L'INSERTION DE NOUVEAUX ÉLÉMENTS DANS UN ENSEMBLE ORDONNÉ

par

ARNAUD DENJOY (Paris)

Quand on intercale un nouvel élément ou plusieurs entre ceux d'un ensemble ordonné, on ne change pas nécessairement le type d'ordination de celui-ci. Nous nous proposons de chercher des conditions générales où cette constance se manifeste le mieux.

1. Je rappelle les définitions usuelles ou adoptées dans le présent article en accord avec ma terminologie antérieure.[1])

Un ensemble E est dit *ordonné par une loi* O si, quels que soient les deux éléments distincts a et b de E, la loi O désigne l'un de ces éléments comme étant *antérieur* à l'autre (a antérieur à b s'écrit $a \prec b$) et celui-ci comme étant *postérieur* (ou ultérieur) au premier (b ultérieur à a s'écrit $b \succ a$) (p. 7).

L'ordination définie par O doit être *transitive*, en ce sens que si la loi O nous indique $a \prec b$ et $b \prec c$, appliquée au couple (a, c) elle doit nous donner $a \prec c$.

Si, E et E' étant ordonnés, E par une loi O, E' par une loi O', il est possible de mettre en correspondance les éléments a de E et les éléments a' de E' chacun à chacun, de façon que le sens des inégalités ordinales soit conservé (quels que soient a et b dans E, si a' et b' sont leurs homologues dans E', l'inégalité $a \prec b$ d'après O est concomittante à $a' \prec b'$ selon O'), les deux ensembles E et E' sont dits *semblables*, et la correspondance établie est appelée une *application conforme* des des deux ensembles l'un sur l'autre (p. 10—11).

Nous appelons *sections commençante, finissante, moyenne* d'un ensemble ordonné E des ensembles partiels C, D, I de E satisfaisant à ces conditions: Si a est dans la section commençante C, tout élément a' de E

---

[1]) A. Denjoy. *Enumération transfinie.* Livre I (Gauthier-Villars, 1946). Je renvoie dans le texte aux pages dc cet Ouvrage.

antérieur à a ($a' \prec a$) est dans C. Si b est dans la section finissante D, et si $b' \succ b$, b' est dans D. Si a et b sont dans la section moyenne I, avec $a \prec b$, tout élément c vérifiant $a \prec c \prec b$ est dans I. Il faut toutefois supposer, pour que I soit moyenne, l'existence de deux autres sections, l'une commençante antérieure à I, l'autre finissante ultérieure à I.

Dans l'application conforme de deux ensembles ordonnés semblables les sections de même nature, commençantes, finissantes, moyennes, se correspondent.

Un ensemble ordonné est dit *bien ordonné* si chacun de ses sous-ensembles contient un élément initial. Nous dirons qu'un ensemble est *anti-bien ordonné* si chacun de ses sous-ensembles contient un élément final. Le renversement d'une ordination étant par définition le remplacement de toutes les inégalités $a \prec b$ par les inégalités contraires $a \succ b$, l'anti-bonne ordination est le renversement d'une bonne ordination.

Convenons de dire qu'un ensemble de nombres, qu'un ensemble de points (ensemble linéaire), d'intervalles, de segment disjoints, portés par un axe dirigé, sont *normalement ordonnés* s'ils sont ordonnés dans le sens de la grandeur croissante des éléments géométriques, l'antériorité ordinale correspondant à l'infériorité de grandeur.

L'ensemble des entiers positifs, normalement ordonné, est bien ordonné. L'ensemble des entiers négatifs esf anti-bien ordonné.

Le caractère commun à un ensemble ordonné et à tous les ensembles ordonnés semblables à lui, indépendamment de la nature des éléments composant ces ensembles, est appelé le *type d'ordination* de tous.

Nous allons étudier certains types d'ordination remarquables et dont la connaissance préalable nous sera utile pour trouver des exemples d'ensembles ordonnés que l'insertion de nouveaux éléments laisse semblables à eux-mêmes.

2. L'ensemble E_1 étant supposé ordonné par une loi (ω), nous dirons que l'ensemble E_2, composé d'éléments étrangers à E_1 est *inséré dans* E_1 si l'on définit une loi d'ordination (O) de l'ensemble $H = E_1 + E_2$ de façon que 1° l'ordination mutuelle des éléments de E_1 est la même selon (O) et selon (ω); 2° quel que soit l'élément a de E_2, il existe dans E_1, en vertu de (O), un élément b antérieur à a et un élément c ultérieur à a.

Si l'ordination (O) *de* $H = E_1 + E_2$, définissant simultanément l'ordination de E_1 et celle de E_2, *insère* E_2 *dans* E_1 *et* E_1 *dans* E_2, il est aisé de voir que *ni* E_1 *ni* E_2 *n'ont d'élément initial ni d'élément final.*

Il nous suffit par exemple de prouver que E_1 n'a pas d'élément initial. Soit a_1 un élément quelconque de E_1. Je dis que a_1 n'est pas initial pour E_1; E_1 étant inséré dans E_2, E_2 contient un élément b_1 antérieur à a_1 dans H: E_2 étant inséré dans E_1, E_1 contient un élément a_2 antérieur à b_1 dans H. Donc a_2 est antérieur à a_1 selon l'ordination (O) de H. Et comme cette ordination est identique à celle de E_1 pour les éléments de ce dernier ensemble, a_2 est antérienr à a_1 dans E_1; a_1 n'est pas initial pour E_1.

Nous dirons que l'ensemble E_2 inséré dans E_1 par l'ordination (O) de $H = E_1 + E_2$ est *dissocié par* E_1 si entre deux éléments quelconques de E_2, E_1 possède au moins un élément.

Si H est l'ensemble de tous les entiers, positifs, négatifs et nul, chacun des deux ensembles respectivement formés des entiers pairs et des entiers impairs est inséré dans (et dissocié par) l'autre. Ces ensembles sont l'un et l'antre dépourvus d'élément extrème.

L'ensemble H_m des entiers $2^m(2j-1)$ (j entier positif, $m \geqslant 1$) est inséré dans l'ensemble H_p si $p < m$.

Si P est un ensemble parfait linéaire et H l'ensemble des extrémités de ses intervalles contigus, un ensemble E_1 contenant une extrémité et une seule de chacun des contigus de P et le complémentaire de E_1, soit $H - E_1 = E_2$ sont insérés l'un dans l'autre (et dissociés l'un par l'autre) en vertu de l'ordination normale de H.

3. Convenons de dire qu'une loi d'ordination (O) d'un ensemble E definit *un type de la classe* (Y) si, en vertu de (O), l'ensemble E n'a ni élément initial ni élément final, ni couple d'éléments consécutifs. Nous dirons encore que E est ordonné *au mode* (Y) par (O).

Exemple. — Un ensemble situé et partout dense sur un intervalle linéaire (les extrémités sont toujours exclues d'un intervalle) ordonné normalement est ordonné au mode (Y).

Tous les ensembles dénombrables ordonnés au mode (Y) sont semblables entre eux (p. 31—33). Nous désignerons leur type d'ordination par $(Y)_0$.

Exemples. — Sont du type $(Y)_0$ l'ordination normale de l'ensemble des nombres rationnels d'un intervalle, ou simplement de ses nombres dyadiques $\dfrac{2h-1}{2^k}$ $(k \geqslant 1)$, celle des intervalles contigus à un ensemble parfait linéaire totalement discontinu.

4. Théorème I. — *Si a et b sont deux éléments d'un ensemble E ordonné au mode (Y), la section moyenne (M) des éléments de E ordinalement compris entre a et b existe et est ordonnée au mode (Y).*

En effet: 1° (M) existe, sinon a et b seraient consécutifs, ce qui est impossible, l'ordination de E étant du mode (Y). Supposons $a \prec b$.

2° (M) n'a pas d'élément initial. Sinon a et cet élément seraient consécutifs dans E.

(M) n'a pas d'élément final. Sinon cet élément et b seraient consécutifs dans E.

Deux éléments quelconques de (M) ne sont jamais consécutifs, sinon ils le seraient dans E.

Théorème I$^{\text{bis}}$. *Quel que soit l'élément a de l'ensemble E ordonné au mode (Y), la section commençante $S(a, E)$ formée des éléments de E antérieurs à a, la section finissante $S'(a, E)$ formée des éléments de E ultérieurs à a sont des ensembles ordonnés au mode (Y).*

$S(a, E)$ existe et n'a pas d'élément initial, $S'(a, E)$ existe et n'a pas d'élément final, parce que E ne possède pas de tels éléments. Les autres caractères de $S(a, E)$ et $S'(a, E)$ justifiant le mode (Y) de leur ordination se démontrent comme par les sections moyennes.

5. Définition. — E_1 et E_2 étant deux ensembles disjoints et $H = E_1 + E_2$ leur réunion, nous dirons que *l'insertion mutuelle de E_1 et de E_2, réalisée par une ordination (O) de H, est du mode (Y)* si, entre deux éléments quelconques de E_1, (O) intercale une section de E_2 ordonnée au mode (Y) et entre deux éléments quelconques de E_2, (O) intercale une section de E_1 ordonnée au mode (Y).

Exemple. E_1 est l'ensemble des nombres rationnels non dyadiques, E_2 l'ensemble des nombres dyadiques, l'ordination (O) de l'ensemble H des nombres rationnels étant normale.

Si une ordination (O) de $H = E_1 + E_2$ insére mutuellement l'un dans l'autre E_1 et E_2 au mode (Y), E_1 et E_2 sont ordonnés par (O) au mode (Y).

Nous avons vu qu'étant insérés mutuellement l'un dans l'autre, E_1 et E_2 n'ont ni élément initial, ni élément final. E_1 n'a pas de couple d'éléments consécutifs. Car, entre deux éléments quelconques a_1, b_1 de E il existe une infinité d'éléments de E_2. Soient a_2 et b_2 deux de ces éléments. Entre a_2 et b_2 il existe une infinité d'éléments de E_1. Tous séparent a_1 de b_1. Donc a_1 et b_1 ne sont pas consécutifs dans E_1, E_1 est ordonné au mode (Y). Il en est de même de E_2.

6. Théorème II. *L'ordination (O) de $H = E_1 + E_2$ insérant au mode (Y) E_1 et E_2 l'un dans l'autre est elle-même du mode (Y).*

Nous savons que H n'a ni élément initial ni élément final. Car un tel élément appartenant soit à E_1 soit à E_2 serait initial ou final dans cet ensemble, ce qui est impossible.

Je dis que H n'a pas de couple d'éléments consécutifs. En effet, un tel couple ne pourrait pas être formé d'éléments a, b appartenant tous deux à E_1 ni tous deux à E_2, puisque E_1 et E_2 sont ordonnés au mode (Y). Ce serait donc un couple (a_1, b_2) dont un élément a_1 appartiendrait à E_1, l'autre élément b_2 à E_2. Supposons $a_1 \prec b_2$; a_1 n'est pas le dernier élément de E_1. Dans E_1 soit b_1 ultérieur à a_1; b_2 étant consécutif à a_1 dans H, b_1 est ultérieur à b_2: $a_1 \prec b_2 \prec b_1$. Entre a_1 et b_1, E_2 possède une section μ_2 de mode (Y). Or b_2 est l'élément initial de μ_2. (O) n'ordonne pas μ_2 au mode (Y). Nous aboutissons à une contradiction.

Puisque l'ordination de H par (O) est du mode (Y), en vertu du théorème I la section μ de H comprise entre deux éléments a, b quelconques de H est ordonnée au mode (Y).

R e m a r q u e. — Il ne suffirait pas que l'ordination (O) de $H = E_1 + E_2$ ordonnât au mode (Y) chacun des deux ensembles E_1 et E_2 et les insérât l'un dans l'autre même en les dissociant l'un par l'autre, pour que l'ordination (O) de H fût du mode (Y).

P étant un ensemble parfait linéaire totalement discontinu, soit E_1 l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus de P, E_2 l'ensemble de leurs extrémités droites. L'ordination normale de l'ensemble des points de première espèce de P, $H = E_1 + E_2$, ordonne E_1 et E_2 au mode (Y), et même plus précisément au type $(Y)_0$. Cette ordination insère E_1 et E_2 mutuellement l'un dans l'autre et les dissocie l'un par l'autre. Mais H n'est pas ordonné au type $(Y)_0$ puisque les extrémités de tout intervalle contigu forment un couple d'éléments consécutifs.

Il est à remarquer qu'entre deux éléments de E_1, E_2 possède une section infinie, dépourvue d'élément final. Mais cette section a un élément initial.

7. Théorème II$^{\text{bis}}$. — *La section μ de H comprise entre deux quelconques de ses éléments a et b réunit une section μ_1 de E_1 et une section μ_2 de E_2, toutes deux ordonnées au mode (Y).*

Montrons que μ_1 existe et est ordonnée au mode (Y).

1° Si a et b sont tous deux dans E_1, μ_1 existe et est ordonnée au mode Y, puisqu'il en est ainsi de E_1, comme nous l'avons montré.

2° Si a et b sont tous deux dans E_2, μ_1 existe et est ordonné au mode (Y), d'après la définition de l'insertion mutuelle de E_1 et de E_2 au mode (Y) par (O).

3° Supposons l'un des éléments a, b dans E_1, l'autre dans E_2, par exemple $a = a_1$ dans E_1, $b = b_2$ dans E_2. Si μ_1 n'existait pas entre a_1 et b_2, μ serait une section de E_2. Soit alors c_2 un point de μ. Entre

c_2 et b_2, nous trouvons le second cas que nous venons d'examiner. E_1 existe entre c_2 et b_2. Nous aboutissons à une contradiction. Donc μ_1 existe entre c_2 et b_2. Je dis que μ_1 est du type (Y). Si μ_1 avait un élément c_1, soit initial, soit final, celui-ci séparerait le reste de μ_1 soit de a_1 si c_1 était initial de μ_1 (a_1 et c_1 seraient consécutifs dans E_1, or cela est impossible), soit de b_2 si c_1 était final de μ_1. Mais dans ce second cas, nous venons de montrer que E_1 existerait entre c_1 et b_2. Donc μ_1 n'a pas d'élémeut extrême. μ_1, qui est une section moyenne de E_1, n'a pas de couple d'éléments consécutifs. L'ordination de μ_1 est selon le mode (Y)

De même μ_2 existe et est ordonné au mode (Y).

8. Soit maintenant H la réunion $H=E_1+E_2+\ldots$ d'une infinité *dénombrable* d'ensembles E_n, et (O) une ordination de H insérant au mode (Y) l'un dans l'autre les ensembles E_n et E_p quels que soient les indices n et p.

Exemple. Si E_m est l'ensemble des points de Ox d'abscisse

$$\frac{2h-1}{2^k} \quad (k \geqslant m, \quad h=2^{m-1}(2j-1), \quad 1<j \leqslant 2^{k-m}),$$

H est l'ensemble de tous les points dyadiques de l'intervalle (0, 1). Si H est normalement ordonné, les E_m sont mutuellement insérés les uns dans les autres au mode (Y), et même au mode $(Y)_0$ puisqu'ils sont dénombrables.

Théorème III. — *Si l'ordination (O) de l'ensemble $H=E_1+\cdots+$ $+E_n+\cdots$ insère l'un dans l'autre au mode (Y) les ensembles E_p, E_q quels que soient p et q, l'ordination (O) de H est du mode (Y) et, quels que soient les éléments a, b de H et l'indice n, les éléments de E_n soit antérieurs à a, soit ultérieurs à a dans E, soit compris entre a et b, existent et sont ordonnés par (O) au mode (Y).*

La démonstration de cet énoncé est en tous points semblable à celles des théorèmes II et II bis.

L'ordination de H est du mode (Y). On voit comme à propos du théorème II que H n'a ni élément initial, ni élément final (un ensemble E_p en aurait un de la même sorte), ni couple d'éléments consécutifs même appartenant à deux ensembles E_p, E_q distincts, d'après le théorème II appliqué à E_p+E_q).

Si l'élément a de H est dans E_r, l'application du théorème II à E_r+E_h montre que, les éléments de E_n antérieurs à a, les éléments de E_n ultérieurs à a forment quel que soit n des sections de E_n ordonnées par (O) au mode (Y). Soient a_r et b_p deux éléments quelconques de H appartenant respectivement à E_r et à E_p. Si $p = r$, l'ordination (O) insérant au mode (Y) E_r et E_n l'un dans l'autre $(n \neq r)$ quel que soit n, il s'ensuit que les éléments de E_n compris entre a_r et b_r forment une section moyenne de E_n ordonnée au mode (Y). Si $p \neq r$, le théorème II$^{\text{bis}}$ énonce que les sections moyennes μ_r et μ_p de E_r et de E_p comprises entre a_r et b_p existent et sont du mode (Y) en vertu de (O). Si n diffère de p et de r, il suffit d'appliquer le théorème II$^{\text{bis}}$ à a_r et à un élément b_r de la section μ_r de E_r et à E_n pour voir que E_n a une section moyenne comprise entre a_r et b_r. Soit μ_n la section moyenne de E_n comprise dans H entre a_r et b_r. Supposons $a_r \prec b_r$. Dès lors a_p existe dans E_p tel que $a_r \prec a_p \prec b_r \prec b_p$. D'après le théorème II appliqué à E_n et à E_r, μ_n est du mode (Y) entre a_r et b_r (μ_n n'a donc pas d'élément initial). D'après le même théorème appliqué à E_n et à E_p, μ_n est du mode (Y) entre a_p et b_p. En particulier μ_n n'a pas d'élément final. On voit immédiatement que μ_n n'a pas de couple d'éléments consécutifs, selon le raisonnement fait plus haut, puisque E_n n'en possède pas.

9. Limitons-nous ci-après aux ordinations du type $(Y)_0$ spécial aux ensembles dénombrables.

Deux ensembles dénombrables quelconques E et E' ordonnés au type $(Y)_0$ sont semblables et, à partir des énumérations de E et de E', il est aisé de réaliser leur application conforme (p. 31—33).

Théorème IV. — *Si deux collections $H = \Sigma E_n$, $H' = \Sigma E'_n$, l'une et l'autre composées d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables sont respectivement ordonnées par deux lois (O), (O'), insérant mutuellement au type $(Y)_0$ les E_n entre eux, les E'_n entre eux, il est possible de réaliser une application conforme (A) de H et de H' de façon que, pour chaque valeur de l'indice n, E_n et E'_n soient appliqués conformément l'un sur l'autre par (A).*

Notons d'abord que l'application conforme d'un ensemble particulier E_i sur son homologue E_i' ne laisse subsister aucune indétermination pour l'application conforme totale (A) de H et de H' l'un sur l'autre, si cette application (A) doit coincider avec la première pour E_i et E_i'. En effet, soit (A_1) donnée, appliquant conformément E_1 sur E_1', E_1 étant ordonné par (O) avec la totalité de H, E_1' l'étant par (O') avec la totalité de H'. Soit a_n un élément de E_n $(n > 1)$. Je dis que: ou bien il sera impossible de trouver une application conforme (A) de H sur H' coincidant avec (A_1) pour les éléments du couple (E_1, E_1'), ou bien l'homologue de a_n dans H' sera déterminé, sans qu'il appartienne nécessairement à E'. Simplement sera-t-il dans un ensemble E'_p d'indice $p \geqslant 2$.

En effet, les éléments de E_1 antérieurs à a_n dans H forment une section commençante $C(E_1)$ du type (Y) et de même les éléments de E_1 ultérieurs à a_n dans H forment une section finissante $D(E)$ du type (Y). Comme a_n est étranger à E_1, E_1 est la somme des deux sections disjointes $C(E_1)$ et $D(E)$. Les éléments de E_1' respectivement homologues de ceux de $C(E_1)$ et de ceux de $D(E_1)$ en vertu de l'application (A_1) forment respectivement deux sections de E_1', $C(E_1')$ commençante, $D(E_1')$ finissante, disjointes l'une de l'autre, et se partageant tous les éléments de E_1'; $C(E_1')$ et $D(E_1')$ sont d'ailleurs du type $(Y)_0$, connue $C(E_1)$ et $D(E_1)$.

Y a-t-il dans H' plus d'un élément a', ultérieur à $C(E_1')$ comme a_n est ultérieur à $C(E_1)$, et antérieur à $D(E_1')$ comme a_n est antérieur à $D(E_1)$? Nullement. Car entre deux tels éléments a', b' et d'après le théorème III, E_1' aurait une section moyenne infinie, du type $(Y)_0$, ce qui est absurde, puisque si $a' \prec b'$ tout élément de E_1' est soit antérieur à a', soit ultérieur à b'. Donc: ou bien H' ne possede aucun élément séparant $C(E_1')$ de $D(E_1')$, ou bien il en possède un et un seul. Dans le premier cas, l'application (A) [englobant (A_1)] n'existe pas. Dans le second cas, si elle existe (il faut pour cela que le premier cas ne se présente pour aucun élément a_n de E_n ni pour aucune valeur de $n \geqslant 2$), l'homologue de a_n dans H' est déterminé, et il n'appartient pas nécessairement à E_n', simplement à un E_p' avec $p \geqslant 2$.

10. Ces préliminaires expliquent le sens du théorème IV. Sa démonstration est très simple. Soient $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,p}, \ldots$, les éléments énumérés de E_n; $v_{n,1}, \ldots, v_{n,j}, \ldots$, ceux de E_n'. Ces ensembles sont infinis, puisqu'ordonnés par (O) et (O') respectivement, ils sont du type $(Y)_0$.

Nous nous proposons d'énumérer pour tous les indices n conjointement, les éléments de la suite $v_{n,j}$ en une suite $w_{n,p}$, de façon que la correspondance de $u_{n,p}$ à $w_{n,p}$ soit une application conforme de H et H' l'un sur l'autre, E_n et E_n' seront par là même appliqués conformément l'un sur l'autre.

Rangeons les E_n en une suite où chacun d'eux figurera une infinité de fois, par exemple E_n $(n \geqslant 1)$ passera aux rangs $\rho = \frac{(p+n-1)(p+n-2)}{2} + p$ pour $p \geqslant 1$. En représentant au rang ρ, l'ensemble E_n par son élément $u_{n,p}$, H se trouve énuméré sans omission ni répétition.

Cela posé, à $u_{1,1}$, élément de E_1 de plus faible second indice, nous faisons correspondre $w_{1,1} = v_{1,1}$, élément de E_1' de plus faible second indice. Supposons choisis les homologues $w_{r,s} = v_{r,k}$ des $(\rho - 1)$ premiers éléments $u_{r,s}$ de H, soit $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{1,2}, \ldots$, jusqu'a $u_{n,p}$ exclu, et de façon que l'ordre mutuel de ces $(\rho - 1)$ éléments $v_{r,k} = w_{r,s}$ dans H' ordonné par (O') soit le même que celui des $(\rho - 1)$ éléments $u_{r,s}$ correspoudants de H ordonné par (O). Soit à $u_{n,p}$ qui est dans E_n un homologue $w_{n,p}$ situé dans E_n'; $u_{n,p}$ se place, par rapport aux $(\rho - 1)$ éléments $u_{r,s}$ antérieurement examinés, dans l'un des ρ intervalles ordinaux de H limités par ces éléments, à savoir: soit avant eux tous, soit apres eux tous, soit entre deux de ces éléments les plus voisins $u_{n,p}$ de part et d'autre. Dans H' les $(\rho - 1)$ éléments $w_{rs,} = v_{r,k}$ déja choisis délimitent ρ intervalles ordinaux présentant la même disposition mutuelle que les intervalles de H limités par les homologues $u_{r,s}$ des $w_{r,s}$. L'un de ces intervalles de H' correspond à celui qui dans H contient $u_{n,p}$. Cet intervalle de H' contient une section de E_n', section commençante, finissante ou moyenne, mais infinie et même du type (Y_0). Dans cette section de E_n' nous prenons pour $w_{n,p}$ l'élément $v_{n,j}$ de plus faible indice j.

Il est évident que tout élément $u_{n,p}$ de H a un homologue $w_{np} = v_{n,j}$ dans H'. On voit comme dans le cas de l'application conforme de deux ensembles dénombrables ordonnés au type $(Y)_0$ (p. 32—33) que tout élement $v_{n,j}$ de H' est appelé à son tour pour correspondre à un élément $u_{n,p}$ de H. Il est manifeste que: 1° l'application ainsi réalisée (A) de H et de H' est conforme, elle conserve le sens des inégalités ordinales pour des couples d'éléments $(u_{r,s}, u_{n,p})$ ordonnés par (O) et pour leurs homologues $(v_{r,k}, v_{nj})$ ordonnés par (O'); 2° quel que soit n, (A) applique E_n et E_n' conformément l'un sur l'autre.

Un raisonnement analogue permet de démontrer ce théorème:

11. Théorème V. — *Si l'ensemble dénombrable $H = \Sigma E_n$ est ordonné par une loi (O) insérant au type $(Y)_0$ les ensembles E_n deux à deux les uns dans les autres, et si $e = \Sigma e_n$ est un ensemble dénombrable ordonné par une loi (O'), il est possible d'appliquer conformement e sur un ensemble partiel h de H, de façon que chacun des e_n soit respectivement appliqué sur $h. E_n$.*

On énumère en $u_{n,p}$ $(p = 1, 2, \ldots,)$ les éléments de e_n, la suite $u_{n,p}$ pouvant être finie pour certaines valeurs de n (sinon pour toutes). On énumère en $v_{n,j}$ les éléments de E_n. Et on appelle, comme nous l'avons fait, ci-dessus au rang ρ l'élément $u_{n,p}$. S'il existe à ce rang, on lui fait correspondre un élément $w_{n,p} = v_{n,j}$ offrant, par rapport aux éléments w_{rs} déjà choisis, la même disposition que $u_{n,p}$ respectivement aux $u_{n,s}$ déjà appelés. Il peut y avoir avantage, il n'y a pas nécessité, à prendre pour $w_{n,p}$ l'elément $v_{n,j}$ dont l'indice j est le plus faible parmi tous les possibles.

Insertion d'un élément nouveau dans un ensemble ordonné

12. Soit E un ensemble ordonné par une loi (O), C et D deux sections complémentaires de E, C commençante, D finissante. Ajouter à E un élément a intercalé ordinalement entre C et D, c'est obtenir un ensemble $E'=E+a$ (addition non ordinale) ordonné par une loi (O') ainsi définie: b et c étant deux éléments quelconques de E', 1° si b et c diffèrent tous les deux de a, le sens de l'inégalité ordinale de b et de c selon (O') est le même que selon (O): 2° si $c=a$, en vertu de (O'): $b \prec a$ si b est dans C, $b \succ a$ si b est dans D; E' est la somme ordinale $C+a+D$ (au sens $C \prec a \prec D$, p. 15).

Nous n'excluons pas le cas ou l'une des deux sections C et D disparaît, l'autre devenant identique à E (il n'y a plus en ce cas insertion de a dans E). En vertu de (O') et dans l'ensemble total E', l'élément ajouté a est soit antérieur à tout élément de E si C n'existe pas, soit ultérieur à tout élément de E si D n'existe pas.

Nous nous proposons d'examiner si, aux conditions précédentes, l'addition à l'ensemble E de l'élément a modifie nécessairement le type d'ordination de E.

13. Quelques considérations générales nous seront utiles.

Toute somme de sections commençantes d'un même ensemble ordonné E est une section commençante de E ou est identique à E. Nous entendons par somme de telles sections Γ de E, l'ensemble réunisant les éléments des diverses ensembles Γ, sans modifier l'ordre mutuel de ces éléments, tel que loi (O) ordonnant E le fixe.

De même toute somme de sections finissantes de E est une section finissante de E.

Soit (δ) la famille des sections finissantes D de E dépourvues d'élément initial. (δ) n'existe pas si E est bien ordonné. Je dis qu' *une section D est la plus grande de* (δ). Soit en effet δ_1 la somme des sections D; δ_1 est une section finissante de E, nous venons de le dire. Montrons que δ_1 est dans (δ). Sinon, δ_1 aurait un élément initial. Cet élément appartenant à une des sections D, soit à D_0, en serait aussi l'élément initial. D_0 ne serait pas dans la famille (δ). Nous aboutissons à une contradiction.

Notons $\delta_1(E)$ *la plus grande des sections finissantes de E dépourvues d'élément initial.* $\delta_1(E)$ est identique à E si E n'a pas d'élément initial. $\delta_1(E)$ est vide si E est bien ordonné.

Si E a un élément initial, soit $\gamma_1(E)$ *la section de E complémentaire de* $\delta_1(E)$ Je dis que $\gamma_1(E)$ *est bien ordonnée.* Il nous suffit de prouver que toute section finissante $D(\gamma_1)$ de $\gamma_1(E)$ a un élément initial (p. 44). En effet, si $D(\gamma_1)$ en était dépourvu, $D = D(\gamma_1) + \delta_1(E)$ (somme ordonnée) serait une section finissante de E, plus grande que $\delta_1(E)$ et dépourvue d'élément initial. D serait dans la famille (δ). Or $\delta_1(E)$ est la plus grande des sections D composant (δ). Donc $\gamma_1(E)$ est bien ordonné.

$\gamma_1(E)$ *est la plus grande section commençante bien ordonnée de E.* Soit en effet γ une section commeçante de E contenant $\gamma_1(E)$. Je dis que γ n'est pas bien ordonnée. $\gamma_1(E)$ et $\delta_1(E)$ étant complémentaires dans E, γ se décompose en $\gamma_1(E)$ suivie d'une section commençante de $\delta_1(E)$. Celle-ci est dépourvue d'élément initial comme $\delta_1(E)$ l'est elle-même. Donc γ n'est pas bien ordonné.

Si E n'a pas d'élément initial, $\gamma_1(E)$ est vide et $\delta_1(E) = E$. Si E est bien ordonné $\gamma_1(E) = E$ et $\delta_1(E)$ est vide.

14. D'une manière analogue, plaçons nous au point de vue de *l'anti-bonne ordination* (1) des ensembles. Le caractère d'un ensemble anti-bien ordonné E' est que tout ensemble partiel de E' et E' lui-même ont un élément final.

Soit directement, soit en renversant l'ordination de E, on voit que *tout ensemble ordonné E se décompose en deux sections complémentaires* $\gamma_2(E)$, $\delta_2(E)$, éventuellement l'une vide et l'autre identique à E, ainsi caractérisées: $\gamma_2(E)$ *est la plus grande section commençante de E dépourvue d'élément final;* $\delta_2(E)$ *est la plus grande section finissante anti-bien ordonnée de E;* $\gamma_2(E)$ est vide si E est anti-bien ordonné et alors $\delta_2(E) = E$; et $\delta_2(E)$ est vide si E n'a pas d'élément final.

15. Exemples. — 1° E est l'ensemble des nombres

$$x = -1/n, \quad 1 - 1/n, \quad 1 + 1/n, \quad 2 - 1/(n+1), \quad 2 + 1/n \quad (n \geqslant 2);$$

$\gamma_1(E)$ section commençante bien ordonnée majeure est $x < 1$;

$\delta_1(E)$ section finissante dépourvue d'élément initial et majeure est $x > 1$;

$\gamma_2(E)$ section commençante dépourvue d'élément final et majeure est $x < 2$;

$\delta_2(E)$ section finissante anti-bien ordonnée majeure est $x > 2$.

2° E est l'ensemble des nombres: $x=-1/n$, 0, p/q)p et q entiers vérifiant $2 \leqslant q$, $1 \leqslant p \leqslant q-1$), $1+1/n$ $(n \geqslant 1)$;

$\gamma_1(E)$ section commençante bien ordonnée majeure est $x \leqslant 0$;

$\delta_1(E)$ section finissante dépourvue d'élément initial et majeure est $x>0$;

$\gamma_2(E)$ section commençante dépourvue d'élément final et majeure est $x<1$;

$\delta_2(E)$ section finissante anti-bien ordonnée majeure est $x \geqslant 1$.

Si l'ensemble $\gamma_1(E) \cdot \delta_2(E)$ existe, il est à la fois bien et anti-bien ordonné, puisque cette section de E est section finissante de l'ensemble bien ordonné $\gamma_1(E)$ et section commençante de l'ensemble anti-bien ordonné $\delta_2(E)$. Cet ensemble est donc fini.

Par exemple, si l'ensemble E normalement ordonné est formé des nombres $x=-1/n$, $x=1+1/n$ $(n \geqslant 1)$, et de p nombres du segment $(0,1)$: $\gamma_1(E)$ est formé des $x \leqslant 1$, $\delta_2(E)$ des nombres $x \geqslant 0$, $\gamma_1(E) \cdot \delta_2(E)$ des p nombres vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$.

16. *Est-il possible qu'un ensemble ordonné E reste semblable à lui-même malgré l'addition d'un élément a en une place quelconque, a étant soit insére entre deux classes complémentaires C, D de E, soit disposé en élément initial ou en élément final de* $E'=E+a$ (addition ordinale)?

La réponse est négative. Observons que si deux ensembles E, E' sont semblables, leurs sections començantes bien ordonnés majeures $\gamma_1(E)$, $\gamma_1(E')$ sont sembables; et de même leurs sections finissantes anti-bien ordonnées majeures $\delta_2(E)$, $\delta_2(E')$ sont semblables entre elles.

Que $\gamma_1(E)$ soit vide (E n'a pas d'élément initial) ou existe avec $\delta_1(E)$ (une section finisante de E, mais non pas E lui-même, est dépourvue d'élément initial), ou soit identique à E (E est bien ordonné),. plaçons a imédiatement ultérieur à $\gamma_1(E)$ et antérieur à $\delta_1(E)$ (donc avant E si E n'a pas d'élément initial, après E si E est bien ordonné); $\gamma_1(E')$ est $\gamma_1(E)+a$ (addition ordinale); $\gamma_1(E')$ existe; $\gamma_1(E)$ est vide ou segment de $\gamma_1(E')$). Donc E et E' sont dissemblables.[1]

On verrait de même que, $\delta_2(E)$ étant soit vide (E n'a pas d'élément final), soit existant mais non identique à E (une section commençante de E, mais non pas E lui-même, est dépourvue d'élément final), soit identique à E (E est anti-bien ordonné), si a est placé immédiatement avant $\delta_2(E)$ et après $\gamma_2(E)$ (ultérieurement à E si $\delta_2(E)$ est vide, antérieure-

[1]) Cette proposition avait deja été démontrée en 1930 par Q. Z. Chajolh (Fundamenta Mathématicae, vol. XVI, p. 133), et par la même voie.

ment à E si E est anti-bien ordonné), $\delta_2(E')$ existe et, si $\delta_2(E)$ existe aussi, $\delta_2(E)$ est un anti-segment de $\delta_2(E')$. Il y a encore dissimilitude entre E et E'.

En conséquence, *l'addition ordinale à un ensemble E d'un nouvel élément a ne pourra pas donner toujours un ensemble-somme semblable à E.* Etudions dans quel cas cette similitude aura lieu.

17. Evidemment si E est fini, $E' = E + a$ est dissemblable à E, quelle que soit la place donnée à a par rapport aux éléments de E. Supposons ci-après E infini.

Ajoutons d'abord a antérieurement à E. La somme E' est ordinalement $a+E$. Ecrivons $E = \gamma_1(E) + \delta_1(E)$, $E' = \gamma_1(E') + \delta_1(E')$, $\gamma_1(E')$, section commençante bien ordonnée majeure de E', est $a + \gamma_1(E)$ (somme ordinale). D'ailleurs $\delta_1(E') = \delta_1(E)$. En conséquence, pour que E et E' soient semblables, il faut et il suffit que $\gamma_1(E)$ et $a + \gamma_1(E)$ le soient. Donc E et E' sont dissemblables si $\gamma_1(E)$ est fini ou nul; E et E' sont semblables si $\gamma_1(E)$ est fini.

Ajoutons a ultérieurement à E. La somme E' est ordinalement $E + a$, $\delta_2(E')$, section finissante anti-bien ordonnée majeure de E', est $\delta_2(E) + a$ (somme ordinale). Et $\gamma_2(E') = \gamma_2(E)$. Donc E et E' sont dissemblables si $\delta_2(E)$ est fini ou nul. E et E' sont semblables si $\delta_2(E)$ est infini.

Soint C et D deux sections complémentaires de E, C commençante, D finissante, existant l'une et l'autre. Insérons a entre C et D. L'ensemble E' obtenu est la somme ordinale $C + a + D$.

Si l'ensemble $\delta_2(C)$ est infini, $(C + a)$ (somme ordinale) est semblable à C. Si $\gamma_1(D)$ est infini, $(a + D)$ (somme ordinale) est semblable à D. Donc si $\delta_2(C) + \gamma_1(D)$ est infini, E' est semblable à E. Si $\delta_2(C)$ et $\gamma_1(D)$ sont l'un et l'autre finis ou vides, le type de l'ensemble intermédiaire $\delta_2(C) + \gamma_1(D)$ est altéré par l'addition de a entre C et D. Toutefois cela ne prouve nullement que le type $T(E)$ soit modifié par l'introduction de a entre les deux sections C et D.

Par exemple, supposons que l'ordination de E soit du type $(Y)_0$ (pas d'élément initial, pas d'élément final, pas de couple d'éléments consécutifs, et E est dénombrable) et soient C, D deux sections complémentaires dépourvues, C d'élément final, D d'élément initial (si E est l'ensemble des nombres rationnels, C et D sont les deux sections séparées par un nombre irrationnel). L'addition de a entre C et D ne change pas le type de E. Cependant $\delta_2(C) + \gamma_1(D)$ est vide. (Il en est de même si E est l'ensemble des points des intervalles i_n $(n < x < n+1)$, n entier quelconque, et si C est l'ensemble des intervalles de rang $n < p$, D celui des intervalles $n \geqslant p$).

Au contraire, si $C = C(b)$, b étant un certain élément de E et $C(b)$ désignant la section commençante de E admettant b pour dernier élément, a intercalé entre C et $D = E - C(b)$, nous donne un ensemble E' possédant un couple d'éléments consécutifs, donc dissemblable de E.

18. Proposons-nous de *chercher s'il est possible qu'un ensemble E satisfasse aux conditions suivantes:*

1° *Pour toute division de E en deux sections complementaires non vides, C commençante et D finissante, l'ensemble $\delta_2(C)+\gamma_1(D)$ est fini ou vide;*

Notons immédiatement que *cette première condition exclut les cas où soit $\gamma_1(E)$, soit $\delta_2(E)$ sont infinis.* Car, si $\gamma_1(E)$ est infinie, $\gamma_1(E)$ bien ordonnée et infinie admet des sections commençantes finies. Une telle section est section commençante C pour E. La section finissante majeure anti-bien ordonnée $\delta_2(C)$ est C elle-même; la section commençante bien ordonnée majeure de $D = E - C$, soit $\gamma_1(D)$, est la section finissante de $\gamma_1(E)$, complémentaire de C. Elle est infinie. Donc $\delta_2(C)+\gamma_1(D)$ est infinie, et E ne remplit pas la première condion posée. De même $\delta_2(E)$ infini est impossible.

2° *L'addition ordinale d'un élément nouveau a entre C et D n'altère pas le type d'ordination de E.*

En conséquence, $\gamma_1(E)$ et $\delta_2(E)$ sont vides. Nous avons vu qu'ils ne peuvent pas être infinis. Si $\gamma_1(E)$ existe, nécessairement fini, $\delta_2(E)$ existe, puisque E est infini, a inséré entre $\gamma_1(E) = C$ et $\delta_2(E) = D$, donne un ensemble E' dissemblable de E (16). Or, si $\delta_2(C) = C = \gamma_1(E)$, qui est fini, $\gamma_1(D)$ est vide. Donc, bien que $\delta_2(C)+\gamma_1(D)$ soit fini, la seconde condition est mise en défaut.

En résumé, $\gamma_1(E)$ et $\delta_2(E)$ sont vides, si les deux conditions imposées à E sont vérifiées. E ne peut avoir ni élément initial ni élément final.

19. Voici un exemple remplissant toutes les conditions imposées à E.

Soit P un ensemble parfait linéaire d'extrémités b, c et $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ses intervalles contigus énumérés. Ordonné normalement (dans le sens des abscisses croissantes) l'ensemble I des u_n est semblable à l'ensemble η des nombres dyadiques, lui aussi ordonné normalement. Supposons que, si $\theta_n = \dfrac{2h-1}{2^k}$ $(k \geqslant 1,\ 1 \leqslant h \leqslant 2^{k-1},\ n = 2^{k-1} + h - 1)$ la correspondance (u_n, θ_n) effectue l'application conforme des ensembles I et η, tous deux du type $(Y)_0$. Pour toute valeur positive de l'entier m, distinguons dans I la classe I_m des intervalles u_n correspondant à $h=2^{m-1}$ $(2j-1)$ $k \geqslant m$, $1 \leqslant 2j \cdot 1 \leqslant 2^{k-m}$). L'intervalle u_n correspondante de I_m sera noté $u_{m,k,j}$, $(n=2^{k-1}+2^{m-1}(2j-1)-1)$.

Pour $k=m$ et $k=m+1$, j prend l'unique valeur 1 ($n=2^m-1$ et $n=3$, $2^{m-1}-1$ respectivement), ce qui donne dans I_m les intervalles $u_{m,m,1}$ et $u_{m,m+1,1}$. La classe I_1 des $u_{1,k,j}$ ($j=1$ pour $k=1$, $k=2$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{h-2}$ pour $k \geqslant 2$) correspond aux $\theta_n=\frac{4j-3}{2^k}$ $(n=2^{k-1}+2j-2)$; Les intervalles de I_1 sont $u_{1,1,1}$ correspondant à $\theta=1/2$, puis $u_{1,2,1}$, correspondant à $\theta_2=1/4$, $u_{1,3,1}$ correspondant à $\theta_4=1/8$, $u_{1,3,2}$ homologue de $\theta_6=5/8$, etc.

L'ordination normale de I réalise l'insertion mutuelle au type $(Y)_0$ de toutes les classes I_m les unes dans les autress.

20. E sera constitué de la façon suivan[e. Pour $m=1,2,\ldots$, dans chaque intervalle $u_{m,k,j}$ de I_m, E est formé de m points, indépendamment de k et j.

E n'a ni élément initial, ni élément final. Je dis que l'addition à E de tout point a, situé sur l'intervalle bc et étranger à E laisse inchangé le type d'ordination de E.

En effet, distinguons deux cas, selon que a est un point de seconde espece de P ou que a appartient à un segment contigu à P.

Premier cas. — a est un point de seconde espece de P. Tout élément de I (tout intervalle u_n) est soit antérieur soit ultérieur à a. Ces intervalles se partagent en deux sections de I, $C(I)$ commençante, à gauche de a et $D(I)$ finissante, à droite de a; I étant ordonné normalement, $C(I)$ n'a pas de dernier élément u_n, ni $D(I)$ de premièr élément. $C(I)$ est la réunion de sections commençantes $C(I_m)$ et l'ordination normale de $C(I)$, celle de D I), insèrent respectivement au type $(Y)_0$ les ensembles $C(I_m)$, $C(I_p)$ entre eux, les ensembles $D(I_m)$, $D(I_p)$ entre eux, les uns dans les autres, quels que soient les indices m et p.

Faisons correspondre à a le point de E situé sur un intervalle quelconque $u_{1,k,j}$ de I_1; $u_{1,k,j}$ sépare dans I deux sections $\Gamma(I)=S(u_{1,k,j}, I)$ commençante, $\Delta(I)=S'(u_{1,k,j}, I)$ finissante, toutes deux du type (Y); $\Gamma(I)$ réunit les sections commençantes $\Gamma(I_m)$ de I_m; $\Delta(I)$ les sections finissantes $D(I_m)$ des I_m, et l'ordination normale de $\Gamma(I)$, celle de $\Delta(I)$ insèrent au type $(Y)_0$ respectivement les ensembles $\Gamma(I_m)$, $\Gamma(I_q)$ les uns dans les autres, les ensembles $\Delta(I_m)$, $\Delta(I_p)$ les uns dans les autres, quels que soient m et p.

En vertu du théorème IV nous pouvons appliquer conformément $C(I)$ sur $\Gamma(I)$ de façon que $C(I_m)$ s'applique sur $\Gamma(I_m)$ et conformément

$D(I)$ sur $\Delta(I)$ de façon que $D(I_m)$ s'applique sur $\Delta(I_m)$, pour toutes les valeurs de m simultanément.

Cela fait, pour chaque intervalle $u_{m,p,q}$ de $C(I)$ ou de $D(I)$ s'appliquant sur un intervalle $u_{m,r,s}$ de $\Gamma(I)$ ou de $\Delta(I)$ respectivement, et de la même classe I_m, appliquons l'un sur l'autre la suite croissante des m points de E situés sur $u_{m,p,q}$ et la suite croissante des m points de E situés sur $u_{m,r,s}$. La section commençante de E', $S(a, E')$, formée des éléments de E' antérieurs à a, s'applique conformément sur la section commençante de E formée des éléments antérieurs au point unique de E situé sur $u_{1,k,j}$. De même, la section finissante de E' ultérieure à a s'applique sur la section finissante de E ultérieure à $u_{1,k,j}$. Appliquons enfin le point a de E' sur l'unique point de E situé sur $u_{1,k,j}$. L'application conforme de E et de E' est complement effectuée.

Second cas. — Si a est sur un segment contigu à P et précisément sur le segment $u_{r,i,p}$ $(r \geqslant 1)$, E possède r points sur ce segment et E' y contient $r+1$ points. Nous faisons correspondre à $u_{r,i,p}$ rapporté à I' (identique à I) un intervalle quelconque $u_{r+1,m,s}$ de I_{r+1} rapporté à I. Nous appliquons comme dans le premier cas la partie de E' située à gauche du segment $u_{r,i,p}$ sur la partie de E située à gauche de $u_{r+1,m,s}$, puis la section finissante de E' située à droite du segment $u_{r,i,p}$ sur la section finissante de E située à droite de $u_{r+1,m,s}$. Il ne reste plus à opérer que l'application mutuelle des deux suites croissantes de $r+1$ points, celle de E' située sur le segment $u_{r,i,p}$, celle de E située sur le segment $u_{j+1,m,s}$. L'application conforme de E et de E' est achevée. E et E' sont semblables.

L'insertion d'un élément nouveau entre deux sections complémentaires, mais effectives, de E n'altère donc jamais son ordination.

21. On peut étendre les considérations précédentes.

Convenons de dire qu'un ensemble ordonné U est *irrégulier* s'il n'est ni bien ordonné ni anti-bien ordonné. Un tel ensemble est infini. Et (p. 45): ou bien U est non fermé (il contient deux sections complémentaires non vides, C commençante dépourvue d'élément final, D finissante privée d'élément initial, p. 21); ou bien U est fermé, maie il contient à la fois un élément non terminal privé de conséquent (ordinalement limite du côté ultérieur à cet élément, p. 17) et un élément non initial privé d'antécédent (ordinalement limite du côté antérieur à cet élément); ou bien U est fermé et tout élément non terminal a un conséquent, mais U n'a pas d'élément initial (voir l'exemple de la page 133), sinon U est fermé et tout élément non initial a un précédent mais U n'a pas d'élément final.

Nous dirons qu'un ensemble ordonné H *débute irrégulièrement*, ou qu'il *s'achève irrégulièrement*, si respectivement toute section commençante $\gamma(H)$ de H ou toute section finissante $\delta(H)$ de H est irrégulière. Notons qu'en ce cas, toute section, soit $\gamma(H)$, soit $\delta(H)$ est infinie, donc $\gamma(H)$ est sans élément initial, $\delta(H)$ sans élément final respectivement.

Dans un ensemble G ordonné par une loi (O) caractérisons ainsi des sections moyennes que nous qualifierons de *régulières*. Leurs *types d'ordination* appartiennent à l'une des especes suivantes: $\tau(m)$, $\tau(\alpha)$, $\tau(-\beta)$, $\tau(-\theta, \varepsilon) = \tau(-\theta) + \tau(\varepsilon)$; m est un entier fini positif, $\alpha, \beta, \theta, \varepsilon$ des nombres ordinaux transfinis, $\tau(-\beta)$, $\tau(-\theta)$, sont les types d'ordination définis par le renversement des types $\tau(\beta)$, $\tau(\theta)$.

D'autre part, une section moyenne réguliere σ est *majeure*, en se sens qu'elle n'est pas incluse dans une section moyenne de l'un des types précédents. Soient C et D les sections, C commençante, D finissante, formant le complément de σ. Pour une section réguliere $\sigma(m)$ de type $\tau(m)$, C s'achève irrègulierement et D débute irrégulièrement. Pour $\sigma(\alpha)$ de type $\tau(\alpha)$, C s'achève irrégulierement, D n'a pas d'élément initial. Pour $\sigma(-\beta)$ de type $\tau(-\beta)$, C n'a pas d'élément final et D commence irréguliérement. Pour $\sigma(-\theta, \varepsilon)$ de type $\tau(-\theta, \varepsilon)$, C n'a pas d'élément final et D n'a pas d'élément initial.

Désignons respectivement par $J(m)$, $J(\alpha)$, $J(-\beta)$, $J(-\theta, \varepsilon)$ les ensembles ayont pour éléments respectifs les sections $\sigma(m)$, $\sigma(\alpha)$, $\sigma(-\beta)$, $\sigma(-\theta, \varepsilon)$, de G, ces σ constituant les divers ensembles $J(m)$, etc. s'ordonnant entre elles en accord avec la loi d'ordination (O) de G. Soit J l'ensemble ayant pour éléments les sections régulières de G.

Supposons que, G étant dénombrable: 1° J est composée d'une infinité de familles $J(\lambda)$, la notation λ figurant l'une des précédentes, savoir m, α, $-\beta$, $(-\theta, \varepsilon)$, et l'ordination (O) insère les unes dans les autres au type $(Y)_0$ les diverses familles $J(\lambda)$; 2° tout point de G fait partie d'une section régulière.

Il est aisé de voir que la donnée des nombres m, α, β, et des systemes $(-\theta, \varepsilon)$ défini un type d'ordination unique pour tous les ensembles G remplissant les conditions citées. En effet, les nombres m, α, β et systemes $(-\theta, \varepsilon)$ sont en infinité dénombrable. En les énumérant en une liste unique, on peut sur chacun des intervalles contigus à P appartenant à la famille I_r (ces intervalles correspondent ordinalement aux $\theta_n = \dfrac{2h-1}{2^h}$ si

$h=2^{r-1}(2j-1)<2^{k-1}$) placer des suites du type $\tau(m)$, $\tau(\alpha)$, $\tau(-\beta)$. ou $\tau(-\theta,\varepsilon)$, don le rang d'énumération est r. On obtient ainsi sur l'axe des x un ensemble H. Tous les ensembles G de la classe considérée sont ordinalement sembables à H, donc semblables entre eux.

Toute insertion d'éléments dans G laisse inchangée l'ordination de G si cette introduction substitue à G un nouvel ensemble de la même classe.

22. Considérons la classe des ensembles G ordonnés dénombrables, vérifiant ces conditions:

1° $J(m)$ existe pour toute valeur entière positive de m;

2° Si $J(\alpha)$ existe pour une valeur de α, $J(\alpha+p)$ existe quel que soit $p\geqslant 1$; si $J(-\beta)$, si $J(-\theta,\varepsilon)$ existent, respectivement $J(-\beta-p)$, $J(-\theta-q,\ \varepsilon+r)$ existent quels que soient $p>1$, q et r entiers non négatifs, avec $q+r\geqslant 1$;

3° Tout point de G appartient à une section réguliere (pouvant être réduite à ce seul élément);

4° L'ordination (O) de G insère les uns dans les autres les ensembles existants $J(m)$, $J(\alpha)$, $J(-\beta)$, $J(-\theta,\varepsilon)$.

On peut insérer dans G un élément a en une place quelconque sans changer le type ordinal de G.

Plus généralement, insérons dans l'ensemble G un ensemble e vérifiant ces conditions:

1° les éléments de e séparant une partie commençante de J dépourvue d'élément σ final et une partie finissante de J privée d'élément σ initial sont en nombre fini ou en infinfté dénombrable; en ce dernier cas ils sont dissociés par J; .

2° les éléments de e insérés dans une même section réguliere σ de G, ou placés en tête, ou placés en fin de cette section sont en nombre fini;

3° X désignant l'un quelconque des ensembles $J(m)$, $J(\alpha)$, et si l'on divise X en deux groupes, X' formé de ssections σ auxquelles e ajoute des points, X'' formé des sections σ que e n'accroit pas, X' et X'' sont insérés l'un dans l'autre au type $(Y)_0$ (il suffirait même que X'' fut inséré dans X' et disocié par X').

Dans ces conditions l'introduction de e dans G ne change pas le type d'ordination (O) de G. Car G reste dans la même classe.

En effet, soit H l'ensemble ordonné résultant de l'insertion de e dans G. L'ensemble (T) des types $T(\lambda)$ des sections régulières des deux ensembles G et H est le même (il en serait pareillement encore si, les éléments de e ajoutés à l'une des suites σ étant en infinité cette suite modifiée σ était changée en une suite régulière, dont le type appartiendrait toujours à T).

Soient $K(m)$, $K(\alpha), \ldots$, génériquement $K(\lambda)$, les familles composées des sections régulières de H ayant pour types respectifs $\tau(m)$ $\tau(\alpha), \ldots$, génériquement $T(\lambda)$. Je dis que les familles $K(\lambda)$ s'insèrent les unes dans les autres au type $(Y)_0$.

Soit $J(\lambda) = X$ la famille des sections régulières σ de G dont le type est $T(\lambda)$; $K(\lambda) = Y$ se décompose en Y' et Y'', Y' étant la famille identique à X' formée des sections régulières υ' de H (identiques à des σ' de G), non modifiées par l'insertion de e dans G et de type $T(\lambda)$; Y'' est formée des sections régulières υ'' de H dont le type est $T(\lambda)$, mais qui proviennent de l'addition à une section régulière σ'' de H d'au moins un élément fourni par e. Le type de la section σ'' pouvait être $T(\lambda)$, ou sinon il était d'un ordre moins complexe que $T(\lambda)$.

Soient υ_1 et υ_2 deux sections régulières quelconques de H, donc deux éléments quelconques de K. Prouvons que $K(\lambda) = Y$ possède, entre υ_1 et υ_2 comme bornes, une section moyenne Λ de type $(Y)_0$. Et tout d'abord montrons que Λ existe et ne possède pas d'élément initial. υ_1 et υ_2 occupent la place des sections régulières σ_1 et σ_2 de G, dont elles ne diffèrent que par l'adition (éventuellement inexistante) d'éléments de e. L'ensemble J des sections régulières σ de G a une section moyenne Γ bornée ordinalement par σ_1 et σ_2 et le type de Γ est $(Y)_0$. Dans Γ se trouve une section Δ de $J(\lambda) = X$ et si $\Theta = \Gamma - \Delta$, les deux ensembles (dont les éléments sont des sections régulières σ de G) Δ et Θ sont insérés l'un dans l'autre au type $(Y)_0$. Tout élément de Θ est précédé d'un élément de Δ (et récipoquement). Or, Δ se décompose en Δ' et Δ'', qui sont respectivement les sections moyennes de X' et de X'' bornées par σ_1, σ_2; Δ' est en même temps une section moyenne Λ'' de $Y' = X'$ bornée par υ_1, υ_2; Δ n'ayant pas d'élément σ initial et X', X'' étant insérés l'une dans l'autre au type $(Y)_0$, ni Δ' ni Δ'' n'ont d'élément initial et tout élément σ de Θ est précédé par un élément $\sigma' = \upsilon'$ de $\Delta' = \Lambda'$. En conséquence la section moyenne Λ de $K(\lambda) = Y$ bornée par υ_1, υ_2 et qui contient Λ' n'a pas d'élément initial, puisque chacun de ses éléments (υ' ou υ'') est précédé par un élément de Λ', donc de Λ elle-même.

De même Λ n'a pas d'élément final.

Enfin, Λ n'a de couple d'éléments consécutifs, puisqu'entre deux éléments quelconques de K, il y a toujours une section moyenne infinie de $K(\lambda)$.

Ce qui précède s'applique à la famille K (1) correspondant au type $T(\lambda)$ identique à $\tau(1)$. D'après nos hypothèses, tous les éléments de e insérés dans G sans s'ajouter à aucune section régulière σ forment dans H des sections régulières réduites à un seul élément (comprises entre une section commençante de H s'achevant irrégulierement et une section finissante de H débutant irrégulierement) Leur réunion est l'ensemble Y'' relatif à $Y=K(1)$.

En conséquence, les familles $K(\lambda)$ composant K et dont chacune est la collection des sections régulières υ de H ayant un même type $T(\lambda)$, sont insérées les unes dans les autres au type $(Y)_0$.

En résumé, H est uniquement composé de sections régulières υ dont les types $T(\lambda)$ forment le même ensemble T que les types des sections régulières σ de G. Les familles $K(\lambda)$ groupant respectivement les sections du type $T(\lambda)$ s'insèrent les unes dans les autres au type $(Y)_0$, de la même façon que les familles $J(\lambda)$ des sections de G ayant pour types respectifs les $T(\lambda)$. Les deux ensembles G et H sont donc semblables. L'insertion de e dans G n'en a pas troublé l'ordination.