$$
(10)

Ausserdem müssen an der Berührungslinie  $E-G$  der beiden Gebiete die Werte der partiellen Ableitungen der Funktionen  $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0}$  und  $\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)_{y=0}$  gleich sein.

Der Multiplikator der Funktion (3)

$$f_2(x) = \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad \text{für} \quad -t < x < +t$$
(11)

kann in folgende Fouriersche Reihe entwickelt werden

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi} \cos \frac{n\pi t}{2a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2(m-1)} m}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \cos \frac{m\pi x}{2t}.$$
(12)

Mit Rücksicht auf (12) folgt

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\pi}{2a} B_n \frac{4}{\pi} \cos \frac{n\pi t}{2a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2(m-1)} m}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \cos \frac{m\pi x}{2t} =$$

$$= \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{m\pi}{2t} D_m \cos \frac{m\pi x}{2t}.$$
(13)

Nach (13) sollen die Koeffizienten  $B_n$  und  $D_m$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$D_m = \frac{4t}{\pi a} (-1)^{1/2(m-1)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n \cos \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} B_n \quad (14)$$

Werden in (14) die Indices  $i$  statt  $n$  eingesetzt, so folgt aus (4), (10), (6) und (14)

$$\begin{aligned} B_n + \frac{16t^2}{\pi^2 a^2} \cos \frac{n\pi t}{2a} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \sum_{i=1,3}^{\infty} i \cos \frac{it}{2a} B_i \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{m \operatorname{th} \frac{m\pi h}{2t}}{\left[m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2\right] \left[m^2 - \left(\frac{it}{a}\right)^2\right]} = \\ = -G\Theta \frac{32a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{4t^3}{\pi a^3} \cos \frac{n\pi t}{2a} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2\right]} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi h}{2t}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{(-1)^{1/2(n-1)}}{n^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (15) ergibt die Werte der Koeffizienten  $B_n$ . Mittels der Ausdrücke (4), (14) und (6) werden die Koeffizienten  $A_n$ ,  $D_m$  und  $C_m$  berechnet.

Auf diese Weise werden die gesuchten Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  bestimmt. Der Spannungszustand kann jetzt nach dem bekannten Verfahren der Elastizitätstheorie bestimmt werden.

Beispiel:  $a=4$ ,  $b=2$ ,  $h=4$ ,  $t=1$

Lineares Gleichungssystem (15)

$$\begin{aligned} +1,16 B_1 + 0,41 B_3 + 0,50 B_5 + 0,41 B_7 + 0,19 B_9 &= +5,66 G\Theta \\ +0,09 B_1 + 1,24 B_3 + 0,30 B_5 + 0,26 B_7 + 0,15 B_9 &= -0,80 G\Theta \\ +0,07 B_1 + 0,18 B_3 + 1,24 B_5 + 0,24 B_7 + 0,18 B_9 &= -0,10 G\Theta \\ +0,04 B_1 + 0,11 B_3 + 0,17 B_5 + 1,20 B_7 + 0,21 B_9 &= -0,19 G\Theta \\ +0,01 B_1 + 0,05 B_3 + 0,10 B_5 + 0,16 B_7 + 1,21 B_9 &= -0,04 G\Theta \end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten

$B_n$	$A_n$
$B_1 = +5,40 G \Theta$	$A_1 = -16,02 G \Theta$
$B_3 = -0,94 G \Theta$	$A_3 = +1,04 G \Theta$
$B_5 = -0,17 G \Theta$	$A_5 = +0,17 G \Theta$
$B_7 = -0,21 G \Theta$	$A_7 = +0,21 G \Theta$
$B_9 = -0,01 G \Theta$	$A_9 = +0,01 G \Theta$

Die Werte der Koeffizienten

$D_m$	$C_m$
$D_1 = +0,52 G \Theta$	$C_1 = +0,52 G \Theta$
$D_3 = -0,24 G \Theta$	$C_3 = -0,21 G \Theta$
$D_5 = +0,08 G \Theta$	$C_5 = +0,08 G \Theta$
$D_7 = -0,04 G \Theta$	$C_7 = -0,04 G \Theta$
$D_9 = +0,02 G \Theta$	$C_9 = +0,02 G \Theta$

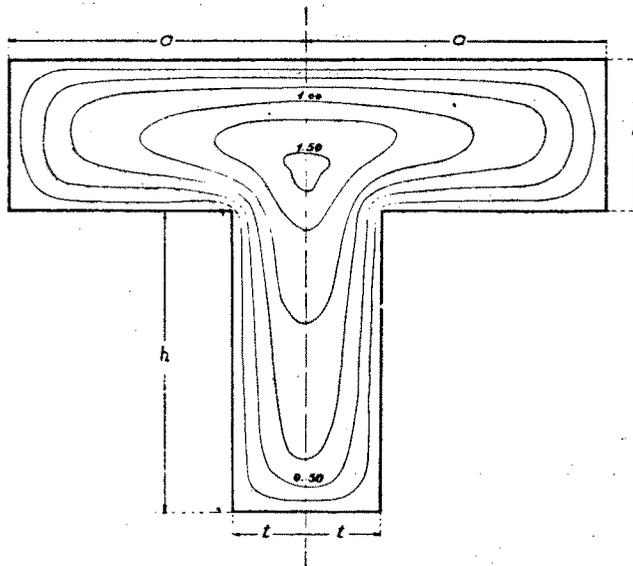


Abb. 2

Das Torsionsmoment

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2 \int_0^a \int_0^b \Phi_1 dx dy + 2 \int_{0-h}^t \int_0^0 \Phi_2 dx dy = \\ &= G \Theta \frac{4}{3} a^3 b + \frac{8 a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - 1 \right) \right] + \\ &\quad + G \Theta \frac{4}{3} t^3 h + \frac{8 t^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[ C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{2t} - D_m \left( \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{2t} - 1 \right) \right] = \\ &= 21,74 G \Theta \end{aligned} \quad (16)$$

Die Spannungsfunktionen sind auf der Abbildung (2) dargestellt.

b) Für das  $\square$  Profil (Abb. 3) wird die Spannungsfunktion im Gebiet des Steges  $A, A', B, B'$  in folgender Form angenommen:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= G \Theta (a^2 - x_1^2) + \sum_{n=1,3}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right) \cos \frac{n\pi x_1}{2a} = \\ &= \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ G \Theta \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right] \cos \frac{n\pi x_1}{2a}. \end{aligned} \quad (17)$$

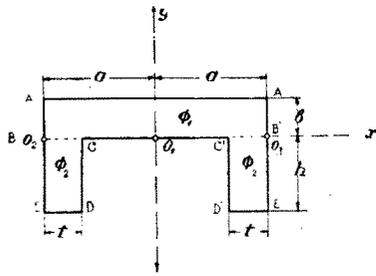


Abb. 3

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und die Randbedingung auf den Strecken  $A-B$  und  $A'-B'$ .

Die Randbedingung auf der Strecke  $A-A'$  wird erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} B_n &= -G \Theta \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} - \\ &\quad - A_n \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \end{aligned} \quad (18)$$

angenommen wird.

Im Gebiet der Flansche  $C, B, D, E$  wird der Wert der Spannungsfunktion in folgender Form angenommen

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= G \Theta (tx_2 - x_2^2) + \sum_{m=1,2}^{\infty} \left( C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{t} + D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{t} \right) \sin \frac{m\pi x_2}{t} = \\ &= \sum_{m=1,2}^{\infty} \left\{ G \Theta \frac{4 t^2}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{t} + D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{t} \right\} \sin \frac{m\pi x_2}{t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen auf den Strecken  $B-C$  und  $E-D$ .

Die Randbedingung auf der Strecke  $C-D$  wird erfüllt, wenn

$$C_m = -G \Theta \frac{4t^2}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] \frac{1}{ch \frac{m\pi h}{t}} + D_m th \frac{m\pi h}{t} \quad (20)$$

angenommen wird.

Auf der Strecke  $E-E'$  muss die Funktion  $(\Phi_1)_{y=0}$  den Wert Null annehmen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Multiplikator der Funktion (19)

$$f_1(x) = \begin{cases} + \sin \frac{m\pi x_2}{t} & \text{für } -a < x_1 < -a+t \\ 0 & \text{für } -a+t < x_1 < +a-t \\ - \sin \frac{m\pi x_2}{t} & \text{für } +a-t < x_1 < +a \end{cases} \quad (21)$$

in Fouriersche Reihe entwickelt

$$f_1(x) = -(-1)^m \frac{2mt}{a\pi} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a} \quad (22)$$

und in (23) eingesetzt wird.

Auf den Berührungslinien der Gebiete  $B-E$  und  $E'-B'$  müssen die Funktionen  $(\Phi_1)_{y=0}$  und  $(\Phi_2)_{y=0}$  denselben Wert haben. Demnach aus (17), (19) und (22) folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ G \Theta \frac{32a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} + A_n \right] \cos \frac{n\pi x_1}{2a} \\ &= \sum_{m=1,2}^{\infty} \left\{ G \Theta \frac{4t^2}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \right\} (-1)^{m+1} \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a}. \end{aligned} \quad (23)$$

Nach (23) sollen die Koeffizienten  $A_n$  und  $C_m$  folgende Bedingung erfüllen:

$$A_n = G \ominus \frac{32 a^2}{\pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} \left\{ \frac{t^3}{4 \pi a^3} \sin \frac{n\pi t}{2 a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m}{m^2 \left[ m^2 - \left( \frac{nt}{2 a} \right)^2 \right]} - \frac{1}{n^3} \right\} - \frac{2 t}{\pi} (-1)^{1/2(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2 a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left( \frac{nt}{2 a} \right)^2} C_m \quad (24)$$

Ausserdem müssen an den Berührungslinien der Gebiete  $B-E$  und  $E'-B'$  die Werte der partiellen Ableitungen der Funktionen  $\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=0}$  und  $\left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=0}$  gleich sein.

Der Multiplikator der Funktion (17)

$$f_2(x_2) = \cos \frac{n\pi x_2}{2 a} \quad \text{für} \quad 0 < x_2 < +t \quad (25)$$

kann in folgende Fouriersche Reihe entwickelt werden

$$f_2(x_2) = -(-1)^{1/2(n-1)} \frac{2}{\pi} \sin \frac{n\pi t}{2 a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left( \frac{nt}{2 a} \right)^2} \sin \frac{m\pi x_2}{t} \quad (26)$$

Mit Rücksicht auf (26) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n\pi}{2 a} B_n [ -(-1)^{1/2(n-1)} ] \frac{2}{\pi} \sin \frac{n\pi t}{2 a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left( \frac{nt}{2 a} \right)^2} \sin \frac{m\pi x_2}{t} = \\ = \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{m\pi}{t} D_m \sin \frac{m\pi x_2}{t} \end{aligned} \quad (27)$$

Nach (27) sollen die Koeffizienten  $B_n$  und  $D_m$  folgende Bedingungen erfüllen

$$D_m = -(-1)^m \frac{t}{\pi a} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2(n-1)} n \sin \frac{n\pi t}{2 a}}{m^2 - \left( \frac{nt}{2 a} \right)^2} B_n \quad (28)$$

Werden in (28) statt  $n$  die Indices  $i$  eingesetzt, so folgt aus (18), (24), (20) und (28)

$$\begin{aligned}
 B_n + \frac{2t^2}{\pi^2 a^2} (-1)^{1/2(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \sum_{i=1,3}^{\infty} (-1)^{1/2(i-1)} i \sin \frac{i\pi t}{2a} B_i \cdot \\
 \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{m \operatorname{th} \frac{m\pi h}{t}}{\left[ m^2 - \left( \frac{nt}{2a} \right)^2 \right] \left[ m^2 - \left( \frac{it}{2a} \right)^2 \right]} = \\
 = -G\Theta \frac{32a^2}{\pi^3} (-1)^{1/2(n-1)} \left\{ \frac{t^3}{2a^3 \pi} \sin \frac{n\pi t}{2a} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{2a} \cdot \right. \\
 \left. \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[ m^2 - \left( \frac{nt}{2a} \right)^2 \right]} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi h}{t}} \right) - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - 1}{n^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \right\}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (29) ergibt die Koeffizientenwerte  $B_n$ . Mittels der Ausdrücke (18), (28) und (20) werden die Koeffizienten  $A_n$ ,  $D_m$  und  $C_m$  berechnet.

Auf diese Weise sind die gesuchten Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  bestimmt. Der Spannungszustand kann jetzt nach dem bekannten Verfahren der Elastizitätstheorie bestimmt werden.

Beispiel:  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $h = 3$ ,  $t = 2$ .

Lineares Gleichungssystem (29)

$$\begin{aligned}
 +1,05 B_1 - 0,31 B_3 + 0,31 B_5 + 0,32 B_7 - 0,21 B_9 &= +5,80 G\Theta \\
 -0,07 B_1 + 1,42 B_3 - 0,48 B_5 + 0,07 B_7 + 0,23 B_9 &= +0,04 G\Theta \\
 +0,04 B_1 - 0,28 B_3 + 1,46 B_5 - 0,33 B_7 + 0,04 B_9 &= -0,29 G\Theta \\
 +0,00 B_1 + 0,03 B_3 - 0,23 B_5 + 1,47 B_7 - 0,39 B_9 &= +0,06 G\Theta \\
 -0,02 B_1 + 0,08 B_3 + 0,23 B_5 - 0,30 B_7 + 1,48 B_9 &= +0,07 G\Theta
 \end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten

$B_n$	$A_n$
$B_1 = +5,71 G\Theta$	$A_1 = -16,22 G\Theta$
$B_3 = +0,17 G\Theta$	$A_3 = -0,05 G\Theta$
$B_5 = -0,32 G\Theta$	$A_5 = +0,32 G\Theta$
$B_7 = +0,01 G\Theta$	$A_7 = -0,01 G\Theta$
$B_9 = +0,16 G\Theta$	$A_9 = -0,16 G\Theta$

Die Werte der Koeffizienten  $D_m$

$$\begin{array}{ll} D_1 = +0,19 G \Theta & D_6 = -0,03 C \Theta \\ D_2 = -0,09 G \Theta & D_7 = +0,02 G \Theta \\ D_3 = +0,13 G \Theta & D_8 = -0,02 G \Theta \\ D_4 = -0,06 G \Theta & D_9 = +0,01 G \Theta \\ D_5 = +0,04 G \Theta & D_{10} = -0,01 G \Theta \end{array}$$

Die Werte der Koeffizienten  $C_m$

$$\begin{array}{ll} C_1 = +0,17 G \Theta & C_6 = -0,03 G \Theta \\ C_2 = -0,09 G \Theta & C_7 = +0,02 G \Theta \\ C_3 = +0,13 G \Theta & C_8 = -0,02 G \Theta \\ C_4 = -0,06 G \Theta & C_9 = +0,01 G \Theta \\ C_5 = +0,04 G \Theta & C_{10} = -0,01 G \Theta \end{array}$$

Das Torsionsmoment

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2 \int_0^a \int_0^b \Phi_1 dx dy + 2 \int_0^t \int_{-h}^0 \Phi_2 d\kappa dy = & (30) \\ &= G \Theta \frac{4}{3} a^3 b + \frac{8 a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - 1 \right) \right] + G \Theta \frac{t^3 h}{3} + \\ &+ \frac{4t^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[ C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{t} + D_m \left( \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{t} - 1 \right) \right] = 22,7 G \Theta . \end{aligned}$$

Die Spannungslinien sind auf der Abb. 4 dargestellt.

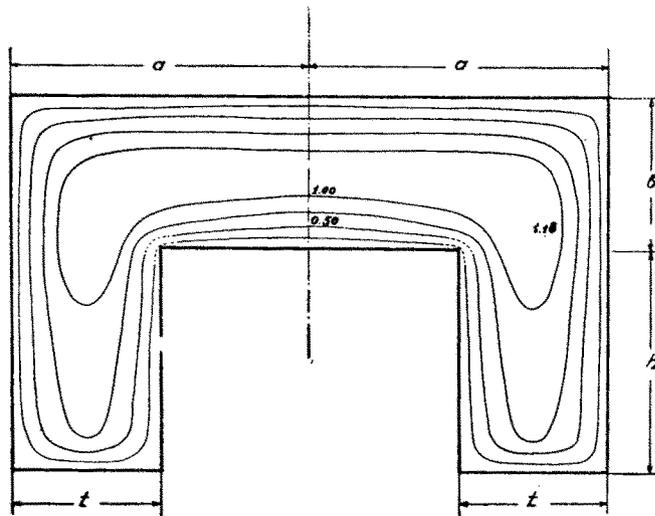


Abb. 4

C) Für das  $\Gamma$ -Profil (Abb. 5) wird die Spannungsfunktion im Gebiet der Flansche A, B, C, D in folgender Form angenommen:

$$\Phi_1 = G \Theta(ax - x^2) + \sum_{n=1,2}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi(y-h)}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-h)}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \quad (31)$$

$$= \sum_{n=1,2}^{\infty} \left\{ G \Theta \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi(y-h)}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-h)}{a} \right\} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (i) und die Randbedingung auf den Strecken A-C und B-D. Die Randbedingung auf der Strecke A-B wird erfüllt wenn

$$B_n = -G \Theta \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} - A_n \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{a} \quad (32)$$

angenommen wird.

Im Gebiet des Steges C, E, F, G wird die Spannungsfunktion in folgender Form angenommen:

$$\Phi_2 = G \Theta(tx - x^2) + \sum_{m=1,2}^{\infty} C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{t} \sin \frac{m\pi x}{t} + \sum_{k=1,2}^{\infty} D_k \sin \frac{2k\pi y}{h} \operatorname{sh} \frac{2k\pi x}{h} = \quad (33)$$

$$= \sum_{m=1,2}^{\infty} \left\{ G \Theta \frac{4t^2}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{t} + \sum_{k=1,2}^{\infty} D_k \alpha_{km} \sin \frac{2k\pi y}{h} \right\} \sin \frac{m\pi x}{t}$$

wobei

$$\alpha_{km} = - \frac{(-1)^m m 2 \operatorname{sh} \frac{2k\pi t}{h}}{\pi \left[ m^2 + \left( \frac{2kt}{h} \right)^2 \right]} \quad (34)$$

den Koeffizienten der Fourierschen Reihe bezeichnet in der Entwicklung der Funktion  $\operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{h}$ . Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung

(1), die Randbedingungen auf den Strecken C-F und E-G und die Symmetriebedingung auf der Linie F-G hinsichtlich des Mittelpunktes.

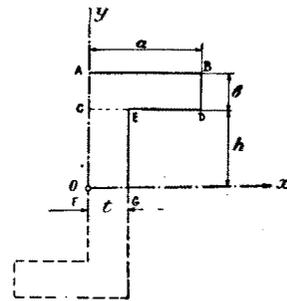


Abb. 5

Die Kontinuitätsbedingung auf der Linie  $F-G$  wird erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{m\pi}{t} C_m + \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{2\pi k}{h} \alpha_{km} D_k = 0 \quad (35)$$

angenommen wird.

Auf der Strecke  $E-D$  muss die Funktion  $(\Phi_1)_{y=h}$  den Wert Null annehmen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Multiplikator der Funktion (32)

$$f_1(x) = \begin{cases} +\sin \frac{m\pi x}{t} & \text{für } 0 < x < +t \\ 0 & \text{für } +t < x < +a \end{cases} \quad (36)$$

in Fouriersche Reihe entwickelt

$$f_1(x) = -(-1)^m \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi t}{a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (37)$$

und in (38) eingesetzt wird.

Auf der Berührungslinie der beiden Gebiete  $C-E$  müssen die Funktionen  $(\Phi_1)_{y=h}$  und  $(\Phi_2)_{y=h}$  denselben Wert haben. Demnach folgt mit Berücksichtigung von (31), (33) und (37)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,2}^{\infty} \left\{ G \ominus \frac{4a^2}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] + A_n \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} = \\ & = \sum_{m=1,2}^{\infty} \left\{ G \ominus \frac{4t^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{t} \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ -(-1)^m \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi t}{a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{a}\right)^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} . \end{aligned} \quad (38)$$

Nach (38) sollen die Koeffizienten  $A_n$  und  $C_m$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$A_n = G \Theta \frac{4 a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{2 t^3}{\pi a^3} \sin \frac{n \pi t}{a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{m^2 \left[ m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2 \right]} - \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \right\} - \quad (39)$$

$$- \frac{2 t}{a \pi} \sin \frac{n \pi t}{a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m s h \frac{m \pi h}{t}}{m^2 \left[ m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2 \right]} C_m .$$

Ausserdem müssen an der Berührungslinie der beiden Gebiete  $C-E$  die Werte der partiellen Ableitungen der Funktionen  $\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=h}$  und  $\left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=n}$  gleich sein.

Der Multiplikator der Funktion (31)

$$f_2(x) = \sin \frac{n \pi x}{a} \quad \text{für} \quad 0 < x < +t \quad (40)$$

kann in folgende Fouriersche Reihe entwickelt werden

$$f_2(x) = - \frac{2}{\pi} \sin \frac{n \pi t}{a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2} \sin \frac{m \pi x}{t} . \quad (41)$$

Mit Rücksicht auf (35) und (41)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{n \pi}{a} B_n \left[ - \frac{2}{\pi} \sin \frac{n \pi t}{a} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2} \right] \sin \frac{m \pi x}{t} &= \\ &= \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{m \pi}{t} \left( c h \frac{m \pi h}{t} - 1 \right) C_m \sin \frac{m \pi x}{t} . \end{aligned} \quad (42)$$

Nach (42) sollen die Koeffizienten  $B_n$  und  $C_m$  folgende Bedingungen erfüllen

$$C_m = - \frac{(-1)^m 2 t}{\pi a \left( c h \frac{m \pi h}{t} - 1 \right)} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n \pi t}{a}}{m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2} B_n . \quad (43)$$

Werden in (43) anstatt des Indexes  $n$  die Indices  $i$  eingesetzt, so folgt aus (32), (39) und (43)

$$\begin{aligned}
 B_n + \frac{4 t^2}{a^2 \pi^2} \sin \frac{n \pi t}{a} \operatorname{cth} \frac{n \pi b}{a} \sum_{i=1,2}^{\infty} i \sin \frac{i \pi t}{a} B_i \cdot \\
 \cdot \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{m}{\left[ m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2 \right] \left[ m^2 - \left( \frac{i t}{a} \right)^2 \right]} \frac{\operatorname{sh} \frac{m \pi h}{t}}{ch \frac{m \pi h}{t} - 1} = \\
 = -G \Theta \frac{4 a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{4 t^3}{\pi a^3} \sin \frac{n \pi t}{a} \operatorname{cth} \frac{n \pi b}{a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[ m^2 - \left( \frac{n t}{a} \right)^2 \right]} \right. \\
 \left. - \frac{[1 - (-1)^n] \left( ch \frac{n \pi b}{a} - 1 \right)}{n^3 \operatorname{sh} \frac{n \pi b}{a}} \right\}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (44) ergibt die Koeffizientenwerte  $B_n$ . Mittels der Ausdrücke (32) und (43) werden die Koeffizienten  $A_n$  und  $C_m$  berechnet.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (35) ergibt die Koeffizientenwerte  $D_i$ . Auf diese Weise sind die gesuchten Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  bestimmt. Der Spannungszustand kann jetzt nach dem bekannten Verfahren der Elastizitätstheorie bestimmt werden.

Beispiel:  $a=5,5$ ,  $b=2$ ,  $h=3$ ,  $t=2$ .

Lineares Gleichungssystem (44)

$$\begin{aligned}
 +1,09 B_1 + 0,25 B_2 + 0,30 B_3 + 0,17 B_4 - 0,05 B_5 &= +3,73 G \Theta \\
 +0,10 B_1 + 1,30 B_2 + 0,39 B_3 + 0,25 B_4 + 0,01 B_5 &= -0,40 G \Theta \\
 +0,08 B_1 + 0,26 B_2 + 1,37 B_3 + 0,32 B_4 + 0,14 B_5 &= -0,09 G \Theta \\
 +0,03 B_1 + 0,13 B_2 + 0,24 B_3 + 1,31 B_4 + 0,29 B_5 &= -0,21 G \Theta \\
 -0,01 B_1 + 0,00 B_2 + 0,09 B_3 + 0,23 B_4 + 1,35 B_5 &= +0,01 G \Theta
 \end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten

$B_n$	$A_n$
$B_1 = +3,62 G \Theta$	$A_1 = -7,75 G \Theta$
$B_2 = -0,50 G \Theta$	$A_2 = +0,49 G \Theta$
$B_3 = -0,15 G \Theta$	$A_3 = +0,13 G \Theta$
$B_4 = -0,19 G \Theta$	$A_4 = +0,19 G \Theta$
$B_5 = +0,08 G \Theta$	$A_5 = -0,08 G \Theta$

Die Werte der Koeffizienten  $C_m$

$$C_1 (ch 1,5\pi - 1) = +0,19 G \Theta$$

$$C_2 (ch 3\pi - 1) = -0,18 G \Theta$$

$$C_3 (ch 4,5\pi - 1) = +0,08 G \Theta$$

$$C_4 (ch 6\pi - 1) = -0,05 G \Theta$$

$$C_5 (ch 7,5\pi - 1) = -0,03 G \Theta$$

Die Koeffizientenwerte  $D_m$  sind kleiner als die Rechenfehler.

Das Torsionsmoment

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2 \int_0^a \int_h^{b+h} \Phi_1 dx dy + 2 \int_0^t \int_0^h \Phi_2 dx dy = \\ &= G \Theta \frac{a^3 b}{3} + \frac{4a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ A_n sh \frac{n\pi b}{a} + B_n \left( ch \frac{n\pi b}{a} - 1 \right) \right\} + \quad (45) \\ &+ G \Theta \frac{t^3 h}{3} + \frac{4t^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2} C_m \left( ch \frac{m\pi h}{t} - 1 \right) = 18,3 G \Theta \end{aligned}$$

Die Spannungslinien sind auf der Abb. 6 dargestellt.

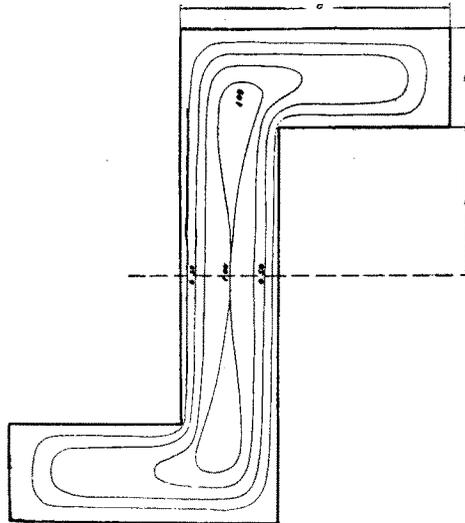


Abb. 6

## LITERATUR:

- [1] J. M. Klitchieff — Torsion eines I Trägers. (Im Druck)
- [2] W. Fischer Oassie and B Dobbie — The Torsional Stiffness Structural Sections. *The Structural Engineer*, March 1948, p. 154.