

# L'INFLUENCE DES FORCES EXTERIEURES SUR L'ÉCOULEMENT PAR LES ORIFICES

par

KONSTANTIN WORONETZ (Beograd)

1. Les travaux, devenus classiques, de Helmholtz [1] et de Kirchhoff [2], ont permis de résoudre un grand nombre de problèmes de la Mécanique des fluides parfaits. Ces travaux, concernant l'écoulement du fluide par des orifices et la formation de sillages, ont créé un domaine nouveau à l'application des fonctions analytiques. Plusieurs auteurs (voir p. e. Mises [3], Villat [4], Riabouchinsky [5] etc.) ont continué ces recherches en se servant, ordinairement, de la représentation conforme des plans introduits sur le plan auxiliaire. Une proposition doit être nécessairement faite pour pouvoir effectuer une telle représentation et pour pouvoir ainsi résoudre le problème posé par des méthodes habituelles. C'est la proposition que la vitesse reste constante sur la surface libre de la veine liquide ou le long des lignes de glissement limitant la zone de l'eau morte derrière les obstacles immergés.

Il s'ensuit de l'équation de Bernoulli que cette proposition est équivalente à la condition que l'influence des forces extérieures sur le mouvement fluide soit négligeable.

2. Désignons par  $\varphi$  le potentiel, par  $\psi$  la fonction de courant, par  $v(v_x, v_y)$  la vitesse et par  $\theta$  l'angle que fait la vitesse avec l'axe des  $x$ . Considérons les fonctions analytiques  $z = x + iy$ ,  $f = \varphi + i\psi$ ,  $\Omega = \ln \frac{dz}{df} = -\ln v + i\theta$ .

La représentation conforme du plan  $f$  sur le plan auxiliaire  $t = t' + it''$  ne présente pas, ordinairement, beaucoup de difficultés. Quant à la fonction  $\Omega$ , on connaît sa partie réelle le long des lignes de glissement et sa partie imaginaire pure sur les autres parties de la frontière. Une fois  $\Omega$  connue, on obtient la fonction  $z$  par une simple intégration:

$$z = \int e^{\Omega} df. \quad (1)$$

On est amené ainsi à un problème inverse à ceux de Dirichlet et de Neumann, nommé problème mixte direct.

Pour traiter ce problème nous suivons la méthode indiquée par Volterra [6] et développée par Signorini [7] et Demtchenko [8]. On multiplie la fonction  $\Omega$  par une fonction auxiliaire  $T$ , qui prend des valeurs réelles sur les lignes de courant limitant la veine et des valeurs imaginaires pures sur les autres parties de la frontière. La partie réelle du produit  $\Omega T$  étant égale à  $-T \ln \nu$  sur les lignes de courant limites et  $\Theta T$  sur les autres parties de la frontière, le problème mixte direct se trouve réduit au problème de Dirichlet pour le domaine  $\Omega$ .

Il est facile de construire la fonction auxiliaire  $T(t)$ , analytique, s'annulant à l'infini, prenant sur les lignes limites de la veine les valeurs réelles et sur les autres parties de la frontière les valeurs imaginaires pures. Désignons par  $\alpha_\sigma$  et  $\beta_\sigma$  ( $\sigma=1, 2, 3, \dots, n$ ) les extrémités des segments  $\omega_\sigma$  qui correspondent sur l'axe réel  $t'$  aux lignes limites de la veine. La fonction:

$$T(t) = \frac{i P(t)}{\prod_{\sigma=1}^n \sqrt{(t-\alpha_\sigma)(t-\beta_\sigma)}}, \quad (2)$$

où  $P(t)$  est un polynôme à coefficients réels dont le degré est plus petit que  $n$ , satisfait bien à toutes ces conditions.

La formule générale, donnant la fonction holomorphe  $F(t)$  dans le demi-plan supérieur  $t$  d'après les valeurs  $F'(t')$  de sa partie réelle sur l'axe réel, peut être mise sous la forme:

$$F(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'(t') d t'}{t-t'} + i a_0. \quad (3)$$

On obtient cette formule en se servant, par exemple, de la formule donnant la fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unitaire d'après les valeurs de sa partie réelle sur le cercle (voir Villat [9]).

En appliquant la formule (3) au produit  $\Omega(t) T(t)$ , on obtient:

$$\Omega(t) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(t') T(t') d t'}{t-t'} + i a_0, \quad (4)$$

où  $c(t')$  est égal à  $-\ln \nu(t')$  sur les segments  $\omega_\sigma$  et à  $i \Theta(t')$  sur les autres parties de l'axe  $t'$ .

3. Dans les problèmes de Helmholtz-Kirchhoff la vitesse  $v$  est constante sur les lignes limitant la veine. Puisque les frontières rigides sont supposées rectilignes, l'angle  $\Theta$  est aussi constant sur ces frontières. Il s'ensuit que l'intégrale (4) peut être calculée par les méthodes habituelles et donne ainsi la solution cherchée. On voit, donc, que la condition de l'absence des forces extérieures est nécessaire pour pouvoir résoudre le problème posé. C'est dans ce cas seulement que l'équation de Bernoulli donne la vitesse constante sur les lignes limitant la veine.

Au contraire, si l'influence des forces extérieures n'est plus négligeable, la vitesse varie le long des lignes de glissement. L'intégrale (4) ne peut plus être calculée, puisque  $c(t')$  est connu sur ces lignes comme fonction de  $x$  et de  $y$  mais non de  $t'$ . L'analyse d'un tel problème présente beaucoup de difficultés qui, dans la plus part des questions traitées, sont insurmontables.

Il existe, d'autre part, un grand nombre de problèmes hydrauliques où l'influence des forces extérieures est petite mais non négligeable. Dans ces problèmes la vitesse sur les lignes de courant limitant la veine est une fonction connue de  $x$  et de  $y$  et diffère peu d'une valeur moyenne constante, correspondante au cas où l'influence des forces extérieures peut être négligée. Considérons un tel problème et supposons, pour simplifier le calcul, qu'il n'existe qu'une seule veine liquide. Le problème ne manque pas de généralité puisque les mêmes raisonnements peuvent être étendues au cas où plusieurs veines existent.

4. Admettons que l'expression donnant la vitesse le long des lignes de glissement peut être réduite à la forme:

$$v = v_0 (1 + \varepsilon \lambda) , \quad (5)$$

où  $\lambda$  est une fonction connue de  $x$  et de  $y$  et  $\varepsilon$  est une constante de valeur très petite dont nous négligeons les carrés et les puissances plus élevées. Comparons le problème posé avec le problème classique analogue où la vitesse reste constante sur les lignes limites de la veine. La solution du problème classique est supposée connue.

La représentation conforme du plan  $f$  sur le demiplan supérieur  $t$  ne présente aucune difficulté car  $\lambda$  n'intervient pas dans les formules. Quant à la fonction  $\Omega(t)$ , la formule (4) donne

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) - \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(1 + \varepsilon \lambda) T(t') dt'}{t - t'} , \quad (6)$$

où  $\Omega_0(t)$  est une fonction bien déterminée de  $t$  qui correspond à la fonction  $\Omega$  dans le cas où la vitesse le long des lignes de glissement reste constante et égale à  $v_0$ . En remarquant que

$$\ln(1 + \varepsilon\lambda) = \varepsilon\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda^2 + \dots,$$

et en se contentant d'une approximation de premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , on ramène l'équation (6) à la forme:

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) + \varepsilon\Omega_1(t), \quad (7)$$

où  $\Omega_1(t)$  désigne l'expression:

$$\Omega_1(t) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{T(t)} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\lambda(x, y) T(t') dt'}{t - t'}. \quad (8)$$

Le second terme de l'équation (7), ayant  $\varepsilon$  comme facteur, est petit par rapport au terme  $\Omega_0(t)$  et reste pour le moment inconnu, car l'on ne connaît pas  $\lambda$  en fonction de  $t'$ .

La fonction  $z$  peut être mise sous la forme suivante:

$$z = \int e^{\Omega_0 + \varepsilon\Omega_1} \frac{df}{dt} dt = z_0 + \varepsilon z_1, \quad (9)$$

car la même approximation qu'auparavant donne:

$$e^{\varepsilon\Omega_1} = 1 + \varepsilon\Omega_1 + \dots,$$

La fonction  $z_0$  peut être calculée directement et coïncide, évidemment, avec celle déterminant le mouvement principal, où la vitesse reste constante le long des lignes de glissement. La fonction

$$z_1 = \int \Omega_1 e^{\Omega_0} \frac{df}{dt} dt \quad (10)$$

reste inconnue, mais, étant multipliée par  $\varepsilon$ , rend le second terme de l'expression (9) petit par rapport au premier.

Si l'on sépare les parties réelles et imaginaires de l'équation (9), on obtient

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1, \quad (11)$$

où  $x_0, y_0, x_1, y_1$  sont des fonctions de  $t$ . La fonction  $\lambda(x, y)$  peut donc être mise sous la forme:

$$\lambda(x, y) = \lambda(x_0, y_0) + \varepsilon \left( x_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) + \dots$$

Il suffit de ne garder que le premier membre de ce développement, car dans l'expression (7) de  $\Omega$  la fonction  $\lambda$  est multipliée elle-même par  $\epsilon$ .

On arrive ainsi au résultat suivant.

La déformation des lignes limitant la veine liquide, due au fait que les vitesses le long de ces lignes, restant voisines de valeur constante  $v_0$ , deviennent fonctions connues de  $x$  et de  $y$  de la forme (5), peut être calculée, avec une approximation de premier ordre par rapport à  $\epsilon$ , en remplaçant  $x$  et  $y$  dans l'expression de  $\lambda$  par des valeurs  $x_0$  et  $y_0$ , qui correspondent au mouvement principal, où les vitesses le long des lignes limitant la veine liquide restent constantes.

Il résulte de ce qui précède que, dès que l'on connaît les équations paramétriques des lignes de glissement

$$x_0 = x_0(t'), \quad y_0 = y_0(t')$$

dans le cas du mouvement de Helmholtz-Kirchhoff, la fonction  $\lambda(x, y)$ , qui caractérise la variation de la vitesse le long de ces lignes, devient, avec une approximation suffisante, une fonction connue de  $t'$ . D'après les formules (8) et (10) on calcule les fonctions  $\Omega_1$  et  $z_1 = x_1 + iy_1$ . Les équations paramétriques des lignes de glissement déformées auront la forme:

$$x = x_0(t') + \epsilon x_1(t') \quad y = y_0(t') + \epsilon y_1(t') \quad (11')$$

Il est manifeste que la méthode exposée peut être facilement généralisée en ce qui concerne l'ordre de l'approximation par rapport à  $\epsilon$ . Il est évident que les fonctions  $\Omega$  et  $z$  peuvent être ramenées à la forme:

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) + \epsilon \Omega_1(t) + \epsilon^2 \Omega_2(t) + \dots,$$

$$z(t) = z_0(t) + \epsilon z_1(t) + \epsilon^2 z_2(t) + \dots$$

Connaissant  $\Omega_0$  et  $z_0$  on calcule  $\Omega_1$  et  $z_1$ ; connaissant ces dernières on détermine  $\Omega_2$  et  $z_2$ ; et ainsi de suite.

Dans l'exemple qui suit nous ne nous arrêtons que sur le calcul des deux premiers termes de ces séries.

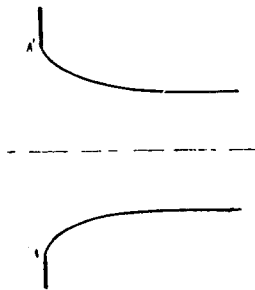


Fig. 1.

**5.** Considérons le problème classique de Kirchhoff [10] concernant l'écoulement plan de fluide par l'orifice percé dans la paroi d'un vase infini (fig. 1). En supposant que la vitesse reste constante le long des lignes limitant la veine,

c'est-à-dire en négligeant l'influence de la pesanteur, Kirchhoff a obtenu la solution de ce problème par des formules que nous reproduisons ici en changeant un peu les notations:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= -\frac{2dv_0}{\pi+2} \ln\left(-\frac{t}{a}\right) + i\psi_A, \\
 \Omega_0 &= \ln \frac{1}{v_0} \left(-\frac{t}{a} - i\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\right), \\
 z_0 &= \frac{2d}{\pi+2} \left(1 + \frac{t}{a} + i\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}} - \frac{i}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}}\right).
 \end{aligned} \tag{12}$$

La ligne de courant limite passant par le point A est donnée par les équations:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{2d}{\pi+2} \left(1 + \frac{t}{a}\right), \\
 y_0 &= \frac{2d}{\pi+2} \left(\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}}\right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

où par  $2d$  est désignée la largeur de l'orifice et où  $t/a$  varie de  $-1$  à  $0$ , Pour  $t=0$  la valeur de  $y_0$  tend vers l'infini et la valeur de  $x_0$  vers  $2d/(\pi+2) = d - b_0$ , où  $2b_0$  est la largeur minima de la veine. On obtient ainsi le coefficient de contraction de Kirchhoff

$$\frac{b_0}{d} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0,611.$$

Appliquons à ce problème la méthode exposée plus haut. Supposons que l'influence de la pesanteur sur la forme de la veine est petite, mais non négligeable. L'équation de Bernoulli donne:

$$v^2 = v_0^2 \left(1 - \epsilon \frac{x}{d}\right), \tag{14}$$

où  $\varepsilon$  désigne l'expression

$$\varepsilon = \frac{2dg}{v_0^2} .$$

Admettons que  $\varepsilon$  est petit et négligeons les carrés et les puissances plus élevées de ce nombre.

On peut se rendre compte de la valeur numérique de  $\varepsilon$  en comparant le problème posé avec le problème technique concernant l'écoulement de l'eau d'un vase de très grande section dans le cas où l'eau se trouve en repos au niveau constant. En adoptant la formule de Torricelli  $v_0^2 = 2gH$ , relative à cette sorte d'écoulement, on voit que  $\varepsilon = d/H$ , où  $H$  désigne la hauteur de l'eau au dessus de l'orifice. Le nombre  $\varepsilon$  est, donc, inversement proportionnel à la hauteur  $H$ . Puisque  $\varepsilon$  est multiplié par  $x/d$ , il est évident que notre analyse n'est acceptable qu'au voisinage de l'orifice, où la relation  $x/d$  est encore petite.

6. On tire des équation (12) et (14) que la vitesse  $v$  est approximativement égale à

$$v = v_0 \left( 1 - \varepsilon \frac{x}{2d} \right) \quad (14')$$

et que la fonction  $\lambda(x, y)$  est donnée par l'expression:

$$\lambda(x, y) = \lambda(x_0, y_0) = - \frac{x_0}{2d} = - \frac{1}{\pi + 2} \left( 1 + \frac{t'}{a} \right) . \quad (15)$$

La fonction auxiliaire  $T(t)$  est dans notre cas égale à

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

et la formule (8) pour  $\Omega_1$  donne :

$$\Omega_1 = \frac{i}{\pi} \sqrt{a^2 - t^2} \int_{-a}^{+a} \frac{- \frac{1}{\pi + 2} \left( 1 + \frac{t'}{a} \right)}{(t - t') \sqrt{a^2 - t'^2}} dt' .$$

En effectuant l'intégration on obtient:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\pi + 2} \left( 1 + \frac{t}{a} - i \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \right). \quad (16)$$

La fonction  $\Omega_1$  satisfait bien à toutes les conditions. Pour  $|t| > a$  elle est réelle, ce qui montre que la forme des parois n'est pas changée (l'angle  $\Theta = \Theta_0$  sur les parois). Pour  $t = -a$  la fonction  $\Omega_1$  est nulle, c'est-à-dire que au point  $A$  la vitesse est la même, par sens et grandeur, que dans le problème principal. Le long des lignes limitant la veine la vitesse satisfait à l'équation (14') avec l'angle  $\Theta$  différant peu de l'angle  $\Theta_0$ :  $\Theta_0 = \Theta + \varepsilon \Theta_1$ , où

$$\Theta_1 = -\frac{1}{\pi + 2} \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}.$$

La fonction  $z_1$  déterminée par la formule (10), prend la forme

$$z_1 = \frac{2d}{(\pi + 2)^2} \int \left( 1 + \frac{t}{a} - i \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \right) \left( \frac{t}{a} + i \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \right) \frac{dt}{t}.$$

et donne, après l'intégration et après la séparation des parties réelles et imaginaires,

$$x_1 = \frac{2d}{(\pi + 2)^2} \left[ 1 + \frac{t}{a} + \ln \left( -\frac{t}{a} \right) \right],$$

$$y_1 = \frac{2d}{(\pi + 2)^2} \left( \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}} \right).$$



La ligne de courant limite passant par le point A est déterminée par les équations:

$$x = \frac{2d}{\pi + 2} \left( 1 + \frac{t}{a} \right) + \varepsilon \frac{2d}{(\pi + 2)^2} \left[ 1 + \frac{t}{a} + \ln \left( -\frac{t}{a} \right) \right],$$

$$y = \frac{2d}{\pi + 2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\pi + 2} \right) \left( \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2/a^2}}{1 - \sqrt{1 - t^2/a^2}} \right), \quad (17)$$

où  $t/a$  prend les valeurs entre  $-1$  et  $0$ .

**7.** La courbe (17) possède quelques propriétés caractéristiques. Elle a un maximum pour  $t = t_m$  défini par l'expression

$$\varepsilon = -(\pi + 2) \frac{\frac{t_m}{a}}{1 + \frac{t_m}{a}}. \quad (18)$$

Les coordonnées du point maximum sont:

$$x_m = \frac{2d}{\pi + 2} \left[ 1 - \frac{\frac{t_m}{a}}{1 + \frac{t_m}{a}} \ln \left( -\frac{t_m}{a} \right) \right],$$

$$y_m = \frac{2d}{\pi + 2} \frac{1}{1 + \frac{t_m}{a}} \left( \sqrt{1 + \frac{t_m^2}{a^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t_m^2/a^2}}{1 - \sqrt{1 - t_m^2/a^2}} \right). \quad (19)$$

La valeur de  $\varepsilon$  étant petite, il s'ensuit de l'équation (18) que  $t_m/a$  est aussi petit. Néanmoins, on constate facilement, à l'aide des équations (19), que le point maximum ne s'éloigne pas à l'infini. Ce point reste au voisinage

de l'orifice. Dans le tableau I sont indiquées les coordonnées de ce point pour quelques valeurs de  $\varepsilon$ .

Tableau I

$\varepsilon$	$-t/a$	$x_m/d$	$-y_m/2d$	$b_m/2d$
0,0	0,000	0,195	$\infty$	0,611
0,1	0,019	0,180	0,716	0,618
0,2	0,038	0,170	0,602	0,626
0,3	0,055	0,160	0,536	0,632
0,4	0,072	0,155	0,488	0,640
0,5	0,089	0,149	0,454	0,646
0,6	0,105	0,143	0,428	0,652
0,7	0,120	0,139	0,405	0,657
0,8	0,135	0,134	0,384	0,664
0,9	0,150	0,129	0,367	0,669
1,0	0,163	0,126	0,353	0,674

La fig. 2 reproduit la courbe (17) et en même temps la courbe de Kirchhoff.

Dans le problème de Kirchhoff le mouvement est symétrique par rapport à l'axe des  $y$ . Cette propriété ne se conserve plus dans le pro-

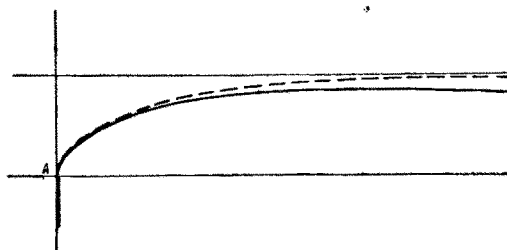


Fig. 2

blème que nous traitons ici. En appliquant les mêmes raisonnements qu'auparavant, mais en les adaptant à la courbe passant par le point  $A'$ , on obtient les équations de cette courbe sous la forme:

$$\begin{aligned}
 x' &= x'_0 + \varepsilon x'_1 = -\frac{2d}{\pi+2} \left(1 - \frac{t}{a}\right) + \varepsilon \frac{2d}{(\pi+2)^2} \left(1 - \frac{t}{a} + \ln \frac{t}{a}\right), \\
 y' &= y'_0 + \varepsilon y'_1 = -\frac{2d}{\pi+2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi+2}\right) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2/a^2}}{1 - \sqrt{1 - t^2/a^2}}\right).
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

avec  $t/a$  variant de 1 à 0. Cette courbe ne possède aucun maximum et est reproduite dans la fig. 3.

On mesure ordinairement la contraction d'une veine au point où la ligne de courant de dessous a son maximum. La contraction maxima se trouve, bien sur, à l'infini, mais les lignes de courant deviennent pratiquement parallèles dès que le point maximum est passé. Les équations (17)

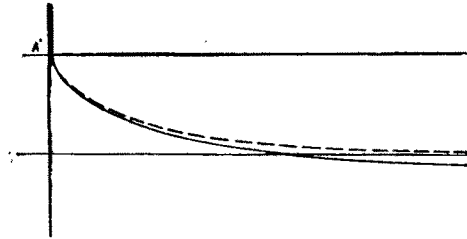


Fig. 3

et (20) montrent que les valeurs de  $x_1$  et de  $x'_1$  sont égales pour les valeurs égales des paramètres  $-t$  et  $+t$ . Il s'ensuit que le coefficient de contraction, calculé dans le sens de l'axe des  $x$ , a dans le point maximum la valeur:

$$\frac{b_m}{2d} = \frac{2d - x + x'}{2d} = \frac{\pi}{\pi + 2} - \frac{2}{\pi + 2} \frac{t_m}{a}, \quad (21)$$

où  $t_m$  est déterminé par l'équation (18). Le membre complémentaire  $-\frac{2}{\pi + 2} \cdot \frac{t_m}{a}$  dans l'expression (21) donne un petit accroissement du coefficient  $\frac{\pi}{\pi + 2}$  de Kirchhoff et les valeurs de ce coefficient corrigé sont données dans le tableau I. Ce coefficient croît avec  $\epsilon$  ce qui correspond bien aux recherches faites par plusieurs expérimentateurs (le nombre  $\epsilon$  est inversement proportionnel à la hauteur  $H$  de l'eau dans le vase). La distance  $y_m$  du point maximum de l'orifice est aussi en bon accord avec les données expérimentales.

Il faudrait faire une petite correction dans le calcul du coefficient de contraction. Aux valeurs égales des paramètres  $-t$  et  $+t$  ne correspondent pas les valeurs égales de la distance  $y$  et  $y'$ . Il faudrait, donc, remplacer  $t/a$  dans les équations (20) par  $-t/a + \delta$  et déterminer  $\delta$  en égalant les

valeurs de  $y$  et  $y'$ . En supposant que  $\delta$  est une petite quantité de l'ordre de  $\varepsilon$  et en négligeant, par conséquent, ses carrés et les puissances plus élevées, on obtient pour  $\delta$  l'expression

$$\delta = 2\varepsilon \frac{\frac{t}{a}}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}} \frac{y_0}{2d}.$$

Il est facile de voir que pour les valeurs de  $t/a$ , définies par l'équation (18),  $\delta$  devient une quantité de l'ordre supérieur à  $\varepsilon$  et, par suite, les corrections supposées sont superflues.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Helmholtz — *Monatsberichte der Berliner Akademie*, April 1868.
- [2] Kirchhoff — Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Ges. Abhandlungen p. 416.
- [3] Mises — Berechnung von Ausfluss- und Überfallzahlen. *Zeitsch. VDI*, (1917), p. 447.
- [4] Villat — *Ann. de l'Éc. Norm.* (1914), p. 455.
- [5] Riabouchinsky — a. Congrès intern. Zürich, 1926. p. 512. b. Congrès intern. Stockholm, 1930, p. 141.
- [6] Volterra — Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa. *An. di Mat.*, 2<sup>e</sup> série, t. 11, p. 1.
- [7] Signorini — Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa. *An. di Mat.* 3<sup>e</sup> s., t. 25, p. 253.
- [8] Demtchenko — Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, 1933.
- [9] Villat — Sur le problème de Dirichlet dans une aire circulaire. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 39, 1911, p. 443.
- [10] Kirchhoff — Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik. Leipzig. 1877, p. 296.