ÜBER DIE EIGENFUNKTIONEN DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG

von

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

Sei S ein offenes und beschränktes Gebiet des k-dimensionalen Euklidischen Raumes und S' der Rand von S; S' sei regulär. Es bezeichne $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdot\ \cdot\ \cdot < \lambda_n \to \infty$ die Eigenwerte und $\Phi_1(P)$, $\Phi_2(P), \ldots$ die Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$\Delta U + \lambda U = 0 \text{ innerhalb } S \text{ und } U = 0 \text{ längs } S'.$$

Dabei ist $\Delta = \sum_1^k \partial^2/\partial x_i^2$ und P, ebenso wie nachher Q, ein Punkt aus S.

Die Herren T. Carleman[1] und S. Minakshisundaram[2] haben bewiesen dass

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqq \lambda} \Phi_n^2(P) = C_k \lambda^{k/2} + o(\lambda^{k/2})$$

und im Falle $P \neq Q$ dass

$$I(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqq \lambda} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q) = o(\lambda^{k/2})$$

ist. Dabei ist

$$C_k = 1/(2\pi)^k \Gamma(k/2+1).$$

Diese asymptotische Formeln folgen aus der von Herrn S. Minakshisundaram bewiesenen Ungleichung: für jedes Q aus S ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)\, e^{-\lambda_n t} - \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^k} e^{-r_{PQ}^2/4t} = O(e^{-l_P^2/4t}), \text{ wenn } t \to 0$$

(dabei ist r_{PQ} die Entfernung der Punkte P und Q und $l_P = \operatorname{Min} r_{PQ}$ wenn $Q \in S'$) und dem bekannten Hardy-Littlewoodschen Satz Tauberscher Art.

---

[1]) Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen, Stockholm (1934), 34—44.

[2]) Canadian Journal of Math. vol. 1 (1949), 320—327.

Im folgenden beweise ich dass

$$E(\lambda) = C_k \lambda^{k/2} + O(\lambda^{\frac{k-1}{2}}) \quad \text{und} \quad I(\lambda) = O(\lambda^{\frac{k-1}{2}}) \tag{I}$$

ist. Diesem Zwecke dient der

Satz A: *Sei $A(u)$ von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und*

$$L(t) = t\int_0^\infty e^{-tu} A(u)\,du \quad \textit{konvergent für} \quad t > 0.$$

Wenn $L(t)$ der Bedingung

$$L(t) = O(e^{-a/t}), \ \textit{wenn} \ t \to 0$$

mit $a > 0$ und $A(u)$ der Bedingung

$$A(v) - A(u) > -mu^{\frac{k-1}{2}} \quad \textit{für jedes} \ u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

genügt, so ist

$$A(u) = O(u^{\frac{k-1}{2}}), \ \textit{wenn} \ u \to \infty.$$

Der Beweis dieses Satzes läuft analog demjenigen des Satzes B meiner Note *„Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman"* (Math. Zeit. 53 **1** (1950) S. 53—58).

Wird im Satze A

$$A(u) = A(u; P, Q) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) - \frac{1}{(2\,r_{PQ})^{k/2}} J_{k/2}(r_{PQ}\sqrt{u})\,u^{k/4}$$

gesetzt, so ist wegen der für $P = Q$ gültigen Gleichung

$$\frac{1}{(2\,r_{PQ})^{k/2}} J_{k/2}(r_{PQ}\sqrt{u})\,u^{k/4} = C_k\,u^{k/2},$$

für $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$

$$A(v; P, P) - A(u; P, P) \geqslant -C_k(v^{k/2} - u^{k/2}) \geqslant -mu^{\frac{k-1}{2}}$$

woraus sich im Zusammenhang mit Satz A der erste Teil der Behauptung ergibt.

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus Satz A und der eben bewiesenen Ungleichung für $E(\lambda)$.

Die Ungleichungen (I) kann man nicht verschärfen. Der Fall $k = 1$ ist trivial; im Falle $k \geqslant 2$ liefert die zu der k-dimensionalen Einheitskugel S gehörige Randwertaufgabe das gewünschte Beispiel.