ZWEI ABELSCHE SÄTZE

von

KONRAD KNOPP

1. Im folgenden werden die Beweise zweier Abelscher Sätze erbracht, die sich in der bisherigen Literatur noch nicht zu finden scheinen, obwohl die entsprechenden Tauberschen Sätze seit langem bekannt sind[1]. Herr K. L. Chung machte mich auf diese Lücke in der Literatur aufmerksam. Von dem ersten der beiden Sätze steht eine sozusagen duale Formulierung in dem Werke von Herrn G. Doetsch;[2] doch übergeht der nur auf wenigen Zeilen angedeutete Beweis die Hauptschwierigkeit, nämlich die Behandlung der unten mit I und III bezeichneten Teilintegrale. Den dargestellten Beweis gab ich in einer Vorlesung im Winter 1947/48. Der zweite Satz lässt sich leicht aus dem ersten folgern.

In diesen Sätzen soll $L(t)$ eine sich langsam ändernde Funktion (Definition s. u.) und $s(t)$ eine für $t \geqq 0$ erklärte, in jedem endlichen Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ messbare und beschränkte Funktion bedeuten. Sie lauten dann:

Satz I. *Ist $L(t)$ langsam sich ändernd, $\alpha > -1$, wird $t^{\alpha} L(t) = R(t)$ gesetzt und ist für $t \to \infty$*

$$s(t) \cong s \cdot R(t)^{3)}, \tag{1}$$

so ist für $y \to \infty$

$$\sigma(y) = \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{y}} s(t)\, dt \cong s \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot R(y). \tag{2}$$

---

[1] J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze, Math. Zeitschr. *33* (1931), 294—299., sowie: Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche Laplacesche nnd Stieltjessche Transformationen betreffen, Journ. f. d. r. u. a. Math *164* (1931), 27—39.

[2] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 202.

[3] $f(x) \cong s \cdot g(x)$ für $x \to \xi$ soll bedeuten, dass dabei $f(x)/g(x) \to s$ strebt, — auch für $s = 0$.

Satz II. *Ist bei der gleichen Bedeutung von* $R(t)$ *für* $n \to \infty$

$$s_n \cong s \cdot R(n), \tag{3}$$

so ist für $x \to 1-0$

$$\sigma(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_n x^n \cong s \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot R(n). \tag{4}$$

2. Eine für $t \geqq 0$ erklärte und dort stetige und positive Funktion $L(t)$ heisst im Anschluss an Herrn J. Karamata[4] langsam sich ändernd, wenn für jedes feste $u > 0$ bei $x \to \infty$

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1 \tag{5}$$

strebt. Die Klasse dieser Funktionen ist, wie Herr Karamata a. a. O. gezeigt hat, identisch mit der Klasse der Funktionen $L(t)$, die für $t \geqq 0$ in der Form

$$L(t) = C \cdot c(t) \cdot \exp \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau \tag{6}$$

mit $C > 0$, stetigem und positivem $c(t) \to 1$ und stetigem $\varepsilon(t) \to 0$ dargestellt werden können. Zu ihnen gehören insbesondere diejenigen für $t \geqq 0$ stetigen und positiven Funktionen, die für alle hinreichend grossen t mit einer der Funktionen

$$c \log^\alpha t \quad (c > 0, \quad \alpha \text{ reel}), \quad c \log_2{}^\alpha t, \ldots$$

oder mit Produkten von diesen zusammenfallen. Sie besitzen u. a. die folgenden Eigenschaften:

a) *Ist* $L_1(t)$ *für* $t \geqq 0$ *stetig und positiv und ist* $L_1(t) \cong L(t)$ *für* $t \to \infty$, *so ist auch* $L_1(t)$ *langsam sich ändernd.*

b) *Ist* $0 < u_1 < u_2$ *so gilt* (5) *gleichmässig für alle* u *in* $u_1 \leqq u \leqq u_2$.

c) *Ist* $\gamma > 0$, *so streht* $t^\gamma L(t) \to \infty$, $t^{-\gamma} L(t) \to 0$ *für* $t \to \infty$.

d) *Ist* $\gamma > 0$ *und wird für* $x \geqq 1$

$$L_1(x) = x^{-\gamma} . \max_{0 \leqq t \leqq x} \{t^\gamma L(t)\}, \quad L_2(x) = x^\gamma . \max_{t \geqq x} \{t^{-\gamma} L(t)\}$$

gesetzt, so gilt für die Funktionen $L_i(x)$, $(i=1,2)$, *die offenbar für* $x \geqq 1$ *stetig und positiv sind,* $L_i(x) \cong L(x)$ *für* $x \to \infty$. Daher ist auch $L_i(x)$

[4]) J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière, Mathematica *4* (1930), 38—53.

langsam sich ändernd, wenn es in $0 \leqq x \leqq 1$ so erklärt wird, dass es für alle $x \geqq 0$ stetig und positiv ist[5].

3. Beweis des Satzes I. Für $t > 0$ setzen wir $s(t) = R(t) \cdot \bar{s}(t)$, so dass $\bar{s}(t) \to s$ für $t \to \infty$. Wird zur Abkürzung noch $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma$ gesetzt, so bedeutet die Behauptung (2), dass für die Integraltransformation

$$\int_0^\infty a(x, t)\, \bar{s}(t)\, dt = \sigma(x)$$

mit der Vermittlungsfunktion

$$a(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}} R(t)}{\Gamma \cdot x \cdot R(x)}$$

die Beziehung

$$\sigma(x) \to s \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

gilt. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $t_0 > 0$ so, dass

$$|\, s(t) - \bar{s}\,| < \varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq t_0.$$

Dann ist, wenn noch die „Zeilensumen"

$$\int_0^\infty a(x, t)\, dt = A(x)$$

gesetzt werden,

$$\sigma(x) - s \cdot A(x) = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^\infty a(x, t)(\bar{s}(t) - s)\, dt$$

und man erkennt, dass es genügt, zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty |\, a(x, t)\,|\, dt \leqq M \quad \text{für alle } x > 0, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty a(x, t)\, dt = A(x) \to 1 \quad \text{für } x \to \infty, \tag{9}$$

---

[5]) Die Beweise aller dieser Tatsachen ergeben sich sehr leicht aus der Darstellung (6). Nur dass eine solche Darstellung allein auf Grund von (5) möglich ist, ist weniger leicht zu zeigen. Nimmt man umgekehrt (6) als Definition der sich langsam ändernden Funktionen, so sind (5) und die Eigenschaften a) bis d) leichte Folgerungen.

$$\int_0^{t_0} a(x,t)\,dt \to 0, \tag{10a}$$

$$\int_0^{t_0} a(x,t)\,\bar{s}(t)\,dt \to 0^{6)} \tag{10b}$$

für $x \to \infty$.

Nun bedeutet (10a), dass

$$\frac{1}{\Gamma \cdot x^{\alpha+1} \cdot L(x)} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{x}} R(t)\,dt \to 0 \tag{11}$$

geht für $x \to \infty$. Da aber das Integral

$$\leqq \int_0^{t_0} R(t)\,dt = K_1$$

ist für alle $x > 0$, so ergibt sich (11) aus $\alpha+1 > 0$ und 2c. (10b) bedeutet, dass

$$\frac{1}{x} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{x}} s(t)\,dt \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0,$$

— was unmittelbar klar, weil $s(t)$ in $0 \leqq t \leqq t_0$ beschränkt angenommen wurde.

Da schliesslich, wegen $a(x,t) \geqq 0$, (8) eine Folge von (9) ist, bleibt (9) allein zu beweisen. Ist aber $\varepsilon > 0$ gegeben und ein festes γ in $0 < \gamma < \alpha+1$ gewählt, so lassen sich δ und T so bestimmen, dass

$$0 < \delta < 1 < T$$

und

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\int_0^{\delta} + \int_T^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha}\,dt\right) = \eta(\delta, T)) < \varepsilon, \tag{12}$$

$$c_0\,\delta^{\alpha+1} < \varepsilon \quad \text{mit} \quad c_0 = \frac{1}{\Gamma \cdot (\alpha - \gamma + 1)}, \tag{13}$$

$$\frac{K}{\Gamma} e^{-T}\, T^{\alpha} < \varepsilon, \tag{14}$$

---

[6]) $\bar{s}(t)$ braucht in der Nahe von 0 nicht beschränkt zu sein.

ist, wobei K eine später erklärte, aber nur von α und γ abhängige Konstante bedeuten soll. Dann ist das Integral in (9)

$$=\frac{1}{\Gamma\cdot L(x)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^\alpha\,L(xt)\,dt=\frac{1}{\Gamma\cdot L(x)}\left[\int_0^\delta+\int_\delta^T+\int_T^\infty\right]=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.$$

Hierin ist

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\Gamma}\int_\delta^T e^{-t}\,t^\alpha\,\frac{L(xt)}{L(x)}\,dt.$$

Da nun $L(xt)/L(x)$ für alle t in $\delta\leqq t\leqq T$ gleichmassig $\to 1$ strebt für $x\to\infty$, so strebt offenbar $\mathrm{II}-1\to\eta(\delta,T)$ und es ist daher

$$|\,\mathrm{II}-1\,|<2\varepsilon \tag{15}$$

für alle hinreichend grossen x.

Weiter ist

$$\mathrm{I}\leqq\frac{1}{\Gamma\cdot L(x)}\int_0^\delta t^\alpha\,L(xt)\,dt=\frac{1}{\Gamma\cdot L(x)}\int_0^\delta t^\alpha\,(xt)^{-\gamma}\left\{(xt)^\gamma\,L(xt)\right\}dt$$

$$\leqq\frac{x^{-\gamma}}{\Gamma\cdot L(x)}(x\delta)^\gamma\,L_1(x\delta)\cdot\int_0^\delta t^{\alpha-\gamma}\,dt\leqq\frac{\delta^\gamma}{\Gamma}\cdot\frac{\delta^{\alpha-\gamma+1}}{\alpha-\gamma+1}\cdot\frac{L_1(x\delta)}{L(x)}\to c_0\,\delta^{\alpha+1}.$$

Für alle hinreichend grossen x ist also nach (13)

$$\mathrm{I}<2\varepsilon. \tag{16}$$

Schliesslich ist

$$\mathrm{III}=\frac{1}{\Gamma\cdot L(x)}\int_T^\infty e^{-t}\,t^\alpha\,L(xt)\,dt=\frac{x^\gamma}{\Gamma\cdot L(x)}\int_T^\infty e^{-t}\,t^{\alpha+\gamma}\left\{(xt)^{-\gamma}\,L(xt)\right\}dt$$

$$\leqq\frac{x^\gamma}{\Gamma\cdot L(x)}\cdot\frac{L_2(xT)}{(xT)^\gamma}\int_T^\infty e^{-t}\,t^{\alpha+\gamma}\,dt.$$

Hierin ist aber

$$\int_T^\infty e^{-t}\,t^{\alpha+\gamma}\,dt=e^{-T}\;T^{\alpha+\gamma}\int_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{t}{T}\right)^{\alpha+\gamma}dt$$

und

$$\left(1+\frac{t}{T}\right)^{\alpha+\gamma} \leqq (1+t)^{\mu}, \quad \mu = \text{Max } (0, \alpha+\gamma).$$

Daher ist das letzte Integral

$$\leqq K = \int_0^\infty e^{-t} (1+t)^{\mu} \, dt$$

und folglich

$$\text{III} \leqq \frac{K}{\Gamma} \cdot \frac{L_2(x\,T)}{L(x)} e^{-T} T^{\alpha} \to \frac{K}{\Gamma} e^{-T} T^{\alpha}.$$

Nach (14) ist also für alle hinreichend grossen x

$$\text{III} < 2\,\varepsilon. \tag{17}$$

Durch (15), (16), (17) ist aber der Beweis von (2) und damit der des Satzes I vollendet.

4. Satz II ist eine einfache Folgerung aus Satz I. Erfüllt nämlich die Folge $\{s_\nu\}$ die Voraussetzung (3), so erfüllt die Funktion

$$s(t) = s_\nu \quad \text{in} \quad \nu \leqq t < \nu + t, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

offenbar die Voraussetzung (1). Es gilt also (2), was nun bedeutet, dass

$$\sigma(y) = (1 - e^{-\frac{1}{y}}) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu e^{-\frac{\nu}{y}} \cong s \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot R(y) \tag{18}$$

ist. Setzt man $e^{-\frac{1}{y}} = x$, so strebt $x \to 1-0$ für $y \to \infty$ und es ist

$$(1 - e^{-\frac{1}{\nu}}) \cong \frac{1}{y} \cong (1-x).$$

Daher liefert (18) genau die Behauptung (4), da offenbar

$$R(y) \cong R\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

ist.