EIN BEITRAG ZUR STABILITÄT DER GLEICHMÄSSIG GEDRÜCKTEN RECHTECKPLATTE MIT STEIFENKREUZ

von

Ing MIODRAG MILOSAVLJEVIĆ (Beograd)

Für eine gedrückte dünne Platte, durch ein in beliebiger Lage rechtwinkliges Steifenkreuz versteift, hat Dr Ing. H. Fröhlich [**1**] die Beulbedingung nach dem Energieverfahren aufgestellt.

In der vorliegenden Schrift wird die Beulbedingung für dasselbe Problem auf Grund der Differentialgleichung der ausgebeulten Platte gegeben. Dabei ist die Annahme gemacht, dass auch die Längssteife die Druckkräfte überträgt.

Ableitung der Beulbedingung

Eine rechteckige dünne Platte, allseitig drehbar gelagert, mit dem Seitenverhältnis $\alpha = a/b$, ist an den Rändern $x=0$ und $x=a$ durch gleichmässigen, in ihrer Mittelebene wirkenden Druck p belastet.

Es ist vorausgesetzt, dass die Platte aus homogenem und isotropem Baustoff ist und dass das Hookesche Gesetz unbeschränkt gilt.

Die Platte ist durch eine Längssteife mit der Biegungssteifigkeit EJ_a und der Querschnittsfläche F_a und durch eine Quersteife mit der Biegungssteifigkeit EJ_b ausgesteift nach Abb. 1.

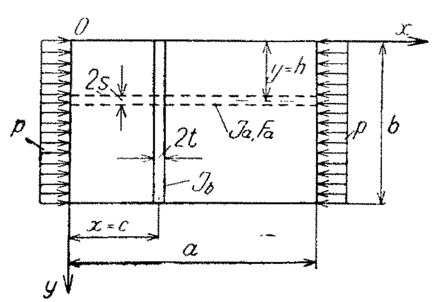

Abb. 1

Die Steifen und die Platte sind so miteinander verbunden, dass sie gleiche Durchbiegungen beim Ausbeulen haben.

Die Beulfläche der Platte wird durch die trigonometrische Doppelreihe

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{1}$$

dargestellt, die beide Randbedingungen für die allseitig gelenkig gelagerte Platte erfüllen:

$$w = 0 \text{ für alle vier Ränder und}$$

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\,,$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{y=0\\y=b}} = 0\,.$$

Der Steifeneinfluss auf die Stabilität der gedrückten Platte wird so eingeführt, dass die Steifen als Balken gehalten werden, welche sich durch ihre Biegungssteifigkeit der Ausbeulung der Platte entgegenstellen.

Man bezeichnet mit q_a und q_b die verteilte Belastung auf die Flächeneinheit, mit welcher die Steifen die Platte bei der Ausbeulung belasten.

Wenn wir mit $2s$ und $2t$ die Weite der Steifen und mit δ die Plattendicke bezeichnen, so können wir folgende Differentialbeziehungen für die Steifen, als Balken gehalten, aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} EJ_a \frac{d^4(w)_{y=h}}{dx^4} &= q_a 2s - F_a \frac{p}{\delta} \cdot \frac{d^2(w)_{y=h}}{dx^2} \\ EJ_b \frac{d^4(w)_{x=c}}{dy^4} &= q_b 2t\ . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Querbelastung der Platte von dem Steifeneinfluss kann man auch durch die trigonometrische Doppelreihe

$$q = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{3}$$

darstellen.

Die Beiwerte C_{mn} werden durch die Multiplikation der Gl. (3) mit dem Faktor $\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ und durch ihre Integration nach x und y zwischen den Grenzen von 0 bis a, bzw. von 0 bis b, bestimmt. Dabei sind i und j beliebige ganze Zahlen.

Daraus folgt

$$C_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{ab} \left[\int_0^a \int_{h-s}^{h+s} q_a \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy + \int_{c-t}^{c+t} \int_0^b q_b \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy \right] . \tag{4}$$

Setzt man die Werte q_a und q_b aus der Gl. (2) in die Gl. (4) ein, so erhält man

$$C_{ij} = \frac{2\pi^2 i^2}{a^2 b} \left(\frac{EJ_a \pi^2 i^2}{a^2} - \frac{F_a p}{\delta} \right) \sin \frac{j\pi h}{b} \sum_n A_{in} \sin \frac{n\pi h}{b} +$$

$$+ \frac{2EJ_b \pi^4 j^4}{ab^4} \sin \frac{i\pi c}{a} \sum_m A_{mj} \sin \frac{m\pi c}{a}, \tag{4a}$$

dabei sind $\sin \frac{i\pi t}{a}$ und $\sin \frac{j\pi s}{b}$ durch $\frac{i\pi t}{a}$ und $\frac{j\pi s}{b}$ ersetzt, was zulässig ist, wenn t und s nach Null streben und wenn für i und j nur kleine Werte verwertet werden.

Nachdem i, j, m und n beliebige ganze Zahlen sind, kann man sie permutieren und dann erhalten wir für die Belastung q folgenden Ausdruck:

$$q = \frac{2\,EJ_a\,\pi^4}{a^4 b} \sum_m \sum_n \sum_j A_{mj}\, m^4 \sin\frac{n\pi h}{b} \sin\frac{j\pi h}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} -$$

$$- \frac{2\,F_a\, p\pi^2}{a^2 b\delta} \sum_m \sum_n \sum_j A_{mj}\, m^2 \sin\frac{n\pi h}{b} \sin\frac{j\pi h}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{2\,EJ_b\,\pi^4}{ab^4} \sum_m \sum_n \sum_i A_{in}\, n^4 \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{i\pi c}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\ . \qquad (5)$$

Die Platte ist durch Querbelastung q und durch den gleichmässigen Druck p gleichzeitig belastet. Für diesen Fall der Belastung lautet die Differentialgleichung der Platte

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -q - p\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ . \qquad (6)$$

Dabei sind:

$D = \dfrac{E\,\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$ – die Steifigkeit der Platte,

w – die Ausbiegung der Plafte an beliebigem Punkte (x, y).

Setzt man die Ableitungen von w aus der Gl. (1) und den Ausdruck für q in die Gl. (6) ein, und gleicht man die Beiwerte in den erhaltenen trigonometrischen Reihen neben dem Faktor $\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ aus, so erhält man die Gleichung

$$D\,A_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 + \frac{2\,EJ_b\,\pi^4 n^4}{ab^4} \sin\frac{m\pi c}{a} \sum_i A_{in} \sin\frac{i\pi c}{a} +$$

$$+ \frac{2\,\pi^2 m^2}{a^2 b}\left(\frac{EJ_a\,\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{F_a\cdot p}{\delta}\right) \sin\frac{n\pi h}{b} \sum_j A_{mj} \sin\frac{j\pi h}{b} - pA_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = 0\ . \qquad (7)$$

Bezeichnet man abkürzend folgende Verhältnisse:

$$\gamma_a = \frac{EJ_a}{bD}, \quad \gamma_b = \frac{EJ_b}{bD}, \quad \delta_a = \frac{F_a}{b\delta}, \quad \xi = \frac{c}{a}, \quad \eta = \frac{h}{b},$$

$$p_k = \sigma_k \delta, \quad \sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 \delta} \text{ und } k = \frac{\sigma_k}{\sigma_e},$$

wo p_k = kritische Druckbelastung beim Ausbeulen der Platte,

σ_k = „ Druckspannung „ „ „ „ ,

σ_e = „Eulerspannung“ eines Druckstabes von der Länge b und der Dicke δ;

k = Beulwert,

so erhält man die Gl. (7) in folgender Form

$$\begin{aligned} A_{mn}\left[(m^2+n^2\alpha^2)^2 - k\alpha^2 m^2\right] + 2\gamma_b \alpha^3 n^4 \sin m\pi\xi \sum_i A_{in} \sin i\pi\xi + \\ + 2m^2(\gamma_a m^2 - k\alpha^2\delta) \sin n\pi\eta \sum_j A_{mj} \sin j\pi\eta = 0. \end{aligned} \tag{7a}$$

Wird hierin der Reihe nach

$$m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

eingesetzt, so ergibt sich ein System von ∞ linearen Gleichungen, die in Bezug auf A_{mn} homogen sind.

Aus diesen Gleichungen erhält man nur dann von Null verschiedene Werte von A_{mn}, also Ausbeulungen, wenn ihre Determinante Null wird. Diese Determinante Δ stellt die Beulbedingung

$$\Delta(\alpha, k, \gamma_a, \gamma_b \delta_a,) = 0 \tag{8}$$

dar.

Bei gegebenen Steifigkeiten γ_a, γ_b und für ein bestimmtes Seitenverhältnis $\alpha = a/b$ kann aus Gl. (8) der niedrigste Beulwert k der Platte als kleinste reelle Wurzel berechnet werden.

Ebenso können bei gegebenem Beulwert k die zugehörigen Steifigkeiten als grösste reelle Wurzel der Gl. (8) bestimmt werden.

Die Gleichung (7a) stimmt vollkommen mit den nach der Energiemethode erhaltenen Ergebnissen von Dr. Ing. Fröhlich [1].

LITERATUR

[1] Dr Ing. H. Fröhlich — Stabilität der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte mit Steifenkrenz. *Bauingenieur,* 1937, S. 673.