EINE BEMERKUNG ZU DEN GLEICHUNGEN VON BELTRAMI-MICHELL

von

T. P. ANGELITCH (Beograd)

In folgenden Ausführungen bedeutet:

ρ — die Dichte,

X^i, X_i — die kontravarianten bzw. kovarianten Komponenten der äusseren Kräfte,

λ, μ — die Laméschen Elastizitätskoeffizienten,

E, $\varkappa$ — den Youngschen Modul und die Poissonsche Konstante,

g_{ij} — den metrischen Tensor des dreidimensionalen Euklidischen Raumes,

σ — die skalare Invariante des Deformationstensors σ_{ij} (die kubische Dilatation),

θ — die skalare Invariante des Spannungstensors θ_{ij},

u^i — die kontravarianten Komponenten des Verschiebungsvektors,

R^l_{ijk} — den Riemann-Christoffelschen Tensor.

Wir gehen von der Gleichung

$$\rho X^i + (\lambda+\mu)\, g^{ij}\, \sigma,_j + \mu\, \Delta\, u^i = 0 \tag{1}$$

aus, die, wie leicht ersichtlich, auch in der Form

$$\rho X_i + (\lambda+\mu)\, \sigma,_i + \mu\, \Delta\, u_i = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Dabei bedeutet

$$\Delta\, u^i = u^{i,j}{}_{,j} \tag{3}$$

$$u^{i,j} = g^{kj}\, u^i{}_{,k} \quad ,$$

während

$$u^{j,i}{}_{,j} = (g^{ik}\, u^j{}_{,k})_{,j} = g^{ik}\, u^j{}_{,kj} = g^{ik}\, u^j{}_{,jk} =$$

$$= g^{ij}\, u^k{}_{,kj} = g^{ij}\, \sigma\, ,_j$$

ist, weil

$$\sigma = \sigma^i_i = u^i{}_{,i} \quad ,$$

und da für den Euklidischen Raum immer

$$u^k{}_{,jk} - u^k{}_{,kj} = u^l R^k{}_{ljk} = 0,$$

so wird

$$u^k{}_{,jk} = u^k{}_{,kj}.$$

Die Gleichung (1) bzw. (2) ist, wie bekannt, die Gleichgewichtsbedingung eines ideal elastischen Körpers, welcher auch als homogen und isotrop vorausgesetzt wird.

Nun, stellen wir uns die Frage auf: wie wird diese Gleichung für den Fall der direkten Beziehung der Spannungen und der gegebenen äusseren Kräfte im allgemeinsten Falle und unabhängig von der Wahl der Koordinaten aussehen? Dazu ist, selbst im Falle des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, eine eigenartige Transformation der gegebenen Gleichung (1) bzw. (2) notwendig, die, meines Wissens, bis jetzt noch nirgends durchgeführt wurde. Diese Darstellung kann andererseits auch dazu verhelfen um, wenn einmal die Fragen der Elastizitätstheorie eines allgemeinen Riemannschen Kontinuums klargelegt werden, eine leichte Verallgemeinerung dieser Gleichungen für einen solchen allgemeinen Raum durchzuführen.

Um das gestellte Ziel zu erreichen, differenzieren wir die Gleichung (1) kovariant nach x^k. Wenn man dann (3) berücksichtigt, bekommt man

$$\rho X^i{}_{,k} + (\lambda + \mu) g^{ij} \sigma_{,jk} + \mu u^{i,j}{}_{,jk} = 0. \tag{4}$$

Durch einfache Vertauschung von freien Indizes i und k erhält man aus dieser folgende Gleichung

$$\rho X^k{}_{,i} + (\lambda + \mu) g^{kj} \sigma_{,ji} + \mu u^{k,j}{}_{,ji} = 0. \tag{5}$$

Endlich durch Addition der Gleichungen (4) und (5) erhalten wir die Gleichung

$$\rho (X^i{}_{,k} + X^k{}_{,i}) + (\lambda + \mu)(g^{ij} \sigma_{,jk} + g^{kj} \sigma_{,ji}) + \mu (u^{i,j}{}_{,jk} + u^{k,j}{}_{,ji}) = 0. \tag{6}$$

In dieser Gleichung ersetzen wir nun die Laméschen Elastizitätskoeffizienten λ und μ durch den Youngschen Modul E und die Poissonsche Konstante $\varkappa$ und führen an Stelle der skalaren Invariante σ des Deformationstensors die skalare Invariante θ des Spannungstensors, welche auf Grund des Hookeschen Gesetzes durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{1 - 2\varkappa}{E} \theta \tag{7}$$

miteinander verbunden sind, ein. Dann bekommt die Gleichung die Form

$$\rho (X^i{}_{,k} + X^k{}_{,i}) + \frac{1}{2(1+\varkappa)} (g^{ij} \theta_{,jk} + g^{kj} \theta_{,ji}) + \frac{E}{2(1+\varkappa)} (u^{i,j}{}_{,jk} + u^{k,j}{}_{,ji}) = 0. \tag{8}$$

Im Euklidischen Raum ist aber immer

$$u^{i,j}{}_{,jk}=u^{i,j}{}_{,kj}=\Delta\, u^{i}{}_{,k}$$

$$u^{k,j}{}_{,ji}=u^{k,j}{}_{,ji}=\Delta\, u^{k}{}_{,i}$$

d. h.

$$u^{i,j}{}_{,jk}+u^{k,j}{}_{,ji}=\Delta\,(u^{i}{}_{,k}+u^{k}{}_{,i})=2\,\Delta\,\sigma^{i}_{k}=\frac{2}{E}\,\{(1+\varkappa)\,\theta^{i,j}{}_{k,j}-\varkappa\,\delta^{i}_{k}\,\Delta\,\theta\}\,,$$

was leicht zu prüfen ist.

Dabei bedeutet

$$\Delta\,\theta=\theta^{,j}{}_{,j}\,;\qquad \delta^{i}_{k}=\begin{cases}1 & \text{für } i=k\\ 0 & \text{für } i\neq k.\end{cases}$$

Auf Grund dieser Ausführungen lässt sich die Gleichung (8) wie folgt schreiben:

$$\rho(X^{i}{}_{,k}+X^{k}{}_{,i})+\frac{1}{2\,(1+\varkappa)}(\theta^{,i}{}_{,k}+\theta^{,k}{}_{,i})+\theta^{i,j}{}_{k,j}-\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\delta^{i}_{k}\,\Delta\,\theta=0\,. \tag{9}$$

Durch diese Form der Gleichung wäre die gestellte Aufgabe eigentlich schon gelöst, denn die gesuchten Beziehungen zwischen den Komponenten der äusseren Kräfte und des Spannungstensors sind in der allgemeinsten Form aufgestellt worden. Um aber unsere Gleichung der üblichen Grundform, die in der Technik benutzt wird, anzupassen, führen wir in der Gleichung (4) die Kontraktion nach i und k durch, und da für den Euklidischen Raum immer

$$\sigma_{,ij}=\sigma_{,ji}$$

gilt, so folgt

$$\rho\, X^{i}{}_{,i}+(\lambda+\mu)\, g^{ij}\,\sigma_{,ij}+\mu\, u^{i,j}{}_{,ij}=0\,. \tag{10}$$

Wenn man noch berücksichtigt dass

$$u^{i,j}{}_{,ij}=\Delta\, u^{i}{}_{,i}=\Delta\,\sigma$$

ist, lässt sich die obige Gleichung auch in der Form

$$\rho\, X^{i}{}_{,i}+(\lambda+\mu)\, g^{ij}\,\sigma_{,ij}+\mu\,\Delta\,\sigma=0 \tag{11}$$

ausdrücken. Nun, ist es weiter

$$g^{ij}\,\sigma_{,jk}=\sigma^{,i}{}_{,k}$$

und daher

$$g^{ij}\,\sigma_{,ij}=\sigma^{,i}{}_{,i}=\Delta\,\sigma\,,$$

wodurch sich die Gleichung (11) auf

$$\rho\, X^{i}{}_{,i}+(\lambda+2\,\mu)\,\Delta\,\sigma=0 \tag{12}$$

reduziert. Ersetzt man hier σ durch θ aus der Gleichung (7) und ebenso λ, μ durch E, $\varkappa$, so bekommt man

$$\rho\, X^{i}{}_{,i}+\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\,\Delta\,\theta=0,$$

woraus sich

$$\Delta\,\theta = -\rho\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\,X^{i}{}_{,i}$$

ergibt.

Wenn dieser Wert für $\Delta\,\theta$ in die Gleichung (9) eingesetzt wird, so folgt endlich

$$\rho\,(X^{i}{}_{,k} + X^{k}{}_{,i}) + \frac{1}{2\,(1+\varkappa)}\,(\theta^{,i}{}_{,k} + \theta^{,k}{}_{,i}) + \Delta\,\theta^{i}_{k} + \rho\,\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\,\delta^{i}_{k}\,X^{j}{}_{,j} = 0 \qquad (13)$$

wobei

$$\Delta\,\theta^{i}_{k} = \theta^{i,j}{}_{k,j}$$

ist.

Die Gleichung (13) gibt in der allgemeinsten Form kondensiert die sogenannten Beltrami-Michellschen Gleichungen.