

# ELASTOSTATIK DER DICKEN ZYLINDERSCHALEN

von

Ing. ERVIN PRELOG (Ljubljana)

**1. Einleitung.** In nachstehender Mitteilung ist eine Methode, mit welcher man elastostatische Probleme der dicken Schalen behandeln kann, angegeben. Die Methode ist zwar auch für dünne Schalen brauchbar, jedoch wollen wir hier betonen, dass es sich vorzugsweise um dicke Schalen handeln wird, weil die Methode besonders für Untersuchungen von Spannungen und Verschiebungen längs der Dicke der Schale geeignet ist.

Bisher sind unseres Wissens in dieser Richtung nur einige Probleme in der Literatur besprochen worden, und zwar: dicke Zylinderschalen, die unter äusserem oder innerem Überdruck stehen und zweitens runde Platten mit oder ohne innere Bohrung, belastet in Richtung ihrer Ebene mit äusseren bzw. inneren normalen oder tangentialen Kräften, welche in der Richtung der Rotationsachse immer konstant anzusehen sind (Ebenes Problem). Diese zwei wohlbekannten Probleme bilden bei unserer allgemeinen räumlichen Aufgabe, wie wir später leicht beweisen werden, nur zwei Sonderfälle.

Als Ausgangsgleichungen unseres Problems dienen die bekannten Laméschen Elastizitätsgleichungen, deren Lösung, nach dem Kirchhoffschen Satz eine eindeutige Lösung des Elastizitätsproblems ergibt, sobald nur noch alle Randbedingungen erfüllt sind. Die Lösungen sind also streng, weil ausser kleinen Deformationen keine Voraussetzungen vorliegen; diese sind aber schon die Voraussetzung für die Existenz des Hookschen Gesetzes. Die einzige Schwierigkeit, die wir nicht beseitigen können, ist die Nichterfüllung von allen Randbedingungen. Es wird zwar in manchen Fällen auch dies möglich sein, in meisten Fällen werden wir aber nur die für die Praxis wichtigsten erfüllen können.

Diese Mitteilung behandelt nur Kreiszyinderschalen. Man kann aber auch einige andere Schalenarten behandeln, unter anderen auch den hohlen

Thorus. Woinowsky-Krieger [5] hat auch mittels Laméscher Gleichungen Lösungen für dicke Platten angegeben.

**2. Lamésche Gleichungen.** Die statischen Gleichgewichtsbedingungen auf einem Prisma, dessen Kanten  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  sind, die wir aus einem elastischen Körper ausschneiden, lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Mann kann aber auch Gleichgewicht auf einem elastischen Körper mit den Verschiebungen angeben. Diese Gleichungen rühren von Lamé her. Für das Kartesische Koordinatensystem  $xyz$  nehmen die Laméschen Gleichungen folgende Form an

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Hier bedeuten  $\lambda$  und  $\mu$  Lamésche Konstanten,  $\varepsilon$  ist Volumendilatation,  $u$ ,  $v$  und  $w$  sind Verschiebungen,  $\rho$  ist spezifische Dichte und  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Komponenten der äusseren Kraft, bezogen an die Volumeneinheit. Die Gleichungen (1) und (2) gelten unter der einzigen Voraussetzung verschwindend kleiner Formänderungen. Soeben angegebene Gleichungen können wir auch in folgender vektoriellen Darstellung angeben

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad } \varepsilon - 2\mu \text{rot } \vec{\omega} + \rho \vec{P} = 0.\tag{3}$$

Diese vektorielle Form der Laméschen Gleichungen gestattet uns einen sehr einfachen Übergang auf allgemeine Koordinaten, welche wir zuerst angeben wollen,

Mögen die drei allgemeinen krummlinigen Koordinatenlinien  $\alpha, \beta, \gamma$  sein und zwar so dass

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad \gamma = \gamma(x, y, z)$$

ist. Bekanntlich ist

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2,$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$H_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2$$

und

$$h_1 = \frac{1}{H_1}, \quad h_2 = \frac{1}{H_2}, \quad h_3 = \frac{1}{H_3}.$$

Für die Volumendilatation  $\varepsilon$  bekommen wir

$$\varepsilon = h_1 h_2 h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\alpha}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\beta}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\gamma}{h_1 h_2} \right) \right], \quad (4)$$

wo  $u_\alpha, u_\beta$  und  $u_\gamma$  die Verschiebungen in Richtung der Koordinatenlinien sind. Die Komponenten von  $\text{grad } \varepsilon$  sind

$$h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}, \quad h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}, \quad h_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} \quad (5)$$

und schliesslich, die Komponenten von  $\text{rot } \vec{\omega}$

$$(\text{rot } \vec{\omega})_\alpha = h_2 h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\omega_\gamma}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\omega_\beta}{h_2} \right) \right],$$

$$(\text{rot } \vec{\omega})_\beta = h_3 h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\omega_\alpha}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega_\gamma}{h_3} \right) \right], \quad (6)$$

$$(\text{rot } \vec{\omega})_\gamma = h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\omega_\alpha}{h_1} \right) \right].$$

Die Einsetzung von (4), (5) und (6) in die Gleichungen (3) ergibt in skalarer Schreibweise

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) h_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} - 2\mu h_2 h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\omega_\gamma}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\omega_\beta}{h_2} \right) \right] + \rho X &= 0, \\(\lambda + 2\mu) h_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} - 2\mu h_3 h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\omega_\alpha}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega_\gamma}{h_3} \right) \right] + \rho Y &= 0, \\(\lambda + 2\mu) h_3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} - 2\mu h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\omega_\beta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\omega_\alpha}{h_1} \right) \right] + \rho Z &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

womit die Laméschen Gleichungen in allgemeinen Koordinaten angegeben sind.

Schliesslich wollen wir noch die Laméschen Gleichungen (7) in Zylinderkoordinaten angeben, weil uns bei dieser Mitteilung bloss diese interessieren. Da bei Zylinderkoordinaten

$$\alpha = r, \quad \beta = \varphi, \quad \gamma = z;$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = 1; \quad (8)$$

$$u_\alpha = u, \quad u_\beta = v, \quad u_\gamma = w$$

ist, bekommen wir mit Benützung von Gleichungen (7) und wenn wir gleichzeitig mit  $\lambda + 2\mu$  dividieren

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-k}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1+k}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\+ \frac{1-k}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} X = 0, \\ \frac{1-k}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1+k}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{vk}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\+ \frac{1-k}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} Y = 0, \\ (1-k) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1-k}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1-k}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} + k \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \\+ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} Z = 0,\end{aligned}\quad (9)$$

wo noch

$$k = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad (10)$$

und  $\nu$  die Poissonsche Zahl ist.

**3. Integration von Differentialgleichungen.** Nun versuchen wir die Gleichungen (9) zu integrieren. Wir betrachten zuerst eine Schale, die auf ihrer Oberfläche mit Kräften  $R, \Phi, Z$  belastet ist (Abb. 1). Sei  $a$  der Halbmesser der Mittelfläche der Schale,  $l$  die Länge,  $2h$  die Dicke und  $\alpha$  die „Öffnung“ der Schale. Die äusseren Kräfte, die auf der oberen Fläche ( $R, \Phi, Z$ ) oder auf der unteren Fläche der Schale ( $\bar{R}, \bar{\Phi}, \bar{Z}$ ) angreifen, lassen sich bekanntlich durch Fouriersche Doppelreihen angeben, und zwar

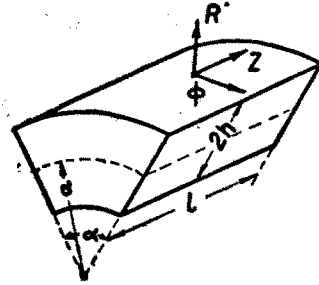


Abb. 1

$$\begin{aligned} R &= \sum \sum R_{mn}^{(1)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum \sum R_{mn}^{(2)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum R_{mn}^{(3)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum R_{mn}^{(4)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \\ \Phi &= \sum \sum \Phi_{mn}^{(1)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum \Phi_{mn}^{(2)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum \sum \Phi_{mn}^{(3)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum \Phi_{mn}^{(4)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \\ Z &= \sum \sum Z_{mn}^{(1)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum Z_{mn}^{(2)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \\ &+ \sum \sum Z_{mn}^{(3)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum Z_{mn}^{(4)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}, \end{aligned} \quad (11)$$

mit

$$q = \frac{m\pi}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{n\pi a}{l}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

wo noch die Fourierschen Koeffizienten  $R_{mn}^{(1)} \dots$  näher zu bestimmen sind. Das gleiche gilt auch für Volumenkräfte  $X, Y, Z$ , welche wir aber künftig vernachlässigen wollen, was, sobald diese im Vergleich mit äusseren Lasten genug klein sind, erlaubt ist.

Enge Beziehungen zwischen Verschiebungen und Spannungen bzw. äusseren Kräften lassen uns vermuten, dass sich auch die Verschiebungen durch Fouriersche Doppelsummen ausdrücken lassen, wo aber die Fourierkoeffizienten nicht mehr als Konstanten, sondern als Funktionen von  $r$  aufzufassen sind. So bekommt man

$$\begin{aligned}
 u &= \sum \sum U_{mn}^{(1)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum U_{mn}^{(2)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \\
 &+ \sum \sum U_{mn}^{(3)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum U_{mn}^{(4)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \\
 v &= \sum \sum V_{mn}^{(1)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum V_{mn}^{(2)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \\
 &+ \sum \sum V_{mn}^{(3)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum V_{mn}^{(4)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \\
 w &= \sum \sum W_{mn}^{(1)} \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum W_{mn}^{(2)} \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \\
 &+ \sum \sum W_{mn}^{(3)} \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a} + \sum \sum W_{mn}^{(4)} \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Wenn wir jetzt diese Ausdrücke, wobei wir uns nur auf die ersten Summen von Gleichungen (13) begrenzen, in (9) einsetzen und gleichzeitig mit dem trigonometrischen Anteil kürzen, bekommen wir folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + k \frac{q^2}{r^2} + k \frac{\lambda^2}{a^2} \right) U - \frac{1-k}{r} q \frac{dV}{dr} + \frac{1+k}{r^2} qV - \frac{1-k}{a} \lambda \frac{dW}{dr} &= 0, \\
 \frac{1-k}{r} q \frac{dU}{dr} + \frac{1+k}{r^2} qU + k \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{k}{r} \frac{dV}{dr} - \left( \frac{k}{r^2} + \frac{q^2}{r^2} + k \frac{\lambda^2}{a^2} \right) V - \frac{1-k}{ra} q\lambda W &= 0, \\
 \frac{1-k}{a} \lambda \frac{dU}{dr} + \frac{1-k}{r} \frac{\lambda}{a} U - \frac{q\lambda}{a} \frac{1-k}{r} V + k \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{k}{r} \frac{dW}{dr} - \left( \frac{kq^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{a^2} \right) W &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Mit

$$r = x \cdot a \tag{15}$$

übergehen soeben erhaltene Gleichungen in folgende dimensionslose Form,

$$\begin{aligned}
 x^2 U'' + xU' - (1 + kq^2 + k\lambda^2 x^2) U - x(1-k)qV' + (1+k)qV - (1-k)\lambda x^2 W' &= 0, \\
 (1-k)qxU' + (1+k)qU + kx^2 V'' + kxV' - (k + q^2 + k\lambda^2 x^2)V - (1-k)q\lambda xW &= 0, \\
 (1-k)\lambda x^2 U' + (1-k)\lambda xU - q\lambda(1-k)xV + kx^2 W'' + kxW' - (kq^2 + \lambda^2 x^2)W &= 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

wo der Strich die Ableitung nach  $x$  bedeutet. Nimmt man weiter für

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + kq^2 & , & & a_4 &= (1+k)q & , & & a_7 &= k + q^2 & , \\ a_2 &= k\lambda^2 & , & & a_5 &= (1-k)\lambda & , & & a_8 &= (1-k)q\lambda & , \\ a_3 &= (1-k)q & , & & a_6 &= k & , & & a_9 &= kq^2 & , \\ & & & & & & & & & & a_{10} &= \lambda^2 & , \end{aligned} \quad (17)$$

so folgen schliesslich die Grundgleichungen in folgender Form

$$\begin{aligned} x^2 U'' + x U' - (a_1 + a_2 x^2) U - a_3 x V' + a_4 V - a_5 x^2 W' &= 0 & , \\ a_3 x U' + a_4 U + a_6 x^2 V'' + a_6 x V' - (a_7 + a_2 x^2) V - x a_8 W &= 0 & , \\ a_5 x^2 U' + a_5 x U - a_3 x V + a_6 x^2 W'' + a_6 x W' - (a_9 + a_{10} x^2) W &= 0 & . \end{aligned} \quad (18)$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir nun mittels Reihen integrieren. Die Ansätze für die partikuläre Lösungen wählen wir in ähnlicher Form, wie bei der Besselschen Differentialgleichung, wozu uns die Ähnlichkeit führt, denn streichen wir die Glieder  $a_3$ ,  $a_4$  und  $a_5$  in der ersten Gleichung (18), so bekommen wir eine Besselsche Differentialgleichung rein imaginären Arguments. Ähnliches gilt auch für die zweite und dritte Gleichung (18). Die Ansätze

$$\begin{aligned} U &= x^\rho \sum_{r=1}^{\infty} C_r x^r & , \\ V &= x^\rho \sum_{r=1}^{\infty} D_r x^r & , \\ W &= x^\rho \sum_{r=1}^{\infty} E_r x^r & , \end{aligned} \quad (19)$$

wo  $\rho$  und die Konstanten  $C_r$ ,  $D_r$  und  $E_r$  noch näher zu bestimmen sind, setzen wir in die Grundgleichungen (18). Nachfolgende Ordnung nach wachsenden Exponenten von  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} & x^\rho [C_0 (\rho^2 - a_1) + D_0 (a_4 - a_3 \rho)] + \\ & + x^{\rho+1} [C_1 \{(\rho+1)^2 - a_1\} + D_1 \{a_4 - a_3 (\rho+1)\} - E_0 a_5 \rho] + \\ & + x^{\rho+2} [C_2 \{(\rho+2)^2 - a_1\} + D_2 \{a_4 - a_3 (\rho+2)\} - E_1 a_5 (\rho+1) - C_0 a_2] + \\ & + \sum_{r=3}^{\infty} x^{\rho+r} [C_r \{(\rho+r)^2 - a_1\} + D_{r-1} \{a_4 - a_3 (\rho+r)\} - E_{r-1} a_5 (\rho+r-1) - C_{r-2} a_2] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^\rho [C_0 (a_3 \rho + a_4) + D_0 (a_6 \rho^2 - a_7)] + \\
& + x^{\rho+1} [C_1 \{a_3 (\rho + 1) + a_4\} + D_1 \{a_6 (\rho + 1)^2 - a_7\} - E_0 a_8] + \\
& + x^{\rho+2} [C_2 \{a_3 (\rho + 2) + a_4\} + D_2 \{a_6 (\rho + 2)^2 - a_7\} - E_1 a_8 - D_0 a_2] + \quad (20) \\
& + \sum_{r=3}^{\infty} x^{\rho+r} [C_r \{a_3 (\rho + r) + a_4\} + D_r \{a_6 (\rho + r)^2 - a_7\} - E_{r-1} a_8 - D_{r-2} a_2] = 0, \\
& x^\rho [E_0 (a_6 \rho^2 - a_9)] + \\
& + x^{\rho+1} [E_1 \{a_6 (\rho + 1)^2 - a_9\} + C_0 a_5 (\rho + 1) - D_0 a_8] + \\
& + x^{\rho+2} [E_2 \{a_6 (\rho + 2)^2 - a_9\} + C_1 a_5 (\rho + 2) - D_1 a_8 - E_0 a_{10}] + \\
& + \sum_{r=3}^{\infty} x^{\rho+r} [E_r \{a_6 (\rho + r)^2 - a_9\} + C_{r-1} a_5 (\rho + r) - D_{r-1} a_8 - E_{r-2} a_{10}] = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Konstanten  $C_0$ ,  $D_0$  und  $E_0$  haben eine nicht triviale Lösung, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten Null ist. Also

$$\begin{vmatrix}
\rho^2 - a_1 & a_4 - a_3 \rho & 0 \\
a_4 + a_3 \rho & a_6 \rho^2 - a_7 & 0 \\
0 & 0 & a_6 \rho^2 - a_7
\end{vmatrix} = 0.$$

Die Auflösung dieser Determinante ergibt die sogenannte *Fundamentalgleichung*

$$(a_6 \rho^2 - a_9) [a_6 \rho^4 + (-a_1 a_6 - a_7 + a_3^2) \rho^2 + (a_1 a_7 - a_4^2)] = 0, \quad (21)$$

die mit Berücksichtigung von (17) folgende Wurzeln ergibt

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= 1 + q, & \rho_2 &= 1 - q, & \rho_3 &= q, \\
\rho_4 &= -1 + q, & \rho_5 &= -1 - q, & \rho_6 &= -q.
\end{aligned} \quad (22)$$

Zwischen den Konstanten  $C_0$ ,  $D_0$  und  $E_0$  gelten, was aus (21) leicht einleuchtend ist, für die Wurzeln  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_4$  und  $\rho_5$ , folgende Beziehungen

$$C_0 \neq 0 \quad (\text{sonst beliebige Konstante}),$$

$$D_0 = -C_0 \cdot \frac{\rho^2 - a_1}{a_4 - a_3 \rho},$$

$$E_0 = 0,$$



für die Wurzeln  $\rho_3$  und  $\rho_6$  aber

$$E_0 \neq 0 \quad (\text{sonst beliebige Konstante}),$$

$$C_0 = 0, \quad D_0 = 0.$$

Die nachfolgenden Konstanten  $C_r$ ,  $D_r$  und  $E_r$  ( $r=1, 2, 3 \dots$ ), bekommt man sukzessiver Weise aus den Gleichungen

$$C_r \{ (\rho+r)^2 - a_1 \} + D_r \{ a_4 - a_3 (\rho+r) \} - E_{r-1} a_5 (\rho+r-1) - C_{r-2} a_2 = 0,$$

$$C_r \{ a_3 (\rho+r)^2 + a_4 \} + D_r \{ a_6 (\rho+r)^2 - a_7 \} - E_{r-1} a_8 - D_{r-2} a_2 = 0, \quad (23)$$

$$E_r \{ a_6 (\rho+r)^2 - a_9 \} + C_{r-1} a_5 (\rho+r) - D_{r-1} a_8 - E_{r-2} a_{10} = 0.$$

Bei der Ausrechnung von Konstanten  $C_r$ ,  $D_r$  und  $E_r$  bekommt man für die Wurzeln  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_4$  und  $\rho_5$  für  $C_r$  und  $D_r$  nur Werte mit geradem Index von  $r$  und ungeradem für  $E_r$ , für die Wurzeln  $\rho_3$  und  $\rho_6$  aber gerade umgekehrt.

Einige elementare Rechnungen die wir hier weglassen, ergeben folgende Werte für die Konstanten  $C_r$ ,  $D_r$  und  $E_r$ , und zwar für die Wurzel  $\rho_1 = 1 + q$

$$C_{2r} = \left( \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+2)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(q+2+r)} + \frac{2(1-k)}{q-(q+2)k} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+2)}{2^{2r} (r-1)! \Gamma(q+2+r)} \right) C,$$

$$D_{2r} = \frac{q+2-kq}{q-2k-kq} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+2)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(q+2+r)} C, \quad (24)$$

$$E_{2r+1} = \frac{(1-k)\lambda}{q-(q+2)k} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+2)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(q+2+r)} C;$$

für die Wurzel  $\rho_2 = 1 - q$

$$C_{2r} = \left( \frac{\lambda^{2r} \Gamma(2-q)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(2-q+r)} + \frac{1-k}{-q+(q-2)k} \cdot \frac{2\lambda^{2r} \Gamma(2-q)}{2^{2r} (r-1)! \Gamma(2-q+r)} \right) C,$$

$$D_{2r} = \frac{q-2-kq}{-q-2k+kq} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(2-q)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(2-q+r)} C, \quad (25)$$

$$E_{2r+1} = \frac{1-k}{-q-2k+kq} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(2-q)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(2-q+r)} C;$$

für die Wurzel  $\rho_3 = q$

$$\begin{aligned}
 E_{2r} &= \left( \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+1)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(q+1+r)} + \frac{1-k}{-q+2k+kq} \cdot \frac{2\lambda^{2r} \Gamma(q+1)}{2^{2r} \cdot (r-1)! \Gamma(q+1+r)} \right) E, \\
 C_{2r+1} &= \frac{(1-k)\lambda}{-q+2k+kq} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+1)}{2^{2r} \cdot (r-1)! \Gamma(q+1+r)} E, \\
 D_{2r+1} &= \frac{(1-k)\lambda}{-q+2k+kq} \cdot \frac{\lambda^{2r} \Gamma(q+2)}{2^{2r} \cdot r! \Gamma(q+2+r)} E.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Die drei Partikularlösungen für  $U$ ,  $V$  und  $W$  nehmen mit Benützung der Symbolik  $I_\nu(x\lambda)$  für rein imaginäre Besselsche Funktion erster Art, Arguments  $x\lambda$  und wenn wir noch für die Koeffizienten  $C$  und  $E$  der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{q+1} \cdot \frac{1}{\Gamma(q+2)}, & C &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{q+1} \cdot \frac{1}{\Gamma(2-q)}, \\
 E &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^q \cdot \frac{1}{\Gamma(q+1)}
 \end{aligned} \tag{27}$$

einsetzen, folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}
 U_1 &= I_{q+1} + \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda I_{q+2}, & V_1 &= \frac{q-2-kq}{q-2k-kq} I_{q+1}, \\
 W_1 &= \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda I_{q+1}; \\
 U_2 &= I_{1-q} + \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda I_{2-q}, & V_2 &= \frac{q-2-kq}{-q-2k+kq} I_{1-q}, \\
 W_2 &= \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda I_{1-q}, \\
 U_3 &= \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda I_{q+2}, & V_3 &= \frac{1-k}{-q+2k+kq} \cdot 2(q+1) I_{q+1}, \\
 W_3 &= \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda I_{q+1} + I_q,
 \end{aligned} \tag{28}$$

wobei wir beim Zeichen der Besselschen Funktion das Argument  $(x\lambda)$  weglassen. Die Wurzeln  $\rho_4, \rho_5, \rho_6$  ergeben keine neue Lösungen. Die noch

fehlenden drei Partikularlösungen ergeben sich ähnlicherweise wie bei der Besselschen Differentialgleichung, mit Benützung der Frobeniusschen Regel. Die fehlenden Lösungen sind noch

$$\begin{aligned}
 U_4 &= -K_{q+1} + \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda K_{q+2}, & U_5 &= -K_{1-q} + \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda K_{2-q}, \\
 U_6 &= \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda K_{q+2}; \\
 V_4 &= -\frac{q+2-kq}{q-2k-kq} K_{q+1}, & V_5 &= -\frac{q-2-kq}{-q-2k+kq} K_{1-q}, \\
 V_6 &= -\frac{1-k}{-q+2k+kq} 2(q+1) K_{q+1}; \\
 W_4 &= -\frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda K_{q+1}, & W_5 &= -\frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda K_{1-q}, \\
 W_6 &= -\frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda K_{q+1} + K_q;
 \end{aligned} \tag{29}$$

dabei ist nach der üblichen Symbolik

$$\begin{aligned}
 I_{q+r} &= I_{q+r}(\lambda x) = e^{-\frac{1}{2}(q+r)\pi i} \cdot J_{(q+r)}(\lambda xi), \\
 K_{q+r} &= K_{q+r}(\lambda x) = e^{\frac{1}{2}(q+r)\pi i} \cdot G_{(q+r)}(\lambda xi).
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (18) sind damit gelöst. Endgültige Resultate für die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  sind

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_m \sum_n \left[ A_1 \left( I_{q+1} + \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda I_{q+2} \right) + \right. \\
 &+ A_4 \left( -K_{q+1} + \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda K_{q+2} \right) + A_2 \left( I_{1-q} + \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda I_{2-q} \right) + \\
 &+ A_5 \left( -K_{1-q} + \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda K_{2-q} \right) + A_3 \left( \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda I_{q+2} \right) + \\
 &\left. + A_6 \left( \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda K_{q+2} \right) \right] \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = \sum_m \sum_n \left[ A_1 \left( \frac{q+2-kq}{q-2k-kq} I_{q+1} \right) \right. \\
+ A_4 \left( -\frac{q+2-kq}{q-2k-kq} K_{q+1} \right) + A_2 \left( \frac{q-2-kq}{-q-2k+kq} I_{1-q} \right) \\
+ A_5 \left( -\frac{q-2-kq}{-q-2k+kq} K_{1-q} \right) + A_3 \left( \frac{1-k}{-q+2k+kq} \cdot 2(q+1) I_{q+1} \right) \\
\left. + A_6 \left( -\frac{1-k}{-q+2k+kq} \cdot 2(q+1) K_{q+1} \right) \right] \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = \sum_m \sum_n \left[ A_1 \left( \frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda I_{q+1} \right) + \right. \\
+ A_4 \left( -\frac{1-k}{q-2k-kq} x\lambda K_{q+1} \right) + A_2 \left( \frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda I_{1-q} \right) + \\
+ A_5 \left( -\frac{1-k}{-q-2k+kq} x\lambda K_{1-q} \right) + A_3 \left( \frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda I_{q+1} + I_q \right) + \\
\left. + A_6 \left( -\frac{1-k}{-q+2k+kq} x\lambda K_{q+1} + K_q \right) \right] \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten nur für die ersten Summen von (13). Die übrigen Resultate unterscheiden sich bloss durch das Vorzeichen. Die Tabelle I gibt den Überblick über die Lösungen für alle vier Summen.

Tabelle I

i		Erste Summe	Zweite Summe	Dritte Summe	Vierte Summe
$\rho_1$	U	+ U	+ U	+ U	+ U
und	V	+ V	+ V	- V	- V
$\rho_4$	W	+ W	- W	- W	+ W
$\rho_2$	U	+ U	+ V	+ U	+ U
und	V	+ V	+ V	- V	- V
$\rho_5$	W	+ W	- W	- W	+ W
$\rho_3$	U	+ U	- U	- U	+ U
und	V	+ V	- V	+ V	- V
$\rho_6$	W	+ W	+ W	+ W	+ W

#### 4. Bestimmung von Integrationskonstanten. Randbedingungen.

Die Integrationskonstanten  $A_s$  ( $s=1, 3, \dots, 6$ ) bestimmen wir aus den Bedingungen an den Oberflächen der Schale. Die Spannungen  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\varphi}$  und  $\tau_{rz}$  auf der oberen und unteren Berandung der Schale müssen im Gleichgewicht mit den dort angreifenden Kräften  $R$ ,  $\Phi$  und  $Z$  bzw.  $\bar{R}$ ,  $\bar{\Phi}$  und  $\bar{Z}$  sein. Wir sehen, dass die sechs Integrationskonstanten gerade ausreichen um allen Bedingungen auf den Oberflächen der Schale zu genügen. Mittels Deformationen und des Hookeschen Gesetzes lassen sich alle Spannungen in Verbindung mit Verschiebungen ausdrücken. Für die erste Summe von (13) sind diese

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( \frac{1}{a} \frac{dU_s}{dx} + \alpha \left\{ \frac{1}{a} \frac{dU_s}{dx} + \frac{1}{ax} U_s - \frac{q}{ax} V_s - \frac{\lambda}{a} W_s \right\} \right) \right] \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}, \\ \sigma_\varphi &= 2G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( -\frac{q}{ax} V_s + \frac{1}{ax} U_s + \alpha \left\{ \frac{1}{a} \frac{dU_s}{dx} + \frac{1}{ax} U_s - \frac{q}{ax} V_s - \frac{\lambda}{a} W_s \right\} \right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a},\end{aligned}\tag{31}$$

$$\sigma_z = 2G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( -\frac{\lambda}{a} W_s + \alpha \left\{ \frac{1}{a} \frac{dU_s}{dx} + \frac{1}{ax} U_s - \frac{q}{ax} V_s - \frac{\lambda}{a} W_s \right\} \right) \right] \sin q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a},$$

mit

$$\alpha = \frac{\nu}{1-2\nu},$$

und weiter

$$\begin{aligned}\tau_{z\varphi} &= G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( \frac{\lambda}{a} V_s + \frac{q}{xa} W_s \right) \right] \cos q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}, \\ \tau_{rz} &= G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( \frac{1}{a} \frac{dW_s}{dx} + \frac{\lambda}{a} U_s \right) \right] \sin q\varphi \cos \lambda \frac{z}{a}, \\ \tau_{r\varphi} &= G \sum_m \sum_n \left[ \sum_s A_s \left( \frac{q}{ax} U_s + \frac{1}{a} \frac{dV_s}{dx} - \frac{1}{ax} V_s \right) \right] \cos q\varphi \sin \lambda \frac{z}{a}.\end{aligned}\tag{31'}$$

Für die anderen drei Summen gelten ähnliche Ausdrücke. Aus Randbedingungen

$$\begin{aligned}(\sigma_r)x_1 &= R, & (\tau_{r\varphi})x_1 &= \Phi, & (\tau_{rz})x_1 &= Z; \\ (\sigma_r)x_2 &= \bar{R}, & (\tau_{r\varphi})x_2 &= \bar{\Phi}, & (\tau_{rz})x_2 &= \bar{Z},\end{aligned}\tag{32}$$

wo  $x_1 = 1 + \frac{h}{a}$  und  $x_2 = 1 - \frac{h}{a}$  ist und entsprechenden Gleichungen (31),

folgen nun folgende Bedingungsgleichungen für Integrationskonstanten

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{dU_s}{dx} + \alpha \left\{ \frac{dU_s}{dx} + \frac{1}{x} U_s - \frac{q}{x} V_s - \lambda W_s \right\} \right) \Big|_{x=x_1} &= \frac{a}{2G} R_{mn}, \\
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{dU_s}{dx} + \alpha \left\{ \frac{dU_s}{dx} + \frac{1}{x} U_s - \frac{q}{x} V_s - \lambda W_s \right\} \right) \Big|_{x=x_2} &= \frac{a}{2G} \bar{R}_{mn}, \\
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{q}{x} U_s + \frac{dV_s}{dx} - \frac{1}{x} V_s \right) \Big|_{x=x_1} &= \frac{a}{G} \Phi_{mn}, \\
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{q}{x} U_s + \frac{dV_s}{dx} - \frac{1}{x} V_s \right) \Big|_{x=x_2} &= \frac{a}{G} \bar{\Phi}_{mn}, \\
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{dW_s}{dx} + \lambda U_s \right) \Big|_{x=x_1} &= \frac{a}{G} Z_{mn}, \\
 \sum_{s=1}^6 A_s \left( \frac{dW_s}{dx} + \lambda U_s \right) \Big|_{x=x_2} &= \frac{a}{G} \bar{Z}_{mn}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Die Gleichungen (33) sind im Allgemeinen zwar etwas lang, sie werden jedoch in meisten Fällen der Praxis einfacher, da selten alle Belastungen gleichzeitig auftreten.

Nachdem wir alle Integrationskonstanten berechnet haben, können wir unseres Problem als gelöst betrachten, denn aus (30) bekommen wir die Verschiebungen, aus (31) aber die Spannungen. Die Schmittkräfte und Schnittmomente lassen sich auf übliche Weise angeben; zu bemerken ist noch, dass die Integration von Besselfunktionen, die hier auftreten, mit Benützung von bekannten Rekursionsformeln leicht durchführbar ist.

Mit der Wahl von Ansätzen (11) und (13) setzen wir voraus dass sich die Schale in Richtung  $z$  und  $\varphi$  periodisch fortsetzt. Ist die Schale geschlossen, so ist dies in der  $\varphi$ -Richtung immer der Fall, dagegen ist das in  $z$ -Richtung seltener. So werden die Randbedingungen für  $z=0$  und  $z=l$  nur dann streng erfüllt, wenn wir die Ansätze (11) und (13) so auswählen werden können, dass sie die dort auftretenden Bedingungen auch wirklich erfüllen.

In (30) ausgedrückte Lösungen für die Verschiebungen gelten auch für volle Zylinder; hier müssen wir wegen  $x_2=0$  und der damit auftretenden Singularität der Besselschen Funktion  $K_\nu(x\lambda)$  alle Lösungen mit  $K_\nu(x\lambda)$  streichen. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass bei *dünnen* Schalen die auftretende Reihen nur etwas schwächer konvergieren, sonst aber bleiben alle Lösungen gültig.

**5. Belastungsfälle.** Ausser der allgemeinen Lösung, die wir soeben angegeben haben, lohnt sich hier noch drei Sonderlösungen etwas näher zu erörtern. Diese Sonderlösungen, die wir kurz *Belastungsfälle* nennen wollen, und die besondere physikalische Deutung haben, sind

$$a) \quad q=0, \quad \lambda=0 ;$$

$$b) \quad q \neq 0, \quad \lambda=0 ;$$

$$c) \quad q=0, \quad \lambda \neq 0 .$$

a) *Belastungsfall*  $q=0, \lambda=0$ . Sind die Koeffizienten  $q$  und  $\lambda$ , die mit (12) gegeben sind, gleich Null, so müssen die äusseren Belastungen und die aus ihnen verursachten Verschiebungen solche sein, dass sie für jedes  $z$  und  $\varphi$  *konstant* bleiben. Solcher „Belastungsfall“ ist möglich unter anderem bei einer Zylinderschale, die unter innerem oder äusserem Überdruck steht. Die Lösungen für die Verschiebungen folgen entweder direkt aus den Gleichungen (16) indem wir alle Glieder mit  $q$  und  $\lambda$  streichen, oder aus der Fundamentalgleichung (21), wo wir noch für  $q$  Null setzen. Die Lösungen sind also

$$\begin{aligned} u &= A_1 x + A_4 x^{-1} , \\ v &= A_2 x + A_5 x^{-1} , \\ w &= A_3 + A_6 \ln x . \end{aligned} \tag{34}$$

b) *Belastungsfall*  $q \neq 0, \lambda = 0$ . Mit diesem Belastungsfall wo wir verlangen, dass sich die Belastungen sowie auch die Verschiebungen mit  $z$  nicht ändern, können wir runde Platten behandeln, die in der Richtung ihrer Ebene belastet sind. Streichen wir in dem allgemeinen Fall alle Glieder mit  $\lambda$ , so sieht man sofort, dass die Fundamentalgleichung (21) die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung für diesen Fall

ist. Für die Verschiebungen bekommen wir deshalb

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} x^{1+q} + A_{4m} x^{1-q} + A_{2m} x^{-1+q} + A_{5m} x^{-1-q}) \frac{\sin q\varphi}{\cos q\varphi}, \\
 v &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \mp \frac{2+q-kq}{2k-q+kq} A_{1m} x^{1+q} \mp \frac{-2+q-kq}{2k+q-kq} A_{4m} x^{1-q} \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm A_{2m} x^{-1+q} \mp A_{5m} x^{-1-q} \right) \frac{\sin q\varphi}{\cos q\varphi},
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{3m} x^q + A_{6m} x^{-q}) \frac{\sin q\varphi}{\cos q\varphi}.$$

Weitere Angaben über diesen Belastungsfall findet man ausführlich in der Literatur [1].

c) *Belastungsfall*  $q = 0, \lambda \neq 0$ . Ist die Schale so belastet und unterstützt, dass sich die Belastungen sowie auch die Verschiebungen in der Richtung  $\varphi$  nicht ändern, so muss  $q$  gleich Null sein und die Lösungen für  $u, v$  und  $w$  für die vierte Summe von (13) sind folgende

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_1 \left( I_1 - \frac{1-k}{2k} x \lambda I_2 \right) + A_4 \left( -K_1 - \frac{1-k}{2k} x \lambda K_2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + A_3 \left( \frac{1-k}{2k} x \lambda I_2 \right) + A_6 \left( \frac{1-k}{2k} x \lambda K_2 \right) \right] \sin \lambda \frac{z}{a}, \\
 w &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_1 \left( -\frac{1-k}{2k} x \lambda I_1 \right) + A_4 \left( +\frac{1-k}{2k} x \lambda K_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + A_3 \left( \frac{1-k}{2k} x \lambda I_1 + I_0 \right) + A_6 \left( -\frac{1-k}{2k} x \lambda K_1 + K_0 \right) \right] \cos \lambda \frac{z}{a}, \\
 v &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_2 \left( -\frac{1}{k} I_1 \right) + A_5 \left( \frac{1}{k} K_1 \right) \right] \cos \lambda \frac{z}{a}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Ähnliche Werte bekommen wir auch für die dritte Summe von (13). Solcher Belastungsfall liegt z. B. bei einem Zylinder vor, der stückweise mit Druck oder Zug belastet ist (siehe Beispiel), weiter bei einer Schale die auf reine Torsion belastet ist u. s. w.



**6. Beispiel.** Als Beispiel wollen wir ein Rohr, dessen Länge  $l = 4\pi a$  sei, wählen. Es ist in der Länge  $2c$  mit äusserem Druck  $p$  nach Abb. 2 gleichmässig an Umfange belastet. Die Enden  $z=0$  und  $z=l$  seien fest eingespannt. Da die Belastung  $p$  von  $q$  unabhängig ist und die Randbedingungen für  $z=0$  und  $z=l$

$$u=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

annehmen können, entwickeln wir die äussere Belastung  $p(z)$  in

$$p(z) = \frac{4p}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi d}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \lambda \frac{z}{a}$$

Wählen wir noch  $d = \frac{l}{2}$ , so sind die Fourierkoeffizienten

$$R_n = \frac{4p}{\pi} \frac{1}{n} (-1)^{(n-1)/2} \sin \frac{n\pi c}{l}$$

mit  $n=1, 3, 5, 7 \dots$

Ist das Rohr aus Eisenbeton mit  $\nu=0$ , so ist  $k=1$  und  $\alpha=0$  und die Bedingungsgleichungen (33) ergeben folgende Integrationskonstanten

$$A_{1n} = -\frac{a}{2G} R_n \cdot \frac{1}{B_n} \left[ \lambda K_0(x_2\lambda) + \frac{1}{x_2} K_1(x_2\lambda) \right],$$

$$A_{4n} = +\frac{a}{2G} R_n \cdot \frac{1}{B_n} \left[ \lambda I_0(x_2\lambda) - \frac{1}{x_2} I_1(x_2\lambda) \right],$$

$$A_{3n} = -A_{1n}, \quad A_{6n} = -A_{4n},$$

wo noch

$$B_n = \left[ \lambda I_0(x_1\lambda) - \frac{1}{x_1} I_1(x_1\lambda) \right] \cdot \left[ \lambda K_0(x_2\lambda) + \frac{1}{x_2} K_1(x_2\lambda) \right] - \left[ \lambda I_0(x_2\lambda) - \frac{1}{x_2} I_1(x_2\lambda) \right] \cdot \left[ \lambda K_0(x_1\lambda) + \frac{1}{x_1} K_1(x_1\lambda) \right]$$

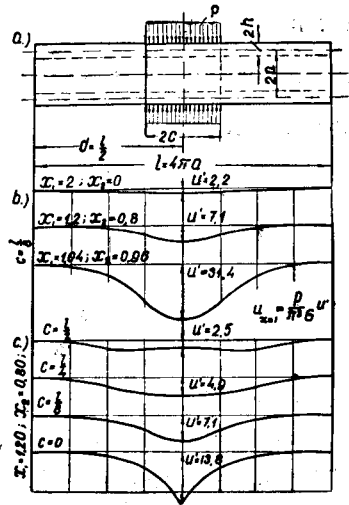


Abb. 2

ist. In Abb. 2b ist die Verschiebung  $u_{x=1}$  der Mittelfläche für drei charakteristische Stärken des Rohres dargestellt. Schliesslich stellt Abb. 2c Verschiebungen eines Rohres, dessen Stärke  $2h=2a/5$  ist, für verschiedene Ausbreitungen von Belastung  $P = 2cp$  ( $c = \frac{l}{2}$ ,  $c = \frac{l}{4}$ ,  $c = \frac{l}{8}$  und die Punktbelastung) vor.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. B. Biezeno und R. Grammel — Technische Dynamik. Springer 1939.
- [2] J. Horn — Gewöhnliche Differentialgleichungen. G. J. Göschensverlag, Leipzig 1927.
- [3] L. C. Leibenzon — Kurs teoriji uprugosti. Moskva 1947
- [4] G. N. Watson — A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1944.
- [5] S. Woinowsky-Krieger — Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten. *Ing. Arch.* IV/3, 1933.