SUR CERTAINS DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES AVEC APPLICATION AUX POLYNOMES DE LEGENDRE

par

J. KARAMATA

1. Soit donnée une série trigonométrique de la forme

$$G_n(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(n)\, e^{\nu\theta i}, \tag{1}$$

dont les coefficients $C_\nu(n)$ sont réels et dépendent du paramètre n, entier ou non. En supposant que ces coefficients sont, pour n tendant vers l'infini, susceptibles d'un développement asymptotique procédant suivant les inverses d'une suite de fonctions $q_\mu(n)$, $\mu=0, 1, 2, 3, \ldots$, tendant vers l'infini avec n de plus en plus vite, c. à d.

$$q_0(n) \prec q_1(n) \prec q_2(n) \prec \ldots, \quad n \to \infty,$$

il s'agit de voir sous quelles conditions la fonction $S_n(\theta)$ est elle-même développable en une telle série.

En d'autres termes, lorsque

$$C_\nu(n)=\frac{\gamma_0(\nu)}{q_0(n)}+\frac{\gamma_1(\nu)}{q_1(n)}+\cdots+\frac{\gamma_k(\nu)}{q_k(n)}+o\left(\frac{1}{q_k(n)}\right), \quad n\to\infty, \tag{2}$$

nous allons montrer que l'on peut dans (1) remplacer les $C_\nu(n)$ par le développement asymptotique (2), et en déduire

$$G_n(\theta)=\frac{\Gamma_0(\theta)}{q_0(n)}+\frac{\Gamma_1(\theta)}{q_1(n)}+\cdots+\frac{\Gamma_k(\theta)}{q_k(n)}+o\left(\frac{1}{q_k(n)}\right), \quad n\to\infty, \tag{3}$$

avec

$$\Gamma_\mu(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\mu(\nu)\, e^{\nu\theta i}, \quad \mu=0, 1, 2, \ldots k, \tag{4}$$

toutes les fois que les séries (1) et (4) convergent et lorsque les $C_\nu(n)$ sont de la forme

$$C_\nu(n) = A_\nu B_\nu(n), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

où les A_ν forment une suite totalement monotone et les $B_\nu(n)$ une suite dont la différence K-ième tend en décroissant vers zéro avec $1/\nu$, les $B_\nu(n)$ possédant en outre un développement asymptotique de la forme

$$B_\nu(n) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(n)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(n)} + \cdots + \frac{p_k(\nu)}{q_k(n)} + o\left(\frac{1}{q_k(n)}\right), \quad n \to \infty,$$

les coefficients $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots k$, étant des polynomes en ν de degré inférieur à K.

Ce même fait subsiste lorsque les séries (1) et (4) ne convergent pas. Dans ce cas elles sont toujours sommables-A (voir le théorème 4 du § 3) et l'affirmation (3) subsiste lors qu'on y remplace les sommes des séries (1) et (4) par leurs sommes généralisées d'Abel, c. à d. par

$$G_n(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(n)\, r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et

$$\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\mu(\nu)\, r^\nu e^{\nu\theta i} \qquad \mu = 0, 2, \ldots k.$$

C'est surtout cette extension qui est susceptible de diverses applications et nous en déduirons, au § 4, certains développements asymptotiques des polynomes de Legendre $P_n(\cos\theta)$ ainsi que des fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(\cos\theta)$ pour $n \to \infty$. En premier lieu, nous en déduirons le développement classique sous la forme

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu 2^\mu\, a_\mu \frac{J\{f^{(\mu)}(e^{2\theta i})\, e^{(n+2\mu+1)\theta i}\}}{a_n (2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\mu+1)} + \\ + o\left(\frac{1}{n^k \sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, où les coefficients a_μ et la fonction f sont donnés par

$$f(z) = (1 - z)^{-1/2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu.$$

En second lieu, nous obtiendrons, en particulier, le dévoloppement asymptotique suivant

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu a_\mu \frac{J\{e^{(n+1)\theta i} f_\mu(e^{2\theta i})\}}{(n+1)^{\mu+1/2}} + o\left(\frac{1}{n^k \sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, où la suite des fonctions $f_\mu(z)$ est donnée par

$$f_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} c_{\mu-\nu} \left(z \frac{d}{dz}\right)^\nu \left\{(1-z)^{-1/2}\right\}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

les coefficients c_μ étant donnés par la fonction génératrice

$$\sqrt{\frac{x}{e^x - 1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu!} x^\mu .$$

Les deux développements asymptotiques correspondants des fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(\cos\theta)$ s'obtiennent des dévoloppements précédents, en y changeant simplement les parties imaginaires $J\{\ \}$ par les parties réelles $R\{\ \}$ et en remplaçant dans la première le coefficient $4/\pi$ devant Σ par 2, et dans la seconde $2/\sqrt{\pi}$ par $\sqrt{\pi}$.

2. Pour établir ces résultats, c. à d. le théorème 4, nous donnerons au § 3 trois théorèmes relatifs au double passage à la limite, dont les démonstrations reposent, en principe, sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit la série*

$$s(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n)$$

convergente pour tout $n \geqslant n_0$ *et*

$$u_\nu(n) \to u_\nu, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

S'il existe une série

$$S(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu(n)$$

convergente pour $n \geqslant n_0$, *telle que*

$$U_\nu(n) \to U_\nu, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu \quad \textit{converge,} \tag{7}$$

et que

$$S(n) \to \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu, \quad n \to \infty,$$

alors de

$$|u_\nu(n)| \leqslant U_\nu(n), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n \geqslant n_0, \tag{8}$$

il résulte que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \quad \textit{converge,} \tag{9}$$

et que

$$s(n) \to \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu, \quad n \to \infty.$$

En effet, de (5), (6) et (8) il résulte

$$|u_\nu| \leqslant U_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

c. à d. la convergence de la série (9), la série (7) étant supposée convergente.

D'autre part, on a

$$\left| s(n) - \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1} |u_\nu(n) - u_\nu| + \sum_{\nu=m}^{\infty} |u_\nu(n)| + \sum_{\nu=m}^{\infty} |u_\nu| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1} |u_\nu(n) - u_\nu| + \sum_{\nu=m}^{\infty} U_\nu(n) + \sum_{\nu=m}^{\infty} U_\nu,$$

et par suite

$$\lim_{n=\infty} \sup \left| s(n) - \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \right| \leqslant \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} U_\nu(n) + \sum_{\nu=m}^{\infty} U_\nu =$$

$$\leqslant 2 \sum_{\nu=m}^{\infty} U_\nu \to 0, \quad m \to \infty.$$

Remarquons, en passant, que l'on peut légérement généraliser le lemme 1 et lui donner une des formes des plus générales des théorèmes de ce genre, c. à d. relatifs au double passage à la limite. On peut, en effet, formuler ce lemme de la manière suivante.

Lorsqu'il existent deux suites $U'_\nu(n)$ *et* $U''_\nu(n)$ *telles que*

$$U'_\nu(n) \leqslant u_\nu(n) \leqslant U''_\nu(n),$$

pour tout n *et* ν, *et lorsque*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} U'_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n=\infty} U'_\nu(n),$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} U''_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n=\infty} U''_\nu(n),$$

les deux séries au second membre étant supposées convergentes, alors

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n=\infty} u_\nu(n)$$

et cette dernière série converge de même.

Lemme 2. *Soit*

$$c_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad c_{-1} = 0,$$

une suite à variation bornée, c. à d. telle que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | c_{\nu-1} - c_\nu | \quad \text{converge.}$$

Alors

$$f(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}$$

converge pour $0 \leqslant r < 1$ *et*

$$f(\theta) = \lim_{r=1} f(r, \theta)$$

existe pour $0 < \theta < 2\pi$.

En outre, on a

$$| f(r, \theta) | \leqslant \frac{1}{| 1 - re^{\theta i} |} \sum_{\nu=0}^{\infty} | c_{\nu-1} - c_\nu |, \tag{10}$$

et, en particulier,

$$| f(\theta) | \leqslant \frac{1}{2 \sin \theta/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} | c_{\nu-1} - c_\nu |,$$

pour $0 < \theta < 2\pi$.

Les affirmations du lemme 2 sont une conséquence immédiate de l'identité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \frac{1}{z-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{\nu-1} - c_\nu) z^\nu$$

valable pour

$$z = re^{\theta i} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < 1,$$

et du lemme 1, relatif au passage à la limite $r \to 1$.

3. Une conséquence immédiate des deux lemmes précedents est le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit la suite*

$$B_0(n), \quad B_1(n), \quad B_2(n), \ldots$$

non croissante à partir d'un ν *et d'un* n, *c. à d.*

$$B_\nu(n) \geqslant B_{\nu+1}(n), \quad \nu = m, m+1, m+2, \ldots, \quad n \geqslant n_0,$$

et telle que

$$B_\nu(n) \to B_\nu, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n=\infty} \lim_{\nu=\infty} B_\nu(n) = \lim_{\nu=\infty} B_\nu.$$

Alors, en posant

$$F_n(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(n)\, r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et

$$F(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\, r^\nu e^{\nu\theta i},$$

les limites

$$F_n(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(n)\, r^\nu e^{\nu\theta i} \tag{11}$$

et

$$F(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu\, r^\nu e^{\nu\theta i} \tag{12}$$

existent pour $0 < \theta < 2\pi$, *et*

$$F_n(\theta) \to F(\theta), \quad n \to \infty, \tag{13}$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$.

Les affirmations (11) et (12) sont une conséquence du lemme 2, les suites $B_\nu(n)$ et B_ν étant supposées monotones.

Pour démontrer l'affirmation (13), posons

$$d_\nu(n) = B_\nu(n) - B_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad d_{-1}(n) = 0;$$

alors, on aura

$$F_n(r, \theta) - F(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(n)\, r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

La suite $d_\nu(n)$ étant à variation bornée, il résulte de l'inégalité (10) du lemme 2, que

$$|F_n(r, \theta) - F(r, \theta)| \leqslant \frac{1}{|1 - re^{\theta i}|} \sum_{\nu=0}^{\infty} |d_{\nu-1}(n) - d_\nu(n)|,$$

c. à d. en faisant tendre r vers l'unité,

$$\begin{aligned} |F_n(\theta) - F(\theta)| &\leqslant \frac{1}{2\sin\theta/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |d_{\nu-1}(n) - d_\nu(n)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\sin\varepsilon/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |d_{\nu-1}(n) - d_\nu(n)|, \end{aligned} \tag{14}$$

pour $0 < \varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \varepsilon$.

Les suites $B_\nu(n)$ et B_ν ne croissant pas, on aura

$$|d_{\nu-1}(n) - d_\nu(n)| \leqslant B_{\nu-1}(n) - B_\nu(n) + B_{\nu-1} - B_\nu, \quad \nu \geqslant 1.$$

Or,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{B_{\nu-1}(n)-B_\nu(n)+B_{\nu-1}-B_\nu\}=B_0(n)+B_0-\lim_{\nu=\infty}B_\nu(n)-\lim_{\nu=\infty}B_\nu\,,$$

par suite

$$\lim_{\nu=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\{B_{\nu-1}(n)-B_\nu(n)+B_{\nu-1}-B_\nu\}=2B_0-\lim_{n=\infty}\lim_{\nu=\infty}B_\nu(n)-\lim_{\nu=\infty}B_\nu$$

et

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lim_{n=\infty}\{B_{\nu-1}(n)-B_\nu(n)+B_{\nu-1}-B_\nu\}=2B_0-2\lim_{\nu=\infty}B_\nu\,.$$

D'après l'hypothèse, ces deux limites étant égales, il s'ensuit que l'on peut appliquer le lemme 1 à la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\,d_{\nu-1}(n)-d_\nu(n)\,|\,,$$

et l'on en déduit que

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|\,d_{\nu-1}(n)-d_\nu(n)\,| \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\lim_{n=\infty}|\,d_{\nu-1}(n)-d_\nu(n)\,|=0\,.$$

On en conclue, en tenant compte de l'inégalité (14), que

$$F_n(\theta)-F(\theta)\to 0,\quad n\to\infty\,,$$

c. à. d. l'affirmation (13).

Une généralisation immédiate de ce théorème s'obtient en remplaçant l'hypothèse de la monotonie de la suite $B_\nu(n)$ par l'hypothèse qu'une quelconque de ses différences

$$\Delta^k B_\nu(n)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}B_{\nu+i}(n)$$

décroit avec $1/\nu$, sans que la suite $B_\nu(n)$ elle même, ou l'une de ses différences d'ordre inférieure à k soit monotone.

Il suffit, en effet, de partir de l'identité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu z^\nu=\frac{1}{(z-1)^k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^k C_{\nu-k}z^\nu\,,$$

où l'on a posé

$$C_{-1}=C_{-2}=\cdots=C_{-k}=0\,,$$

avec

$$\Delta^k C_\nu=\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^\mu\binom{k}{\mu}C_{\nu+\mu}\,,$$

et d'appliquer le théorème 1 à la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^k C_{\nu-k} z^\nu .$$

En y remplaçant C_ν par $B_\nu(n)$, respectivement B_ν, on obtient la généralisation suivante du théorème 1.

Théorème 2. *Soit donné la suite*

$$B_\nu(n), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Lorsque l'une quelconque des différences

$$\Delta^k B_\nu(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} B_{\nu+i}(n)$$

est une suite non croissante à partir d'un ν *et d'un* n, *c. à. d. lorsque*

$$\Delta^k B_\nu(n) \geqslant \Delta^k B_{\nu+1}(n),$$

pour

$$\nu = m, \quad m+1, \quad m+2, \ldots \quad et \quad n \geqslant n_0,$$

et lorsque

$$B_\nu(n) \to B_\nu, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

$$\lim_{n=\infty} \lim_{\nu=\infty} \Delta^k B_\nu(n) = \lim_{\nu=\infty} \Delta^k B_\nu, \tag{17}$$

alors, en posant

$$F_n(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(n) r^\nu e^{\nu\theta i}, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

et

$$F(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

les limites

$$F_n(\theta) = \lim_{r=1} F_n(r, \theta) \tag{18}$$

et

$$F(\theta) = \lim_{r=1} F(r, \theta) \tag{19}$$

existent pour $0 < \theta < 2\pi$, *et la suite de fonctions* $F_n(\theta)$ *converge uniformément vers la fonction* $F(\theta)$ *lorsque* $n \to \infty$, *c. à. d.*

$$F_n(\theta) \to F(\theta), \quad n \to \infty, \tag{20}$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$.

Afin de rendre ce théorème plus apte aux applications en vue, nous en déduirons encore la généralisation suivante.

Théorème 3. *Soit*

$$A_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

une suite totalement monotone, c. à. d. de la forme

$$A_\nu = \int_0^1 t^\nu \, d\alpha(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

$\alpha(t)$ *étant une fonction non décroissante.*

Lorsque la suite

$$B_\nu(n), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

satisfait aux conditions du théorème 2, c. à. d. à la condition (15), *pour un* k *détérminé, et aux conditions* (16) *et* (17), *alors, en premier lieu, les deux limites suivantes existent*

$$G_n(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu(n) \, r^\nu e^{\nu\theta i} \to G_n(\theta), \quad r \to 1, \tag{22}$$

$$G(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\theta i} \to G(\theta), \quad r \to 1, \tag{23}$$

pour $0 < \theta < 2\pi$.

En second lieu, la suite de fonctions $G_n(\theta)$ *ainsi définie converge uniformément vers la fonction* $G(\theta)$ *lorsque* $n \to \infty$, *c. à d.*

$$G_n(\theta) \to G(\theta), \quad n \to \infty, \tag{24}$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$.

Les fonctions F étant celles du thèorème 2, on a, d'après (21),

$$G_n(r, \theta) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(n) \, r^\nu t^\nu e^{\nu\theta i} \, d\alpha(t) =$$

$$= \int_0^1 F_n(rt, \theta) \, d\alpha(t).$$

Or, la fonction $F_n(x, \theta)$ est continue pour $0 \leqslant x < 1$ et, d'après (18), continue de gauche au point $x = 1$. Par suite elle est uniformément continue dans l'intervalle $(0, 1)$ par rapport à x, pour tout θ différent de 0 et 2π. Il en résulte que

$$\int_0^1 F_n(rt, \theta) \, d\alpha(t) \to \int_0^1 F_n(t, \theta) \, d\alpha(t), \quad r \to 1,$$

ce qui démontre l'affirmation (22), c. à d. que

$$G_n(r,\theta) \to G_n(\theta) = \int_0^1 F_n(t,\theta)\, d\alpha(t), \quad r \to 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Par des considérations analogues on démontre l'affirmation (23) c. à d. que, d'après (19),

$$G(r,\theta) \to G(\theta) = \int_0^1 F(t,\theta)\, d\alpha(t), \quad r \to 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Enfin, pour démontrer l'affirmation (24), remarquons d'abord que des deux relations précédentes il résulte

$$G_n(\theta) - G(\theta) = \int_0^1 \{F_n(t,\theta) - F(t,\theta)\}\, d\alpha(t).$$

Or, en posant

$$z = te^{\theta i},$$

$$B_{-\nu}(n) = B_{-\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

et

$$D_\nu(n) = \Delta^k B_\nu(n) - \Delta^k B_\nu,$$

on a

$$F_n(t,\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(n) z^\nu = \frac{1}{(z-1)^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^k B_\nu(n) z^\nu,$$

$$F(t,\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu z^\nu = \frac{1}{(z-1)^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^k B_\nu z^\nu$$

et

$$F_n(t,\theta) - F(t,\theta) = \frac{1}{(z-1)^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu(n) z^\nu,$$

c. à d., d'après l'inégalité (10) du lemme 2,

$$|F_n(t,\theta) - F(t,\theta)| \leqslant \frac{1}{|1 - te^{\theta i}|^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |D_{\nu-1}(n) - D_\nu(n)|.$$

Par suite

$$|G_n(\theta) - G(\theta)| \leqslant \int_0^1 \frac{d\alpha(t)}{|1 - te^{\theta i}|^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |D_{\nu-1}(n) - D_\nu(n)|,$$

et, en tenant compte du lemme 1, il s'en suit, d'après les hypothèses (15), (16) et (17) que cette dernière somme tend vers zéro avec $1/n$, d'où il résulte l'affirmation (24).

Du théorème 3 on peut enfin déduire le développement asymptotique mentionné au début, de la suite des fonctions $G_n(\theta)$, sachant que la suite $B_\nu(n)$ est développable en une série asymptotique, dont les coefficients sont des polynomes en ν, que l'on peut formuler d'une manière précise comme suit.

Théorème 4. *Soit A_ν une suite totalement monotone et $B_\nu(n)$ développable en une série asymptotique de la forme*

$$B_\nu(n) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(n)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(n)} + \frac{p_2(\nu)}{q_2(n)} + \cdots + \frac{p_k(\nu)}{q_k(n)} + o\left(\frac{1}{q_k(n)}\right), \quad n \to \infty,$$

où

$$p_\mu(\nu), \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots k,$$

sont des polynomes de degré inférieur à K, et

$$q_0(n) \prec q_1(n) \prec q_2(n) \prec \cdots \prec q_k(n), \quad n \to \infty.$$

Lorsque la K-ième différence de la suite $B_\nu(n)$ tend en décroissant vers zéro, c. à d. lorsque

$$\Delta^K B_\nu(n) \geqslant \Delta^K B_{\nu+1}(n) \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

à partir d'un n, alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu(n) r^\nu e^{\nu\theta i} \to G_n(\theta), \quad r \to 1,$$

et $G_n(\theta)$ est développable en une série asymptotique de la forme

$$G_n(\theta) = \frac{\Gamma_0(\theta)}{q_0(n)} + \frac{\Gamma_1(\theta)}{q_1(n)} + \cdots + \frac{\Gamma_k(\theta)}{q_k(n)} + o\left(\frac{1}{q_k(n)}\right), \quad n \to \infty,$$

où

$$\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu p_\mu(\nu) r^\nu e^{\nu\theta i}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, k.$$

Pour déduire ce théorème du théorème 3 il suffit de remplacer dans ce dernier théorème la suite $B_\nu(n)$ par

$$B_\nu^*(n) = q_k(n) \left\{ B_\nu(n) - \sum_{\mu=0}^{k} \frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(n)} \right\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Étant donné que la somme dans l'expression précédente est un polynome en ν de degré inférieur à K, la différence K-ième de cette suite est égale à

$$\Delta^K B_\nu^*(n) = q_k(n) \Delta^K B_\nu(n),$$

et tend en décroissant vers zéro avec $1/\nu$ à partir d'un n, lorsque c'est le cas de

$$\Delta^K B_\nu(n).$$

D'autre part, du développement asymptotique de la suite $B_\nu(n)$ il résulte que la suite (25) tend vers zéro avec $1/n$ pour tout ν, donc la suite B_ν du théorème 3 est identiquement égale à zéro, c. à d.

$$\lim_{n=\infty} B_\nu^*(n) = B_\nu^* = 0 \quad \text{pour tout} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Par suite, la condition (17) du théorème 3, resp. 2, c. à d.

$$\lim_{n=\infty} \lim_{\nu=\infty} \Delta^K B_\nu^*(n) = \lim_{\nu=\infty} \Delta^K B_\nu^* = 0$$

est bien satisfaite.

Quant aux fonctions

$$G_n^*(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu^*(n) r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et

$$G^*(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu^* r^\nu e^{\nu\theta i},$$

correspondantes aux fonctions $G_n(\theta)$ et $G(\theta)$ du théorème 3, on aura, d'après (26), que

$G^*(\theta)$ *se réduit identiquement à zéro,*

et par suite, d'après le théorème 3, que

$$G_n^*(\theta) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{27}$$

uniformément pour

$$0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon.$$

Or,

$$G_n^*(\theta) = q_k(n) \left\{ G_n(\theta) - \sum_{\mu=0}^{k} \frac{\Gamma_\mu(\theta)}{q_\mu(n)} \right\},$$

c. à d. $G_n^*(\theta)$ est égale à

$$q_k(n) \left\{ \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu B_\nu(n) r^\nu e^{\nu\theta i} - \sum_{\mu=0}^{k} \frac{1}{q_\mu(n)} \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu p_\mu(\nu) r^\nu e^{\theta i} \right\},$$

et cette expression, d'après (27), tend vers zéro avec $1/n$ uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$, qui se réduit à l'affirmation du théorème 4.

4. En vue d'application du théorème 4, nous allons donner ici certains développements asymptotiques des polynomes de Legendre $P_n(\cos\theta)$, définis par

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) t^\nu,$$

pour les grandes valeurs de n.

Pour obtenir ces développements nous partirons du développement connu de Heine de $P_n(\cos\theta)$ en série de sinus. A cet effet posons

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

et remarquons que les coefficients a_n sont de la forme

$$a_n = \frac{2}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{n!\,\sqrt{\pi}}, \qquad n=1,2,3,\ldots \quad \text{avec} \quad a_0=1. \tag{28}$$

En outre, il est connu que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \tag{29}$$

$$b_n = \frac{1}{(2n+1)\,a_n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\xi\, d\xi = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \tag{30}$$

et que la formule de Wallis peut s'exprimer par la relation asymptotique

$$a_n \sim 1/\sqrt{\pi n}, \quad n\to\infty. \tag{31}$$

Alors le développement de Heine des polynomes $P_n(\cos\theta)$ peut s'écrire

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(2n+2\nu+1)\,a_{n+\nu}} \sin(n+2\nu+1)\,\theta,$$

que nous mettrons sous la forme

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi} J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{(2n+2\nu+1)\,a_{n+\nu}}\, e^{2\nu\theta i}\right\} =$$
$$= \frac{4}{\pi} J\left\{e^{(n+1)\theta i}\, S_n(2\,\theta)\right\}, \tag{32}$$

avec

$$S_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, b_\nu(n)\, e^{\nu\theta i} \tag{33}$$

et

$$b_\nu(n) = \frac{1}{(2n+2\nu+1)\,a_{n+\nu}} = b_{n+\nu}, \tag{34}$$

afin de pouvoir appliquer le théorème 4 à la somme (33).

D'après (29), la suite des coefficients a_n est totalement monotone, et, d'après (30), on a

$$b_\nu(n) = \frac{1}{(2n+2\nu+1)\, a_{n+\nu}} = \int_0^1 \frac{t^{2n+2\nu+1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^\nu \frac{t^n\, dt}{\sqrt{1-t}}, \tag{35}$$

c. à d. que la suite $b_\nu(n)$ est de même totalement monotone quelque soit n. Par suite, on a, d'après (31), quelque soient n et K

$$\Delta^K b_\nu(n) > \Delta^K b_{\nu+1}(n) \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Il s'en suit qu'on pourra appliquer à la somme (33) le théorème 4 (en y remplaçant les A et les B par les a et les b), toutes les fois que les coefficients $b_\nu(n)$ sont développables, pour les grandes valeurs de n, en séries asymptotiques dont les coefficients sont des polynomes en ν. A chacun de ces développements correspondera alors un développement asymptotique des sommes (33), c. à d. de $S_n(\theta)$.

En partant de la formule (35) on peut obtenir différents développements asymptotiques de ces coefficients, dont nous mentionnerons les deux suivants.

1⁰. En premier lieu, on a d'après (30)

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n \frac{t^\nu\, dt}{\sqrt{1-t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^n \frac{\{1-(1-t)\}^\nu}{\sqrt{1-t}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \int_0^1 t^n (1-t)^{\mu-1/2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} B(\mu+1/2,\quad n+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \frac{n!\,\Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(n+\mu+3/2)},$$

c. à d., d'après (28) et (34),

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \frac{n!\,\mu!\,a_\mu}{(n+\mu+1)!\,a_{n+\mu+1}} =$$

$$= \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \frac{2^\mu \mu!\,a_\mu \cdot 2^n n!\,a_n}{2^{n+\mu+1}(n+\mu+1)!\,a_{n+\mu+1}},$$

et puisque

$$2^n n!\,a_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \,.\,.\,.\, \cdot (2n-1),$$

on aura

$$b_\nu(n) = \frac{1}{(2n+1)\,a_n} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mu-1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)} =$$

$$= b_n \left\{ 1 - \binom{\nu}{1} \frac{1}{2n+3} + \binom{\nu}{2} \frac{1 \cdot 3}{(2n+3)\,2n+5)} - \right.$$

$$\left. - \binom{\nu}{3} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \cdots \right\}.$$

Il s'ensuit que l'on peut poser, pour les grandes valeurs de n,

$$b_\nu(n) = b_n \left\{ 1 - \binom{\nu}{1} \frac{1}{2n+3} + \binom{\nu}{2} \frac{1 \cdot 3}{(2n+3)(2n+5)} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \right\} =$$

$$= b_n \left\{ 1 - \binom{\nu}{1} \frac{1}{2n+3} + \binom{\nu}{2} \frac{1 \cdot 3}{(2n+3)(2n+5)} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)} \right\} + o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right)$$

$n \to \infty$,

puisque, d'après (31) et (34),

$$b_n \sim \frac{1}{2} \sqrt{\pi/n}, \quad n \to \infty,$$

et cette relation a lieu quelque soit $\nu \gtreqless k$.

On aura donc, d'après les notations du théorème 4,

$$b_\nu(n) = \sum_{\mu=0}^{k} \frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(n)} + o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right), \quad n \to \infty,$$

avec

$$p_\mu(\nu) = (-1)^\mu\, 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\mu-1) \binom{\nu}{\mu} = (-1)^\mu\, 2^\mu \mu!\, a_\mu \binom{\nu}{\mu}$$

et

$$q_\mu(n) = \frac{1}{b_n}(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1) =$$
$$= (2n+1)\,a_n\,(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1) \sim$$
$$\sim \frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}} n^{\mu+1/2}, \quad n\to\infty, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

On obtient ainsi, d'après le théorème 4, pour $S_n(\theta)$ le développement asymptotique suivant

$$S_n(\theta) = \frac{\Gamma_0(\theta)}{q_0(n)} + \frac{\Gamma_1(\theta)}{q_1(n)} + \cdots + \frac{\Gamma_k(\theta)}{q_k(n)} + o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right), \quad n\to\infty,$$

avec

$$\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\mu(\nu) r^\nu e^{\nu\theta i} =$$
$$= (-1)^\mu 2^\mu \mu!\, a_\mu \lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \binom{\nu}{\mu} r^\nu e^{\nu\theta i} =$$
$$= (-1)^\mu 2^\mu a_\mu f^{(\mu)}(e^{\theta i}) e^{\mu\theta i}, \tag{36}$$

où l'on a posé

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = (1-z)^{-1/2}.$$

Il s'ensuit, en définitif, que

$$S_n(\theta) = b_n \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{2^\mu a_\mu f^{(\mu)}(e^{\theta i}) e^{\mu\theta i}}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)} +$$
$$+ o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty, \tag{37}$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$, d'où il résulte, d'après (32), la formule asymptotique des polynomes $P_n(\cos\theta)$

$$P_n(\cos\theta) =$$
$$= \frac{4}{\pi(2n+1)\,a_n} J\left\{ e^{(n+1)\theta i} \sum_{\mu=0}^{k} \frac{(-1)^\mu 2^\mu a_\mu f^{(\mu)}(e^{2\theta i}) e^{2\mu\theta i}}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)} \right\} +$$
$$+ o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty, \tag{38}$$

valable uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, $f(z)$ et a_ν étant donnés par (36).

Puisque, d'après (36),

$$f^{(\mu)}(z) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\mu-1)}{2^\mu}(1-z)^{-\mu-1/2},$$

on aura

$$f^{(\mu)}(e^{2\theta i}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mu - 1)}{2^\mu} \frac{i^{\mu+1/2} e^{-(\mu+1/2)\theta i}}{(2 \sin \theta)^{\mu+1/2}}.$$

Par suite, les coefficients

$$\Phi_\mu(\theta) = (-1)^\mu 2^\mu a_\mu f^{(\mu)}(e^{2\theta i}) e^{(n+2\mu+1)\theta i}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots k,$$

du développement (38) ont la forme

$$\Phi_\mu(\theta) = (-1)^\mu 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\mu - 1) a_\mu \frac{i^{\mu+1/2} e^{(n+\mu+1/2)\theta i}}{(2 \sin \theta)^{\mu+1/2}} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\mu - 1) a_\mu i \frac{\exp\{(n+\mu+1/2)\theta i - (\mu+1/2)\pi i/2\}}{(2 \sin \theta)^{\mu+1/2}},$$

où l'on a posé

$$(-1)^\mu i^{\mu+1/2} = i e^{-(\mu+1/2)\frac{\pi}{2} i},$$

ce qui donne

$$J\{\Phi_\mu(\theta)\} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\mu - 1) a_\mu \frac{\cos [n\theta + (\mu + {}^1/_2)(\theta - \pi/2)]}{(2 \sin \theta)^{\mu+1/2}}.$$

Ainsi, le développement (38) se réduit à

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi(2n+1)a_n} \sum_{\mu=0}^{k} \frac{J\{\Phi_\mu(\theta)\}}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)} + o\left(\frac{1}{n^k \sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, c. à d. au développement asymptotique connu des polynomes de Legendre et dont la série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{J\{\Phi_\mu(\theta)\}}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)}$$

ne converge que pour $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$.

2° En second lieu, on peut obtenir le développement asymptotique de $P_n(\cos\theta)$, c. à d. de $S_n(\theta)$, suivant les puissances negatives de n, ou bien plus généralement, de $(n+\lambda)$, avec λ réel quelconque. A cet effet, on peut partir de l'intégrale (35) qui donne les coefficients $b_\nu(n)$ de $S_n(\theta)$, et l'on aura

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n+\lambda} \frac{t^{\nu-\lambda}\, dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(n+\lambda)t} \frac{e^{-(\nu-\lambda+1)t}}{\sqrt{1-e^{-t}}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(n+\lambda)t}\, t^{-1/2} e^{-(\nu-\lambda+1)t} \sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}\, dt,$$

c. à d. en y posant

$$F(-t, y) = e^{-yt}\sqrt{\frac{-t}{e^{-t}-1}},$$

on a

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(n+\lambda)t}\, t^{-1/2} F(-t, \nu-\lambda+1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n+\lambda}}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2} F\left(-\frac{t}{n+\lambda},\ \nu-\lambda+1\right) dt.$$

Par suite, en désignant par $Q_\mu(y)$ les polynomes en y de degré μ, définis par la fonction génératrice

$$F(x, y) = e^{yx}\sqrt{\frac{x}{e^x-1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_\mu(y)}{\mu!}\, x^\mu, \tag{39}$$

et en y posant

$$x = -\frac{t}{n+\lambda}, \quad y = \nu - \lambda + 1,$$

on obtient

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2\sqrt{n+\lambda}}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_\mu(\nu-\lambda+1)}{\mu!}\left(-\frac{t}{n+\lambda}\right)^\mu.$$

Enfin, en intégrant cette série terme à terme, on en déduit le développement asymptotique des $b_\nu(n)$ sous la forme

$$b_\nu(n) = \frac{1}{2\sqrt{n+\lambda}}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^\mu \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\mu!}\,\frac{Q_\mu(\nu-\lambda+1)}{(n+\lambda)^\mu} + o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+\lambda}}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^\mu a_\mu \frac{Q_\mu(\nu-\lambda+1)}{(n+\lambda)^\mu} + o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty.$$

Il en résulte d'après le théorème 4 et la formule (33), que le développement asymptotique correspondant de $S_n(\theta)$ est donné par

$$S_n(\theta) = \sum_{\mu=0}^{k}\frac{\Gamma_\mu(\theta)}{(n+\lambda)^{\mu+1/2}} + o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty,$$

où l'on a posé

$$\Gamma_\mu(\theta) = (-1)^\mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_\mu \lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, Q_\mu(\nu-\lambda+1)\, r^\nu e^{\nu\theta i} =$$

$$= (-1)^\mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_\mu f_\mu(e^{\theta i}),$$

c. à d. par

$$S_n(\theta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}a_{\mu}\frac{f_{\mu}(e^{\theta i})}{(n+\lambda)^{\mu+1/2}}+o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right),\quad n\to\infty. \tag{40}$$

Pour obtenir la fonction génératrice des

$$f_{\mu}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\nu}\,Q_{\mu}(\nu-\lambda+1)\,z^{\nu},\quad \mu=0,1,2,\ldots, \tag{41}$$

multiplions la relation (39) par $a_{\nu}z^{\nu}$,

$$a_{\nu}e^{\nu x}z^{\nu}\sqrt{\frac{x}{e^x-1}}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{a_{\nu}\,Q_{\mu}(y)\,z^{\nu}}{\mu!}x^{\mu}.$$

En y posant $y=\nu-\lambda+1$ et en faisant la somme de $\nu=0$ à ∞, on obtient

$$e^{(1-\lambda)x}\sqrt{\frac{x}{e^x-1}}(1-ze^x)^{-1/2}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{f_{\mu}(z)}{\mu!}x^{\mu}.$$

Or d'après (38), on a

$$e^{(1-\lambda)x}\sqrt{\frac{x}{e^x-1}}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{Q_{\mu}(1-\lambda)}{\mu!}x^{\mu}$$

donc, en posant

$$\psi_{\mu}(z)=\left(z\frac{d}{dz}\right)^{\mu}\{(1-z)^{-1/2}\},\quad \mu=0,1,2,\ldots,$$

c. à d.

$$\psi_0(z)=(1-z)^{-1/2},\quad \psi_{\mu+1}(z)=z\,\psi'_{\mu}(z),\quad \mu=0,1,2,\ldots, \tag{42}$$

on peut donner à la suite des fonctions $f_{\mu}(z)$ la forme

$$f_{\mu}(z)=\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}Q_{\mu-\nu}(1-\lambda)\,\psi_{\nu}(z),\quad \mu=0,1,2,\ldots \tag{43}$$

Pour $\lambda=1$ on obtient, d'après (33) et (40), le développement asymptotique des polynomes de Legendre, mentionné au § 1.

Étant donné que la série conjuguée en cosinus de la série de Heine, représente au facteur miltiplicatif près, la fonction sphérique de seconde espèce $Q_n(\cos\theta)$, c. à d. que

$$Q_n(\cos\theta)=2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\nu}}{(2n+2\nu+1)\,a_{n+\nu}}\cos(n+2\nu+1)\theta,$$

on aura, d'après (32), (33) et (34)

$$Q_n(\cos\theta)=2R\{e^{(n+1)\theta i}S_n(2\theta)\}.$$

Ainsi, chaque développement asymptotique de $S_n(\theta)$ nous donne en même temps un développement asymptotique des fonctions sphériques $Q_n(\cos\theta)$. En particulier, des développements (37) et (40) de $S_n(\theta)$ nous obtenons le développement suivant de $Q_n(\cos\theta)$:

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{2}{(2n+1)\,a_n}\sum_{\mu=0}^{k}\frac{(-1)^{\mu}2a_{\mu}R\left\{e^{(n+2\mu+1)\theta i}f^{(\mu)}(e^{\theta i})\right\}}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\mu+1)}+o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right),$$

$$Q_n(\cos\theta)=\sqrt{\pi}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}a_{\mu}\frac{R\left\{e^{(n+1)\theta i}f_{\mu}(e^{\theta i})\right\}}{(n+1)^{\mu-1/2}}+o\left(\frac{1}{n^k\sqrt{n}}\right),\quad n\to\infty,$$

uniformément $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, les coefficients a_{μ} et les fonctions f et f_{μ} étant définis par (36), (39), (41), (42) et (43).