SUR LES DÉVERSOIRS SANS AÉRAGE

par

C. WORONETZ

I. Généralités

Les travaux théoriques sur les déversoirs se rapportent habituellement à des déversoirs comportant un dispositif quelconque permettant le libre accès de l'air dans la région sous la nappe déversante. Nous étudions ici les déversoirs sans aérage, c'est à dire ne contenant pas un tel dispositif. Le courant d'eau tendant à entraîner l'air qui se trouve dans la région sous la nappe, la pression y change et la nappe se déforme. Le coefficient de débit d'un déversoir sans aérage est souvent plus grand que celui d'un dévorsoir aéré, mais l'on applique ces derniers presque exclusivement dans l'hydraulique industrielle. On trouve facilement l'explication de cet usage dans les changements brusques de débit, dans l'instabilité de la nappe déversante et, comme conséquence, dans les vibrations de la construction entière.

Plusieurs essais de l'étude théorique des déversoirs sont connus. Citons, par exemple, les travaux de *Boussinesq* [1] sur un cas spécial de déversoir dont la forme ressemble bien à celle d'un orifice muni de l'ajutage de Borda. Pour aborder le problème, Boussinesq a été obligé de faire plusieurs hypothèses complémentaires à celles que l'on fait pour établir les équations de Euler. En supposant que la surface de la nappe soit donnée par une simple fonction, *Blasius* [2] a résolu le problème de déversoir par la représentation conforme. Les résultats qu'il a obtenus correspondent bien à la forme de la nappe, mais la vitesse du courant à l'intérieur de la nappe ne satisfait pas à des conditions nécessaires. *Runge* [3] a établi une méthode grafique pour représenter le mouvement fluide, mais sous la condition que la surface extérieure de la nappe est donnée grafiquement.

L'analogie entre l'écoulement par les orifices et celui qui se produit par les déversoirs est bien connue. D'après *Poleni* [4] on peut considérer

un déversoir comme un orifice dont le bord supérieur est relevé jusqu'au niveau de la surface libre du liquide et ensuite supprimé comme inutile. On pourrait donc penser que les beaux travaux de *Kirchhoff* [5] et de *Mises* [6] sur l'écoulement par les orifices pourraient être facilement étendus sur l'écoulement par les déversoirs. Mais les données expérimentales n'ont pas confirmé cette supposition. Pour résoudre le problème de l'écoulement par la méthode de Kirchhof il faut supposer que la vitesse reste constante le long des lignes de courant sur la surface de la nappe, c'est à dire, qu'il faut négliger l'influence de la force de la pesanteur. Cette supposition est admissible dans le cas de l'écoulement par les orifices, surtout si l'orifice est percé dans le fond du vase. Elle devient inacceptable dans le cas de l'écoulement par des déversoirs, où la force de la pesanteur joue le rôle principal dans la formation de la nappe. On n'arrivera donc pas à des solutions admissibles en appliquant la méthode de la représentation conforme, car les vitesses sur les lignes de courant limites dependent de la position du point considéré et ne peuvent pas être considérées comme constantes.

Lauck [7] a essayé d'échapper à ces difficultés en appliquant des approximations successives pour résoudre l'équation intégro-différentielle, à laquelle le problème est ramené par des procédés classiques. Comme première approximation il accepte les données expérimentales et obtient ensuite des solutions successives rapprochées. La convergence d'une telle série ne peut être démontrée, mais on se sert souvent de cette méthode dans l'hydraulique industrielle, en utilisant, en ce qui concerne le calcul numérique, les perfectionnements fait par *Dmitrov* [8].

Les travaux cités plus haut se rapportent à l'étude des déversoirs aérés. Nous considérons ici les déversoirs dépourvus de dispositifs d'aération et beaucoup moin étudiés théoriquemeut. Notre calcul est d'un caractère plus qualitatif que quantitatif et nous examinons surtout la forme de la nappe déversante correspondante aux valeurs différentes de la charge et de la pression sous la nappe. Néanmoins, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus expérimentalement et constatons leur coïncidence.

Supposons la largeur L du déversoir assez grande pour que le mouvement puisse être étudié dans le plan vertical, orthogonal au seuil du déversoir. Admettons que le seuil soit horizontal, ortogonal au courant et dirigeons l'axe Oy dans la direction de ce courant. L'axe Ox est vertical dirigé vers le bas. (Fig. 1). La force de la pesanteur est la seule force extérieure agissant sur le liquide. La pression extérieure est la pression atmosphérique p_a, et la pressions sous la nappe est $p_1 \neq p_a$. Bornons nous à l'étude d'une nappe d'épaisseur d très petite ce qui nous permet d'amener

le problème hydrodynamique à un problème de la Mécanique Rationnelle, concernant le mouvement d'un point matériel, représentant une particule liquide. On connait l'application de cette méthode à l'étude, par exemple, du problème ancien de *Torricelli* [9] concernant l'ecoulement par un orifice très petit percé dans la paroi d'un vase rempli d'eau. La section de la veine liquide étant très petite, on peut négliger la variation de la pression à l'intérieur de la veine et on est ainsi ramené au problème du mouvement d'une particule sous l'influence de la force de la pesanteur. La forme de la veine liquide est évidemment parabolique, ce qui est confirmé par de nombreuses expériences.

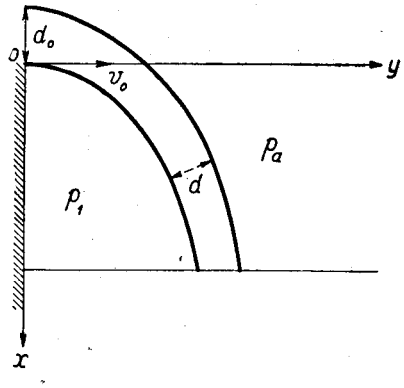

Fig. 1

Essayons, par analogie, de ramener le problème de l'écoulement par un déversoir sans aérage à un problème de la Mécanique. L'épaisseur de la nappe déversante étant petite, remplaçons le gradient de la pression par une force extérieure, proportionnelle à la valeur moyenne de ce gradient $p_a - p_1/d$ et orthogonale au courant. Nous supposons, donc, que la pression dans la section normale de la nappe varie de façon linéaire et que les lignes de courant sont en même temps les lignes de pression égale. Ceci est évident pour les lignes de courant limites et les expériences de *Bazin* [10] ont montré qu'il en est approximativement de même à l'intérieur de la nappe. On peut donc espérer que la trajectoire de la particule fluide, soumise à la force de la pesanteur et à la force complémentaire introduite, représentera approximativement la forme de la nappe.

L'épaisseur d de la nappe ne peut être considérée comme constante puisque la vitesse varie d'une section à l'autre. Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, au moins approximativement, il faut supposer que le produit vd de la vitese et de l'épaisseur en un point quelconque est constant et égal au produit $v_0 d_0$ de ces quantités sur le seuil du déversoir. On arrive ainsi à l'expression

$$F = \frac{p_a - p_1}{\rho d} = \frac{p_a - p_1}{\rho d_0} \frac{v}{v_0} = ga \frac{v}{v_0} \tag{1}$$

pour la force complémentaire F par l'unité de la masse. Le paramètre

introduit

$$a = \frac{p_a - p_1}{\gamma d_0}, \tag{2}$$

avec ρ et γ désignant la densité et le poids de l'unité de volume de l'eau, caractérise la différence de la pression atmosphérique et celle sous le nappe. Nous nous bornons pour le moment au cas, où ce paramètre est positif ce qui correspond à une dépression sous la nappe déversante.

2. Equations différentielles du mouvement et leurs intégrales

En tenant compte de la force introduite (1) et de celle de la pesanteur, on obtient les équations du mouvement

$$\frac{dv_x}{dt} = g\left(1 + a\frac{v_y}{v_0}\right), \qquad \frac{dv_y}{dt} = -ga\frac{v_x}{v_0} \tag{3}$$

et on en déduit l'intégrale de la force vive

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2gx + v_0^2 = v_0^2\left(1 + \frac{2}{c}\frac{x}{d_0}\right), \tag{4}$$

coïncidente avec l'équation de Bernoulli; c désigne le nombre de Froude sur le seuil:

$$c = v_0^2/gd_0. \tag{5}$$

Après avoir intégré les équations (3) on obtient les projections v_x e v_y de la vilesse

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{x}{d_0}\left(2c + 2ac - a^2\frac{x}{d_0}\right)}, \qquad \frac{v_y}{v_0} = 1 - \frac{a}{c}\frac{x}{d_0}. \tag{6}$$

La seconde intégration nous donne les coordonnées x et y du point matériel comme fonction du temps et détermine en même temps la trajectoire de ce point:

$$\begin{aligned} \frac{x}{d_0} &= \frac{c(1+a)}{a^2}\left(1 - \cos\frac{v_0 a}{c d_0}t\right), \\ \frac{y}{d_0} &= -\frac{v_0}{a d_0}t + \frac{c(1+a)}{a^2}\sin\frac{v_0 a}{c d_0}t. \end{aligned} \tag{7}$$

Cette trajectoire représente approximativement la forme de la nappe déprimée.

L'analyse de la courbe donnée par les équations (7) ne présente pas de difficulté. Démontrons quelques propriétés de cette courbe. L'ana-

logie entre cette courbe et la cycloïde est évidente. En introduisant les paramètres $R=(1+a)\,cd_0/a^2$ et $\omega = av_0/cd_0$ on obtient

$$x = R(1-\cos\omega t), \qquad y = v_0 t - R(\omega t - \sin\omega t)$$

et l'on peut faire l'interprétation suivante: la trajectoire de la particule liquide est la même que celle d'un point matériel se trouvant sur un cercle du rayon R, roulant sur l'axe des y dans le sens négatif à la vitesse angulaire ω et glissant, en même temps, dans le sens positif à la vitesse v_0.

On trouve facilement que le point

$$\frac{x_1}{d_0} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{y_1}{d_0} = \frac{c}{a^2}\left[\sqrt{a(a+2)} - \arccos\frac{1}{a+1}\right]$$

correspond au maximum des y et le point

$$\frac{x_2}{d_0} = \frac{2(a+1(c}{a^2}, \qquad \frac{y}{d_0} = -\frac{\pi c}{a^2}$$

au maximum des x. L'ordonnée de ce dernier point étant toujours négative, on voit que ce point ne peut apparaître si les déversoirs ont la forme habituelle. Un tel point peut apparaître si les déversoirs sont munis d'un ajutage extérieur (Fig. 2). Si la longueur de l'ajutage est suffisante, la nappe peut lui adhérer d'en bas. Le point correspondant est donné par les coordonnées

$$\frac{x_3}{d_0} = 0, \qquad \frac{y_3}{d_0} = -\frac{2\pi c}{a^2}.$$

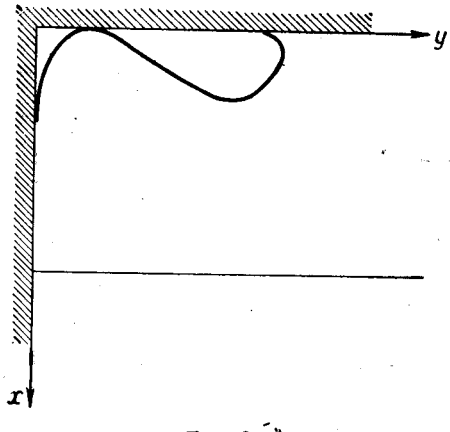

Fig. 2

L'intersection de la nappe et de la paroi du déversoir correspond à $y_4=0$. L'abscisse de ce point est définie par l'équation

$$(1+a)\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{c}\frac{a^2}{1+a}\frac{x_3}{d_0}\right)^2} - \arccos\left(1-\frac{1}{c}\frac{a^2}{1+a}\frac{x_3}{d_0}\right) = 0.$$

Il est évident que tous les points caractéristiques de la courbe (7) apparaissent seulement dans le cas où la surface libre de l'eau aval est suffisamment éloignée du seuil.

3. Élévation de l'eau sous la nappe

La pression sous la nappe étant plus petite que la pression atmosphérique, une élévation de l'eau se produit dans cette région (Fig. 3). Ne tenant pas compte des tourbillons qu'y apparaissent, nous admettons que la pression de l'eau sous la nappe est soumise à la loi hydrostatique. En désignant par h l'élévation de l'eau sous la nappe, on obtient $h=(p_a-p_1)\gamma = ad_0$, ou

$$a = h/d_0. \tag{8}$$

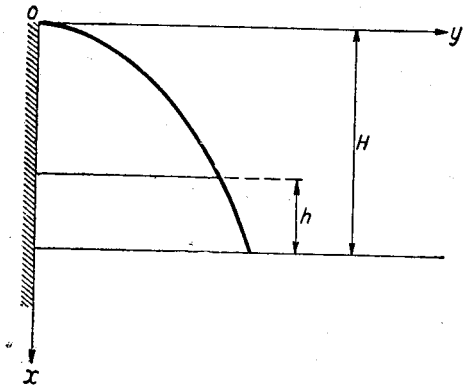

Fig. 3

La courbe donnée par les équations (7) représente la partie de la nappe du seuil jusqu'au point où cette nappe rencontre la surface élévée de l'eau. À partir de se point la particule liquide est soumise à une autre force, qui n'est plus proportionnelle à la différence constante $p_a - p_1$ de pression, mais varie avec la distance du seuil du déversoir.

Désignons par H la hauteur du seuil au dessus de la surface libre de l'eau aval et introduisons le paramètre

$$e = H/d_0 \tag{9}$$

Appliquons les mêmes raisonnements pour la détermination de la force F_1, agissant sur la particule liquide à partir du point $x = H - h$, respectivement $x/d_0 = e - a$. On obtient

$$F_1 = \frac{p_a - p_1 - \gamma(x - H + h)}{\rho d_0}\frac{v}{v_0} = g\left(e - \frac{x}{d_0}\right)\frac{v}{v_0}, \tag{10}$$

et les équations différentielles du mouvement deviennent:

$$\frac{dv_x}{dt} = g\left[1 + \left(e - \frac{x}{d_0}\right)\frac{v_y}{v_0}\right], \qquad \frac{dv_y}{dt} = -g\left(e - \frac{x}{d_0}\right)\frac{v_x}{v_0}.$$

L'intégration de ces équations donne l'intégrale de la force vive (4) et les projections de la vitesse sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v_0} &= \sqrt{1 + \frac{x}{d_0} - \frac{1}{4c^2}\left[\left(e - \frac{x}{d_0}\right)^2 + a^2 - 2ae + 2c\right]^2}, \\ \frac{v_y}{v_0} &= \frac{1}{2c}\left[\left(e - \frac{x}{d^0}\right)^2 + a^2 - 2ae + 2c\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Les conditions initiales $v_y/v_0 = 1 - a(e-a)/c$ pour $x/d_0 = e - a$ nous ont servi pour déterminer les constantes arbitraires.

Pour obtenir les équations du mouvement et la trajectoire de la particule liquide, représentant la forme de la nappe, il faut effectuer l'intégration des équation (11) qui sont de forme elliptique. Introduisons la fonction elliptique de Weierstrass $\mathfrak{p}\,(u; g_2, g_3)$ avec les invariants:

$$g_2 = \frac{4}{3}[4a^2e^2 - 2(2a^3 + 4ac + 3c)e + a^4 + 4a^2c + c^2]\,,$$

$$g_3 = \frac{4}{27}[-16a^3e^3 + 12a(2a^3 + 4ac + 3c)e^2 - 6(2a^5 + 8a^3c + 3a^2c - 5ac^2 - 6c^2)e + \\ + (2a^6 + 12a^4c + 15a^2c^2 - 2c^3 - 27c^2)]$$

et désignons par w l'argument de cette fonction défini par des formules:

$$\mathfrak{p}\,w = (2ae - a^2 - 2c)/3\,, \qquad \mathfrak{p}'w = 2c\,.$$

La substitution

$$\frac{x_0}{d_0} = e - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'w}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}w} \tag{12}$$

amène les équations (11) à la forme:

$$\frac{v_0}{d_0}t = 2icu + C_1\,, \tag{13}$$

$$\frac{y}{d_0} = i\left[\frac{2}{3}(a^2 + 2c - 2ae)u - \zeta(u+w) - \zeta u + \zeta w\right] + C_2\,, \tag{14}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. On détermine ces constantes à l'aide des conditions au moment initial: pour $t = t_1$ on a $x/d_0 = e - a$ et $u = u_1$. On obtient les valeurs de u_1 et t_1 à l'aide des équations (12) et (7), qui donnent:

$$a = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'u_1 - \mathfrak{p}'w}{\mathfrak{p}u_1 - \mathfrak{p}w}\,,$$

$$e - a = \frac{c(a+1)}{a^2}\left(1 - \cos\frac{v_0 a}{cd_0}t_1\right).$$

Les équations (12) et (14) donnent la forme cherchée de la nappe déversante. Il s'ensuit de l'équation (13) que l'argument u est imaginaire. Par des transformations connues, assez compliquées, ont peut ramener les expressions trouvées à la forme réelle, mais nous n'effectuons pas ce calcul.

L'analyse détaillée des résultats obtenus présente certaines difficultés, dues à la forme compliquée des formules dépendant de trois paramètres: a, c, e. Nous effectuons cette analyse dans le cas spécial d'une nappe nomée noyée en dessous. Cette nappe est caractérisée par l'élévation de l'eau jusqu'au seuil du déversoir. On a, donc, $h = H$ dans ces conditions et toute la région entre la nappe et la paroi du déversoir est remplie d'eau.

Indiquons ici que l'introduction de la force (10) présente une approximation moins acceptable, car il est évident que les lignes de courant et les lignes d'égale pression ne coïncident pas. Nous admettons néanmoins cette hypothèse, car elle conduit à des résultats qui correspondent bien à des expériences connues.

4. Nappe noyée en dessous

Dans le cas de la nappe noyée en dessous on a $h = H$ et, par conséquent, $a = e$. Après avoir changé a par e, on intègre les équations (11) par la substitution:

$$\frac{x}{d_0} = \frac{6c(e+1)}{\mathfrak{p}(u; g_2, g_3) + c + e^2} \tag{15}$$

Les invariants g_2 et g_3 de la fonction elliptique $\mathfrak{p}(u; g_2, g_3)$ se réduisent à la forme

$$\begin{aligned} g_2 &= 12(e^4 - 4ce^2 - 6ce + c^2), \\ g_3 &= 4(2e^6 - 12ce^4 - 18ce^3 + 15c^2e^2 + 36c^2e + 2c^3 + 27c^2) \end{aligned} \tag{16}$$

et le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ devient

$$\Delta = 11664c^3(e+1)^2(4e^3 + ce^2 - 18ce - 4c^2 - 27c). \tag{17}$$

La première des équations (11) donne immédiatement

$$v_0 t/d_0 = -2\sqrt{3}\,cu$$

où la constante arbitraire est égale à 0. Quant à la seconde équation de ce système, elle s'intègre par le procédé classique [11]. Introduisons l'argument w par la formule

$$\mathfrak{p}w = -c - e^2$$

et effectuons l'intégration en utilisant les formules bien connues [12]:

$$\mathfrak{p}'w \int \frac{du}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}w} = 2u\zeta w + \ln\sigma(u-w) - \ln\sigma(u+w),$$

$$(\mathfrak{p}'w)^2 \int \frac{du}{(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}w)^2} + \mathfrak{p}''w \int \frac{du}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}w} = -\zeta(u-w) - \zeta(u+w) - 2u\mathfrak{p}w.$$

On obtient

$$\frac{y}{d_0} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\zeta(u+w)+\zeta(u-w)+2(2c-e^2)u\right] \tag{18}$$

et l'on constate facilement que la constante arbitraire est égale à 0. L'apparition du paramètre w peut être évitée à l'aide de formule:

$$\zeta(u+w)+\zeta(u-w) = 2\zeta u + \frac{\mathfrak{p}'u}{\mathfrak{p}u-\mathfrak{p}w}.$$

La fonction $\mathfrak{p}u$ étant paire, et la fonction ζu impaire, on peut introduire un nouvel argument

$$t' = -u = \frac{v_0}{2\sqrt{3}cd_0}\,t$$

et obtenir définitivement:

$$\begin{aligned} \frac{x}{d_0} &= \frac{6c(e+1)}{\mathfrak{p}t'+c+e^2}, \\ \frac{y}{d_0} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[2(2c-e^2)t'+2\zeta t'+\frac{\mathfrak{p}'t'}{\mathfrak{p}t'+c+e^2}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Les équations (19) donnent la solution du problème, c'est à dire la trajectoire de la particule liquide représentant la forme cherchée de la nappe.

La courbe (19) présente quelques propriétés géométriques intéressantes. On calcule facilement le maximum et le minimum de cette courbe:

$$(x/d_0)_{1/2} = e \pm \sqrt{e^2-2c}.$$

Le premier signe correspond au maximum qui se trouve au dessus de la surface de l'eau aval et le second signe au minimum, au dessous de cette surface. Par conséquent ce dernier n'apparaît pas en réalité. On obtient aussi deux points d'inflexion

$$(x/d_0)_{3/4} = \frac{1}{3}\left[(e-c)\pm\sqrt{e^2+4ce+c^2+6c}\right],$$

dont le second doit être laissé de côté comme correspondant à des valeurs négatives des x.

Si la hauter H de déversoir est telle que $e < \sqrt{2c}$ ($e < 1.414$ pour $c = 1$), il n'existe pas de points où la tangente à la courbe (19) soit parallèle à l'axe Ox. Le point d'inflexion se trouvant au dessous de l'eau, on arrive facilement à la forme de la nappe reproduite chématiquement

par la Fig. 4. Si $e > \sqrt{2c}$, la nappe a un maximum et un point d'inflexion au dessus de l'eau aval. Sa forme est donnée par la Fig. 5. Dans le cas limité, où l'on a $e = \sqrt{2c}$, le minimum et le maximum coïncident avec le point d'inflexion. Ce point se trouve sur la surface de l'eau avale et la tangente à la courbe (19) en ce point est parallèle à l'axe Ox (Fig. 6).

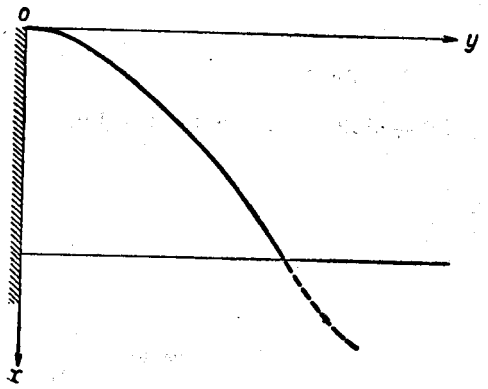

Fig. 4

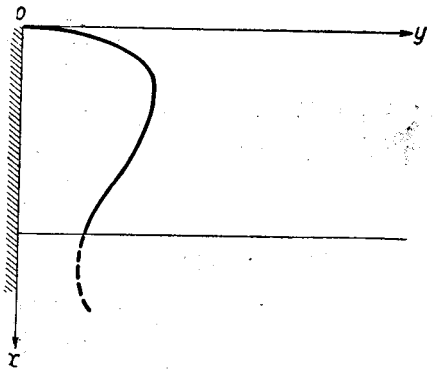

Fig. 5

4. Formation de la nappe noyée en dessous

On sait, d'après les expériences de *Bazin* [10], que la formation d'une nappe noyée en dessous n'est pas toujours possible. Certaines conditions relatives à la charge et à la hauteur de l'eau doivent être satisfaites. Il serait du plus grand intérêt d'étudier cette question théoriquement par les formules que nous avons obtenues plus haut.

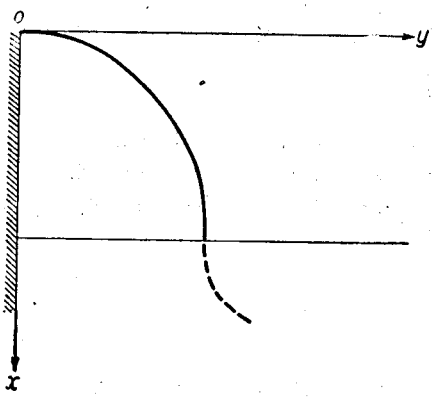

Fig. 6

Une nappe, en général, ne peut se former que si la vitesse de la particule liquide est réelle au moment quand cette particule atteint la surface de l'eau. Désignons par

$$z = \mathfrak{p}(u; g_2, g_3)$$

la fonction elliptique de Weierstrass et par Z la fonction

$$Z = f(z) = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = \mathfrak{p}'(u). \tag{20}$$

La vittesse v_x de la particule liquide s'exprime en z par la formule

$$v_x = \sqrt{3}\, v_0 (e+1) \frac{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}{(z+c+e^2)^2}.$$

L'étude des valeurs réelles et imaginaires de la vitesse v_x se réduit à l'étude de la fonction $f(z)$, puisque le dénominateur $(z+c+e^2)^2$ n'a aucune influence sur cette étude (il est toujours positif et pour $z = -c - e^2$ la fonction $f(z)$ est imaginaire). Pour $x = H$ on a $x/d_0 = e$ et la formule (15) donne pour z:

$$z_e = \frac{1}{e}(-e^3 + 5ce + 6c). \tag{21}$$

La valeur correspondante de la fonction $f(z)$ devient

$$f(z_e) = \sqrt{-108c^2(e+1)^2(e^3 - 4ce - 8c)/e^3}$$

et l'on voit que la condition pour que cette fonction soit réelle est

$$e^3 - 4ce - 8c \leqslant 0. \tag{22}$$

Désignons par e_k la seule racine réelle du polynôme (22). Elle est fonction du paramètre c et pour la valeur critique $c = 1$ on a $e_k = 2{,}65$. La condition

$$e \leqslant e_k$$

est la condition pour que la nappe puisse se former. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante. Pour le démontrer et trouver les conditions suffisantes, envisageons la courbe (20) bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques [13].

La forme de cette courbe est différente suivant le signe du discriminant de la fonction elliptique. L'équation (17) montre que le signe du discriminant est celui du polynôme

$$4e^3 + ce^2 - 18ce - 4c^2 - 27c,$$

puisque les autres facteurs sont positifs. Il est facile à démontrer que pour les valeurs de c et de e qui nous intéressent (c et e sont positifs et c s'approche de l'unité) ce polynôme a une seule racine réelle. Désignons cette racine par e_d. Pour $e < e_d$ on a $\Delta < 0$ et la fonction $Z = f(z)$ a une racine réelle et deux imaginaires. Pour $e > e_d$ cette fonction a les trois racines réelles et pour $e = e_d$ la fonction elliptique dégénère en fonction trigonométrique. Pour la valeur critique du nombre de Froude, $c = 1$, on a $e_d = 2{,}61$.

Arrêtons nous pour le moment sur le cas où le discriminant est positif, c'est à dire $e > e_d$. La courbe (20) a la forme reproduite par la

Fig. 7. Elle se compose d'un oval et d'une branche infinie de nature parabolique. Désignons par z_1, z_2 et z_3 $(z_1 > z_2 > z_3)$ les trois racines réelles de l'équation $f(z) = 0$. La branche infinie correspond à des valeurs des z entre ∞ et z_1 et l'oval à des valeurs entre z_2 et z_3. D'autre part, z étant égal à $\mathfrak{p}u$, et $f(z)$ à $\mathfrak{p}'u$, la branche infinie correspond à des valeurs réelles de u, de $u = 0$ à $u = \omega$, où ω_1 désigne la demipériode réelle de la fonction $\mathfrak{p}u$. Aux points de l'oval correspondent les valeurs imaginaires de u. Puisque u est proportionnel à t, c'est la branche infinie qui seule correspond au mouvement étudié de la particule liquide.

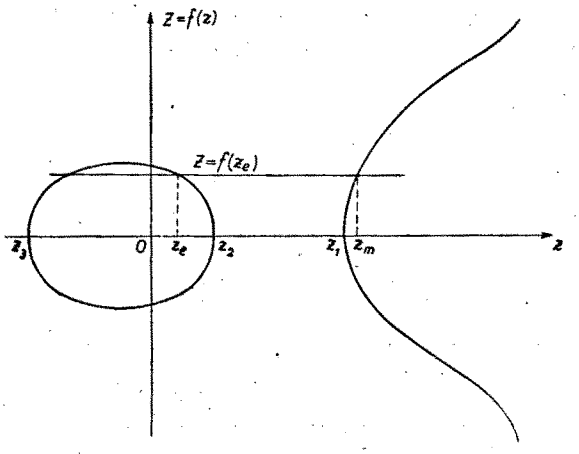

Fig. 7

Il s'ensuit que la condition $e \leqslant e_k$ n'est pas suffisante pour la formation de la nappe, car au point $z = z_e$ peut correspondre aussi un point réel sur l'oval. Il faut que le point $z = z_e$ se trouve sur la branche infinie, c'est à dire, que z_e soit plus grand que z_1.

Puisque la détermination des racines de l'équation $f(z) = 0$ et leur comparaisou avec la valeur de z_e est très compliquée, nous cherchons les trois points d'intersection de la courbe (20) et de la droite

$$Z = f(z_e) = f.$$

Si deux de ces points sont imaginaires, il est évident que $z_e < z_1$. Si tous les trois points sont réels il faut examiner si z_e est la plus grande des abscisses de ces points.

Ce problème ne présente pas de difficulté, car on connait une des racines, z_e, de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 - f^2 = 0.$$

Après avoir divisé la première partie de cette équation par $z - z_e$ on trouve, que la plus grande racine z_m de l'équation de deuxième ordre, ainsi obtenue, a la forme

$$z_m = \frac{1}{2}\left(-z_e + \sqrt{g_2 - 3z_e^2}\right).$$

Démontrons que $z_e < z_m$, c'est à dire, que le point z_e n'appartient pas à la branche infinie de la courbe (20). En même temps il sera démontré que l'expression $g_2 - 3z_e^2$ est toujours positive.

Si z_e est négatif notre propposition est évidente. Dans le cas contraire on est amené à l'inégalité

$$e^3 - 4ce - 6c > 0,$$

qui est toujours satisfaite pour les valeurs de e et de c considérées. On le démontre facilement en décomposant la première partie de cette inégalité en qeulques termes positifs, dont le premier est $\frac{1}{4}(4e^3 + ce^2 - 18ce^2 - 4c^2 - 27c)$. On constate ainsi que le point $z = z_e$ se trouve sur l'oval et que la formation de la nape est impossible dans ces conditions.

Il en est de même dans le cas de dégéneration, quand on a $e = e_d$, ce qui est facile à vérifier par un procédé analogue, ou par l'analyse immédiate des racines $z_1, z_2 z_3$, qui sont, dans ce cas, connues.

Dans le cas du discriminant négatif on a $e < e_d$ et la courbe (20) est reproduite par la Fig. 8. Elle a une seule branche et cette branche correspond à des valeurs de z entre ∞ et z_1, et à des valeurs de u réelles. La formation de la nappe est donc possible dans ce cas.

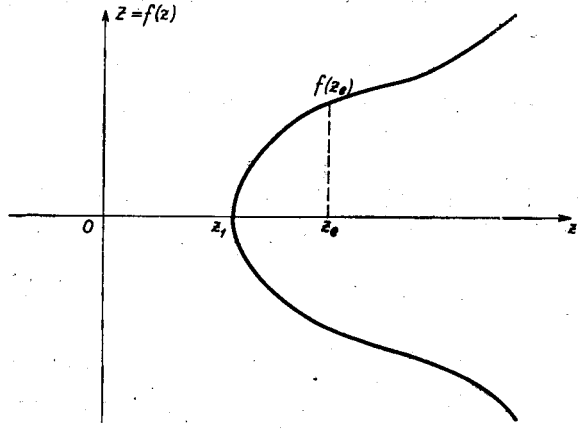

Fig. 8

Nous sommes ainsi amenés à la conclusion suivante: la nappe noyée en dessus ne peut se former que si la condition $e < e_d$ est réalisée; e_d étant la seule racine réelle de l'équation:

$$4e^3 + ce^2 - 18ce - 4c^2 - 27c = 0.$$

Pour les valeurs de e plus grandes que e_d c'est la nappe déprimée qui seule peut apparaître.

Comparons les résultats obtenus avec les expériences faites par *Bazin* [10]. *Bazin* a constaté que la nappe noyée en dessous ne peut se former si $d_0/H < 0{,}4$. Notre condition est $d_0/H < 1/e_d$. Il est facile à voir par le calcul numérique élémentaire que les deux résultats coïncident pour les valeurs de c voisines de l'unité. (Pour $c = 1$ on a $1/e_d = 0{,}383$ et pour $c = 0{,}9$, $1/e_d = 0{,}4$).

Si l'on considère un déversoir à seuil épais (ou, par exemple, prolongé par un canal découvert) on obtient un mouvement uniforme à une

certaine distance du bord amont du seuil. Ce mouvement est caractérisé par la valeur critique du nombre de Froude, c'est à dire, par la valeur $c = 1$. On le déduit facilement du postulat, bien connu, de *Bélanger* [14]. On sait que les mêmes résultats ont été obtenus par *Boussinesq* [15], dans ces travaux relatifs à la formation des ondes, et enfin par *Bahmetiev* [16], qui a utilisé le principe de l'énergie cinétique minima. On peut, donc, accepter la valeur théorique de c égale à l'unité sur le seuil et admettre que cette valeur ne change guère quand on passe au bord aval du seuil.

5. Oscillations du niveau aval

On observe souvent la déformation de la nappe déversante due au changement de niveau de l'eau aval. L'abaissement de l'eau est suivi par l'augmentation de volume sous la nappe et, par suite, par une dépression dans cette région. L'élévation de l'eau aval entraîne l'augmentation de pression sous la nappe. L'analyse de ce dernier problème peut être effectué par la même méthode que nous avons appliquée dans le cas de la dépression. Il suffit de changer le signe du paramètre a. Il faut aussi tenir compte de l'abaissement de l'eau sous la nappe dans le cas où la pression y est plus grande que la pression atmosphérique.

Les formules déterminant la forme de la nappe restant les mêmes, elles dépendent de trois paramètres: a, c et e. Le nombre de Froude c reste constant puisqu'il ne dépend que des conditions initiales, mais les variations du paramètre e entraînent celles du paramètre a. En admettant le régime isothérmique sous la nappe et en négligeant l'entraînement de l'air par le courant, on a

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 , \tag{23}$$

où p_0 et V_0 sont la pression et le volume au moment initial et p_1 et V_1 ces quantités au moment quelconque t_1.

Les valeurs de V_0 et de V_1 se rapportent évidemment à la région sous la nappe remplie d'air et non d'eau, puisque nous considérons la densité de l'eau constante. Le calcul des volumes V_0 et V_1 se fait facilement, en fonctions élémentaires et l'équation (23), prenant la forme.

$$\left(\frac{p_a}{\gamma d_0} - a_1\right) V_1 = \left(\frac{p_a}{\gamma d_0} - a_0\right) V_0 ,$$

donne la liaison cherchée entre les paramètres a_1 et e_1 au moment t_1, les valeurs a_0 et e_0 de ces paramètres, au moment initial, supposées connues. On peut, donc, pour chaque changement de niveau de l'eau aval trouver la forme correspondante de la nappe déversante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Forchheimer — Hydraulik Nr 86. p. 306.

[2] Blasius — Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Zeit. für Math. u. Ph. 58, 1910. S. 90.

[3] Runge-Willers — Enzykl. d. math. Wiss. II, 3, Heft 2 S. 165.

[4] Poleni — De motu aquae mixtu, Padova 1717.

[5] Kirchhoff — Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, ges. Abhandlungen S. 416

[6] Mises — Berechnung von Ausfluss-und Überfallzahlen. Zeitsch. VDI. 1917. S. 447.

[7] Lauck — Der Überfall über ein Wehr. Zeitsch. für ang. Math. u. Mech. Band 5 Heft 1, 1925.

[8] Дмитриев — О построении теоретическаго профиля водосливных плотин по Лауку. Инф.-техн. бюллетень Гидротехгеоинститута Н 11 и Н 12, 1932.

[9] Torricelli — De motu gravium naturaliter accelerato. Firence, 1643.

[10] Bazin — Expériences nouvelles sur l'écoulement déversoir. Paris, 1898.

[11] Appell et Lacour — Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paris, 1922 p. 292.

[12] Janke u. Emde — Tables of Functions with formulae and curves. 1945, 98—108.

[13] Appell et Lacour — Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paris, 1922 p. 89.

[14] Bélanger — Note sur l'hydraulique. L'école roy. des ponts et chausées. 1845—1846, p. 33.

[15] Boussinesq — Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires prés. par div. savants à l'Ac. des Sc. t. XXIII 1877.

[16] Бахметиев — Гидравлика, 1934 г.