REMARQUE SUR LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES DU MÊME SIGNE

par

DJURO KUREPA

$$f=f(0)+if(1), \quad g=g(0)+ig(1) \tag{1}$$

étant deux nombres complexes, si l'on convient que la relation

$$f \leqslant g \text{ ou la relation } g \geqslant f \tag{2}$$

soit équivalente au système

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant g(0) \\ f(1) &\leqslant g(1) \end{aligned} \tag{3}$$

l'ensemble K des nombres complexes devient partiellement ordonné. Mais l'inégalite $ii<0$ montre que le produit de deux nombres positifs peut être négatif, ce que montre que le lemme 4.5 d'une note[1] n'est pas exact.

Or, si l'on dit que le nombre complexe f est *complètement inférieur* au nombre complexe g, symboliquement

$$f \langle\langle g \tag{4}$$

ou que $g \rangle\rangle f$ (g est complètement supérieure à f), si et seulement si

$$f(0)<g(0), \quad f(1)<g(1),$$

on démontre les deux lemmes 4.5′, 4.6′ que voici et qu'il faut substituer aux lemmes 4.5 et 4.6 de la Note précitée:

Lemme 4.5′. Si $f \langle\langle 0$, $g \langle\langle 0$ ou si $f \rangle\rangle 0$, $g \rangle\rangle 0$, alors fg non $\langle\langle 0$: ce qu'on peut exprimer en disant que le produit de deux nombres complexes complètement négatifs (complètement positifs) ne peut pas être complètement négatif.

Lemme 4.6′. Si $f \langle\langle g$ et $z \rangle\rangle 0$, alors fz non $\rangle\rangle gz$.

---

[1]) Georges Kurepa, Sur la définition et l'ordination des nombres complexes (Ce journal, 3 (1950), 89—99).

Si $f \langle\langle g$ et $z \langle\langle 0$, alors fz non $\langle\langle gz$. Que les signes $\langle\langle$ et $\rangle\rangle$ n'y peuvent pas être remplacés par les signes $<$ et $>$ respectivement, on le voit en multipliant l'inégalité $2i < 3i$ par le nombre positif i.

La démonstration des lemmes précédents est immédiate. Les raisonnements dont j'avais fait usage pour „demontrer" les lemmes 4.5 et 4.6 de la Note s'appliquent à la démonstration des lemmes 4.5′ et 4.6′ respectivement.

Ainsi, par exemple, si $f \rangle\rangle 0$, $g \rangle\rangle 0$, on aura $f(0) > 0$, $f(1) > 0$, $g(0) > 0$, $g(1) > 0$ et par conséquent aussi

$$f(0)\,g(1) + f(1)\,g(0) > 0$$

c'est-à-dire $(fg)(1) > 0$; on a donc pas $fg \langle\langle 0$ ce qui montre le lemme 4.5′.

Remarque. Si l'on ordonne le continu complexe K des nombres complexes de manière que pour les nombres (1) la relation $f \leqslant g$ soit équivalente non pas à (3) mais que $f \leqslant g$ signifie ou bien

$$f(0) = g(0) \quad f(1) = g(1)$$

ou bien

$$f(0) < g(0) \quad f(0) \leqslant g(1),$$

on obtient un ordre partiel de K pour lequel toutes les conclusions de la Note citée s'appliquent (dans le nouvel ordre les nombres imaginaires pures sont incomparables deux à deux).