ÜBER DEN EXISTENZBEREICH DER INTEGRALE DER QUASILINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG

von

E. KAMKE

1. Es sei die quasilineare Differentialgleichung

$$p+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x,\mathfrak{y},z)\,q_\nu=g(x,\mathfrak{y},z) \tag{1}$$

gegeben; dabei steht $\mathfrak{y}$ für $y_1,\ldots,y_n$, es ist $z=z(x,\mathfrak{y})$ die gesuchte Funktion und $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q_\nu=\dfrac{\partial z}{\partial y_\nu}$. Die Koeffizienten f_ν und g sollen in dem Parallelstreifen

$$|x-\xi|<a,\quad \mathfrak{y} \text{ und } z \text{ beliebig,} \tag{2}$$

stetig sein und stetige partielle Ableitungen nach den y_k und z haben, und die absoluten Beträge dieser Ableitungen sollen $\leqq A$ sein.

Ferner ist eine für alle $\mathfrak{y}$ stetig diffbare Funktion $\omega(\mathfrak{y})$ gegeben, für die alle partiellen Ableitungen $|\omega_{y_\nu}|\leqq C$ sind.

Dann hat (1) für ein $\alpha\leqq a$ in dem Parallelstreifen

$$|x-\xi|<\alpha,\ \mathfrak{y} \text{ beliebig,} \tag{3}$$

genau ein Integral $z=\psi(x,\mathfrak{y})$ mit den Anfangswerten $\psi(\xi,\mathfrak{y})=\omega(\mathfrak{y})$.

Über die hierbei zunächst noch unbestimmt gelassene Zahl α haben Frl. J. Perausówna[1] und Herr T. Ważewski[1] bewiesen, dass

$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{A(C+1)} & \text{für}\quad n=1\\[2ex] \dfrac{1}{(n-1)A}\log\dfrac{n(C+1)}{nC+1} & \text{für}\quad n>1\end{cases} \tag{4}$$

[1]) Annales de la Société Polonaise de Mathématique 12 (1933) 1—5 und 6—15.

gewählt und unter den obigen Vorraussetzungen durch keine grössere Zahl ersetzt werden kann. Mit etwas einfacheren Hilfsmitteln hatte ich vorher nur beweisen können, dass

$$\alpha = \frac{1}{(n+1)A} \log\left(1 + \frac{n+1}{n(C+1)}\right)$$

gewählt werden kann.[2] Die Verbesserung dieses Ergebnisses zu dem vorher genannten war den beiden Autoren dadurch gelungen, dass sie

(a) nicht nur die bekannten Glen der charakteristischen Kurven von (1) sondern die Differentialgleichungen der charakteristichen Streifen für die allgemeine (nicht-quasilineare) Differentialgleichung erster Ordnung benutzten und ausserdem

(b) einen Abbildungssatz von Herrn H a d a m a r d; nach diesem Satz bilden die Funktionen

$$y_\nu = y_\nu(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

den x-Raum eineindeutig auf den vollen y-Raum ab, wenn sie beschränkte partielle Ableitungen erster Ordnung haben und ihre Funktionaldeterminante eine positive untere Schranke hat.[3]

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich das schärfere Ergebnis (4) von P e r a u s ó w n a - W a ż e w s k i auch ohne den Satz (b) erreichen lässt und dass ferner der sich auf (a) stützende Teil des Beweises durch einen Hilfssatz ersetzt werden kann, bei dem der an dieser Stelle befremdende Begriff der charakteristischen Streifen formell nicht benutzt wird und der auch an sich vielleicht nicht ohne Interesse ist.

2. Zunächst sei an einige Eigenschaften der charakteristischen Funktionen

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

des Differentialgleichungssystems

$$y_\nu'(x) = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

d. h. der durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehenden Integralkurven des Systems (6) erinnert. Wenn die f_ν in dem Parallelstreifen

$$|x - \xi| < a, \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty \tag{7}$$

stetig sind und stetige beschränkte partielle Ableitungen $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}$ haben, etwa

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu}\right| \leqq A, \tag{8}$$

[2]) E. K a m k e, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 335.

[3]) J. H a d a m a r d, Bulletin de la Société Mathématique de France 34 (1906) 73—78, 84.

so ist der Streifen (7) ein charakteristisches Feld des Systems (6)[4], d. h. die Funktionen (5) existieren in dem Intervall $|x-\xi|<a$ und die Gesamtheit der Kurven (5) liefert (bei festem ξ) gerade alle Punkte des Streifens (7), wenn $\eta_1, \ldots, \eta_n$ beliebige Werte annehmen dürfen.

Ferner[5] sind für jedes feste $1 \leqq \lambda \leqq n$ die partiellen Ableitungen

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_\lambda}, \ldots, u_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_\lambda}$$

die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$u_\nu'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \frac{\partial f_\nu}{\partial y_k} \tag{9}$$

mit den Anfangswerten

$$u_\lambda(\xi) = 1, \quad u_\nu(\xi) = 0 \text{ für } \nu \neq \lambda; \tag{10}$$

dabei sind in $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial y_\kappa}$ nach Ausführung der Differentiation die Funktionen (5) einzutragen.

Aus dem System (9) erhält man leicht die Abschätzungen[6]

$$|u_\nu(x) - u_\nu(\xi)| \leqq \frac{1}{n}(e^{nA|x-\xi|} - 1). \tag{11}$$

Mit Rücksicht auf (10) ist also

$$\left|\frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial \eta_\lambda}\right| \leqq \frac{1}{n}(e^{nA|x-\xi|} - 1) \qquad \text{für} \quad \kappa \neq \lambda \tag{12}$$

und

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda} \geqq 1 - \frac{1}{n}(e^{nA|x-\xi|} - 1) > 0 \tag{13}$$

für

$$|x-\xi| < \operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{nA}\log(n+1)\right). \tag{14}$$

3. Das Intervall (14), in dem $\dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda} \neq 0$ ist, kann noch durch ein grösseres Intervall ersetzt werden. Es besteht nämlich der folgende Hilfssatz, der zugleich einige später benutzte Abshätzungen enthält.

[4]) Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen II, Leipzig 1944, S. 11.

[5]) Vgl. z. B. E. Kamke[2]), S. 155 f.

[6]) Vgl. z. B. E. Kamke[2]), S. 338.

Hilfssatz: *Unter den Voraussetzungen von* Nr. 1 *ist*

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda} > 0$$

für[7]

$$|x - \xi| < \operatorname{Min}(a, \beta) \tag{15}$$

mit

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{1}{A} & \text{für } n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\,A} \log(n-1) & \text{für } n > 2. \end{cases} \tag{16}$$

Für die Funktionen

$$U_\nu(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda}\right)^{-1} & \text{für } \nu = \lambda, \\ \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial \eta_\lambda} \left(\dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda}\right)^{-1} & \text{für } \nu \neq \lambda \end{cases} \tag{17}$$

gelten in dem Intervall (15) *die Abschätzungen*

$$U_\nu(x) - U_\nu(\xi) \leqq \begin{cases} \dfrac{A\,|x-\xi|}{1 - A\,|x-\xi|} & \text{für } n = 2 \\ \dfrac{e^{(n-2)\,A\,|x-\xi|} - 1}{n - 1 - e^{(n-2)\,A\,|x-\xi|}} & \text{für } n > 2 \end{cases} \tag{18}$$

und hierin ist $U_\nu(\xi) > 1$ *oder* 0, *je nachdem* $\nu = \lambda$ *oder* $\nu \neq \lambda$ *ist.*

Beweis: Wegen (10) ist

$$U_\lambda(\xi) = 1 \quad \text{und} \quad U_k(\xi) = 0 \quad \text{für } k \neq \lambda.$$

In jeder Umgebung von ξ, in der $U_\lambda(x) \neq 0$ ist, folgt für $\nu \neq \lambda$ aus (9)

$$U'_\nu(x) = \frac{u_\lambda u_\nu' - u_\nu u'_\lambda}{u_\lambda^2} = \frac{1}{u_\lambda^2}\left(u_\lambda \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial f_\nu}{\partial y_k} - u_\nu \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}\right) =$$

$$= \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda} + \sum_{k \neq \lambda} U_k \frac{\partial f_\nu}{\partial y_k} - U_\nu \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\lambda} + \sum_{k \neq \lambda} U_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_k}\right),$$

also wegen (8)

$$|U'_\nu| \leqq A\,(1 + |U_\nu|)\,(1 + \sum_{k \neq \lambda} |U_k|), \tag{19}$$

---

[7]) Man kann leicht nachrechnen, dass dieses Intervall grösser als das Intervall (14) ist.

und daher

$$| V'(x) | \leqq A\,(1+V)\,(n-1+V) \quad \text{mit} \quad V = \sum_{k\neq\lambda} | U_k |,$$

Hieraus folgt, dass V höchstens gleich der Lösung $W(x)$ der DGl

$$W'(x) = A\,(W+1)\,(W+n-1) \quad \text{mit} \quad W(\xi) = V(\xi) = 0$$

ist. Man erhält daher

$$\sum_{k\neq\lambda} | U_k | \leqq W = \begin{cases} \dfrac{A\,|x-\xi|}{1-A\,|x-\xi|} & \text{für } n=2, \\ (n-1)\dfrac{e^X-1}{n-1-e^X} & \text{mit } X=(n-2)\,A\,|x-\xi| \text{ für } n>2; \end{cases} \tag{20}$$

der Nenner ist positiv, wenn (15) erfüllt ist. Trägt man dieses in (19) ein, so erhält man mit der obigen Funktion W

$$| U_\nu' | \leqq A\,(1+|U_\nu|)\,(1+W(x)),$$

und hieraus (18) für $\nu \neq \lambda$. Weiter folgt aus (9)

$$U_\lambda'(x) = -\frac{u_\lambda'}{u_\lambda^2} = -U_\lambda \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\lambda} + \sum_{k\neq\lambda} U_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\varkappa} \right).$$

also nach (20)

$$| U_\lambda' | \leqq A\,| U_\lambda |\,(1 + \sum_{k\neq\lambda} U_k |)$$

$$\leqq A\,U_\lambda \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{1-A\,|x-\xi|} \\ \dfrac{(n-2)\,e^X}{n-1-e^X} \end{cases} \tag{21}$$

also wegen $U_\lambda(\xi)=1$

$$| U_\lambda(x) | \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{1-A\,|x-\xi|} \\ \dfrac{n-2}{n-1-e^X} \end{cases} \tag{22}$$

Trägt man dieses in die rechte Seite von (21) ein, so erhält man (18) auch für $\nu=\lambda$. Damit ist (18) vollständig bewiesen, soweit x dem Intervall (15) angehört und in diesem Intervall $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta_\lambda} \neq 0$, d. h, $U_\lambda(x)$ beschränkt bleibt. Da dieses aber nach (22) für jedes echte Teilintervall von (15) zutrifft, ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Anmerkung: Das schon bei Herrn Ważewski vorkommende Beispiel

$$\begin{cases} y_\nu' = -A \sum_{k=1}^{n} y_k & (\nu=1,\ldots,n-1) \\ y_n' = \quad A \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

mit $A > 0$ zeigt, dass die Zahl β nicht vergrössert werden kann. Denn die charakteristischen Funktionen sind hier, wenn $\xi = 0$ gewählt wird,

$$\varphi_\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \eta_\nu + \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n} \eta_k (e^{-A(n-2)x} - 1) \qquad (\nu=1,\ldots,n-1),$$

$$\varphi_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \eta_n + \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n} \eta_k (e^{-A(n-2)x} - 1),$$

und es ist

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_n} = 1 - \frac{1}{n-1}(e^{-A(n-2)x} - 1) = 0$$

für

$$-x = \frac{1}{(n-2)A} \log(n-1).$$

4. Hieraus ergibt sich nun mühelos der in Nr. 1 aufgestellte Satz. Denn es seien

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta) \quad (\nu=1,\ldots,n), \qquad z = \varphi(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta)$$

die charakteristischen Funktionen der zu (1) gehörigen charakteristischen Glen

$$y_\nu'(x) = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, z) \qquad (\nu=1,\ldots,n),$$
$$z'(x) = g(x, y_1, \ldots, y_n, z).$$

Für dieses System sind alle Vorraussetzungen von Nr. 2 erfüllt, nur ist das dortige n durch $n+1$ zu ersetzen; insbesondere ist der Streifen (2) ein charakteristisches Feld dieses Systems oder, was dasselbe bedeutet, der linearen homogenen DGl

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, \mathfrak{y}, z) \frac{\partial \omega}{\partial y_\nu} + g(x, \mathfrak{y}, z) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \qquad (23)$$

Lösungen dieser DGl sind daher in dem ganzen Streifen (2) die Funktionen

$$\varphi_\nu(\xi, x, \mathfrak{v}, z)$$

und

$$\varphi(\xi, x, \mathfrak{v}, z),$$

und ebenso

$$\omega = \psi(x, \mathfrak{v}, z) = \varphi(\xi, x, \mathfrak{v}, z) - \omega\bigl(\varphi_1(\xi, x, \mathfrak{v}, t), \ldots, \varphi_n(\xi, x, \mathfrak{v}, z)\bigr). \tag{24}$$

Nach Nr. 3 ist $\varphi_z > 0$ in dem Intervall (15), wo β durch (16) mit $n+1$ statt n bestimmt ist. Wegen

$$|\omega_{y_\nu}| \leqq C$$

folgt nun nach Nr. 3 für $|x - \xi| < \beta$, $\mathfrak{v}$ und z beliebig,

$$\psi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z}$$

$$\geqq \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(1 - C \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^{-1}\right|\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(1 - C \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu\right),$$

und hierin ist die Klammer, wenn $|x - \xi| < \alpha$ und somit $< \beta$ (mit $n+1$ statt n), etwa $|x - \xi| = \alpha - \delta$ ist, für $n = 1$ wegen (4)

$$\geqq 1 - C \frac{A(\alpha - \delta)}{1 - A(\alpha - \delta)} = \frac{1 - (C+1) A(\alpha - \delta)}{1 - A(\alpha - \delta)} \geqq \gamma > 0$$

und für $n \geqq 2$

$$\geqq 1 - nC \frac{e^{(n-1) A(\alpha - \delta)} - 1}{n - e^{(n-1) A(\alpha - \delta)}} =$$

$$> \frac{n(C+1) - (nC+1) e^{(n-1) A(\alpha - \delta)}}{n - e^{(n-1) A(\alpha - \delta)}} \geqq \gamma > 0.$$

Für jeden festen Punkt $x, \mathfrak{y}$ des Bereichs (3) gibt es also eine von z nicht abhängende Zahl $\gamma > 0$, so dass $\psi_z \geqslant \gamma$ ist. Daher hat die Gl $\psi = 0$ für jeden solchen Punkt $x, \mathfrak{y}$ genau eine Lösung $z = \chi(x, \mathfrak{y})$. Diese Funktion ist daher in (3) definiert und hat dort stetige partielle Ableitungen, ist somit ein Integral von (1), da ψ ein Integral von (23) ist. Schliesslich folgt aus (24)

$$0 = \psi(\xi, \mathfrak{y}, \chi(\xi, \mathfrak{y})) = \chi(\xi, \mathfrak{y}) - \omega(\mathfrak{y}),$$

d. h. χ erfüllt auch die vorgeschriebene Anfangsbedingung.