EINIGE SÄTZE ÜBER DIE POSITIVITÄT DER TRIGONOMETRISCHEN POLYNOME

von

M. TOMIĆ

1.1. Die Fejérsche Vermutung (aus 1910):

$$s_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>0 \quad \textit{für } n=1,2,3,\ldots \textit{ und } 0<\theta<\pi, \tag{1}$$

wurde von D. Jackson [1], Th. Gronwall [2] und später von Fejér [3] selbst bewiesen; einen besonders kurzen Beweis gab E. Landau [4]. Ausserdem hat Fejér [5] einen allgemeinen Satz gegeben, der eine unmittelbare Folge der Identität (7), nebst (8) und (9) (falls n durch $n+1$ ersetzt wird) ist, und welcher lautet:

Satz 1. *Ist für ein festes n, die Folge der Koeffizienten c_ν des Sinuspolynoms*

$$S_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\sin\nu\theta,$$

ergänzt durch

$$c_{n+1}=0,$$

zweifach monoton, d. h.

$$c_1-c_2\geqslant c_3-c_4\geqslant\cdots\geqslant c_{n-2}-c_{n-1}\geqslant c \quad -c_n\geqslant c_n-0\geqslant 0, \tag{2}$$

so ist

$$S_n(\theta)\geqslant 0, \quad \textit{für } 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

Dieser Satz enthält aber die Ungleichung (1) nicht da eben die Folge

$$c_\nu=1/\nu, \quad \nu=1,2,\ldots,n, \quad c_{n+1}=0,$$

nicht konvex ist.

1.2. In § 2.1 gebe ich zuerst einen neuen einfachen Beweis von (1). Er unterscheidet sich von dem Fejérschen dadurch, dass ich zur Abschätzung von (1), statt der Identität (7), an welche sich Fejér stützt, die Summe der unendlichen Reihe (1) benütze und den Rest abschätze. Dies erlaubt mir

auch die Positivität einiger weiteren Sinus- und Cosinuspolynome zu beweisen, insbesondere in Fällen wo die Koeffizienten c_n schwächer gegen Null streben als $1/n$, was durch das Verfahren von Fejér, wie dies aus dem Beweis des Satzes 2 hervorgeht, nicht zu erhalten ist.

In § 2. 2 zeige ich dass im Satz 1 die Konvexität der Folge

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n, 0,$$

nur durch die Konvexität der Folge

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n,$$

ersetzt werden kann, wenn man ausserdem noch die Positivität der Folge

$$C_m = \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1} \nu c_\nu, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

voraussetzt, was mit (4) gleichbedeutend ist, da

$$C_{2p} = \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu (c_{2\nu-1} - 2c_{2\nu} + c_{2\nu+1}) + p(c_{2p-1} - c_{2p}) - pc_{2p}$$

ist. Damit erhält man einen Satz, der zwar den Satz 1 nicht vollständig enthält, in welchem aber (1) doch als Spezialfall enthalten ist, und welcher lautet:

Satz 2. *Sei* $c_\nu \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$

$$c_1 - c_2 \geqslant c_2 - c_3 \geqslant \cdots \geqslant c_{n-2} - c_{n-1} \geqslant c_{n-1} - c_n \geqslant 0 \tag{3}$$

und

$$pc_{2p} \leqslant \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu (c_{2\nu-1} - 2c_{2\nu} + c_{2\nu+1}) + p(c_{2p-1} - c_{2p}) \tag{4}$$

für

$$p = 1, 2, \ldots, [n/2],$$

dann ist

$$S_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sin \nu\theta \geqslant 0, \quad \textit{für } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{5}$$

und dies gilt ebenfalls für jeden Abschnitt

$$S_p(\theta), \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Nicht nur die Voraussetzungen sondern auch die Behauptungen dieses Satzes unterscheiden sich von dem Satz 1. Damit jeder Abschnitt $S_m(\theta)$ positiv sei, soll in Satz 1 die Gültigkeit von (2) für jedes n vorausgesetzt werden, d. h. es soll

$$c_{m-1} - c_m \geqslant c_m \geqslant 0 \quad \text{für jedes} \quad m = 2, 3, 4, \ldots, n,$$

sein. Aus

$$S_m(\theta) \geqslant 0, \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \ldots, n \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

folgt aber, wegen

$$S_m(\pi) = 0$$

und

$$S'_m(\pi) = -\sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1} \nu c_\nu = -C_m,$$

dass $C_m \geqslant 0$ für jedes $m = 1, 2, \ldots, n$ sein muss. Also sind in diesem Falle die Bedingungen (4) des Satzes 2 erfüllt und der so ergänzte Satz 1 ist dann im Satze 2 enthalten. Wird aber im Satz 1 n festgehalten, so zeigt schon die Folge

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2/3, \quad c_3 = 1/3, \quad c_4 = 0, \quad (n = 3),$$

dass die Bedingungen des Satzes 1, aber nicht alle Bedingungen (4) des Satzes 2 erfüllt sind. Es bleibt also die Frage offen, ob schon aus den Bedingungen (2) mit

$$C_{2p} \geqslant 0, \quad p = [n/2]$$

allein, statt (4) die Behauptung (5), für ein festes n, gefolgert werden kann. Im so erweiterten Satz 2 wäre also auch der Satz 1 enthalten.

1.3. Der Beweis des Satzes 2 beruht auf der, unter den Bedingungen (3), gültigen Ungleichung

$$S_n(\theta) \geqslant (c_1 - 2c_2 + c_3) \sin\theta + \frac{1}{2} c_n \sin n\theta.$$

Man kann sie unmittelbar aus der folgenden Identität von Fejér ([3] S. 340, Formel (106)) ableiten,

$$S_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sin \nu\theta = (c_1 - 2c_2 + c_3)\tau_1(\theta) + (c_2 - 2c_3 + c_4)\tau_2(\theta) + \cdots$$
$$\cdots + (c_{n-2} - 2c_{n-1} + c_n)\tau_{n-2}(\theta) + c_n h_n(\theta) + \frac{1}{2} c_n \sin n\theta, \tag{7}$$

wobei

$$h_n(\theta) = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta + \frac{\sin n\theta}{2}$$

und

$$\tau_\nu(\theta) = \nu \sin\theta + (\nu - 1)\sin 2\theta + (\nu - 2)\sin 3\theta + \cdots + \sin \nu\theta$$

ist, da alle ihre Glieder, mit Ausnahme des letzten positiv sind, weil

$$h_n(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{n\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \sin \frac{n\theta}{2}\right) \geqslant 0 \tag{8}$$

und

$$\tau_{\nu-1}(\theta) = \frac{\nu \sin\theta - \sin \nu\theta}{4 \sin^2 \theta/2} \geqslant 0 \quad \text{für } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{9}$$

ist. Ersichtlich folgt also aus (7), (8) und (9) die Ungleichung (6), da $\tau_1(\theta) = \sin\theta$ ist.

Am Ende des § 2. 2 zeige ich dass man die Ungleichung (6), und sogar die etwas schärfere Ungleichung

$$S_n(\theta) \geqq \Gamma_n \sin\theta + \frac{1}{2} c_n \sin n\theta,$$

wobei

$$\Gamma_n = (c_1 - 2c_2 + c_3) + (c_3 - 2c_4 + c_5) + \cdots + \begin{cases} (c_{n-2} - 2c_{n-1} + c_n) \\ (c_{n-1} - c_n) \end{cases},$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist, aus dem folgenden, ebenfalls von Fejér herrührendem Satz 3, ableiten kann, indem man

$$\frac{1}{2\sin\theta}\left\{ S_n(\theta) - \frac{1}{2} c_n \sin n\theta \right\}$$

in ein Cosinuspolynom umwandelt:

Satz 3. *Ist*

$$a_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

eine positive, zweifach monotone Nullfolge, d. h.

$$0 < a_\nu \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

und

$$\Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1} \geqq 0, \quad \Delta^2 a_\nu = a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2} \geqq 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

so gilt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta \geqq \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{2} \quad \textit{für } 0 < \theta < 2\pi. \tag{10}$$

Aus diesem Beweis geht auch hervor dass man einerseits den Satz 1 etwas verallgemeineren kann, wenn man

$$\frac{S_n(\theta)}{\sin\theta} \quad \text{in} \quad \frac{1}{2} A'_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} A'_\nu \cos \nu\theta$$

umwandelt, und auf das Cosinuspolynom den Satz 3 anwendet. Aus $\Delta^2 A'_\nu \geqq 0$ folgt dann dass die Bedingung (2) des Satzes 1, durch die zweifache Monotonie der Folge

$$c_1 + c_3 + c_5 + \cdots, \quad c_2 + c_4 + c_6 + \cdots, \quad c_3 + c_5 + c_7 + \cdots, \quad \cdots, \quad c_{n-1}, \quad c_n, \quad 0,$$

ersetzt werden kann. Aber auch diese Erweiterung enthält die Ungleichung (1) als Spezialfall nicht.

Anderseits kann man durch dieselben Betrachtungen aus dem Satz 3 den entsprechenden Satz für die Sinus-Reihe ableiten. Man braucht nur

$$\frac{1}{\sin\theta} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu r^\nu \sin \nu\theta$$

in der Form

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cos \nu \theta$$

zu setzen und den Satz 3, bei $r \to 1$ anzuwenden (vergl. § 2. 2 (20) — (23') mit $n = \infty$).

1. 4. Der schwere Teil der Beweise ist die Positivität des Sinuspolynoms in der Umgebung von $\theta = \pi$, also im ganzen Intervall $(0, \pi)$ zu zeigen. Beschränkt man sich aber auf ein kleineres Intervall, etwa $(0, \pi/2)$, so bleibt das Sinuspolynom positiv unter weniger einschränkenden Bedingungen. So werde ich noch im § 2. 3 den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *Das Sinuspolynom* (5) *ist positiv in* $(0, \pi/2)$ *wenn ausser der zweifachen Monotonie der Folge* c_ν, *d. h.* (3), *noch die Bedingung*

$$c_{n+1} \leqslant \frac{c_1}{2}$$

erfüllt ist.

Diese Bedingung kann noch, falls $n \geqslant 3$ ist, durch die weniger erfordernde Bedingung

$$c_{n+1} \leqslant \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 - 2c_2 + c_3}{2}$$

ersetzt werden.

2. 1. Beweis von (1). Die Summe (1) ist positiv in $(0, \pi/n)$ und $(\pi - \pi/n, \pi)$, d. h.

$$s_n(\theta) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad 0 < \theta < \pi/n \quad \text{und} \quad \pi - \pi/n < \theta < \pi, \tag{11}$$

im letzten Intervall (Fejér [3]) weil

$$s_n(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \quad \theta = \pi - x$$

ist, und $(\sin \nu x)/x$ für $0 < x < \pi/n$ mit zunehmendem $\nu \leqslant n$ abnimmt.

Anderseits ist

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu\theta}{\nu} < \frac{1}{(n+1)\sin \theta/2}, \quad 0 < \theta \leqslant \pi, \tag{12}$$

da

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu\theta}{\nu} \right| = \left| Im \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{e^{\nu\theta i}}{\nu} \right\} \right| < \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{\nu\theta i} \right| =$$

$$< \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{\nu\theta i}}{n+1+\nu} \right| < \frac{1}{(n+1)\sin \theta/2}$$

ist.

Nun folgt aus

$$\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\theta}{\nu}$$

und (12) dass

$$s_n(\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu\theta}{\nu}>\frac{\pi-\theta}{2}-\frac{1}{(n+1)\sin\theta/2} \tag{13}$$

ist. Wegen (11) wird also die Ungleichung (1) erfüllt, wenn $s_n(\theta)\geqslant 0$ für $\pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n$ ist, also, wegen (13) falls

$$\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\frac{\theta}{2}\geqslant\frac{1}{n+1}\quad\text{für}\quad \pi/n\leqslant\theta\leqslant\pi-\pi/n \tag{14}$$

gilt. Die Funktion $\frac{1}{2}(\pi-\theta)\sin\theta/2$ hat aber nur ein Maximum in $(0,\pi)$, also wird die Ungleichung (14) erfüllt, falls sie in den Endpunkten dieses Intervalls gilt, was wegen

$$\operatorname{tg} x>x,\quad \cos x>1-x^2/2$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{\pi^2}{8n^2}\right)>\frac{1}{n+1},$$

schon für $n\geqslant 2$ der Fall ist.

2.2. Beweis des Satzes 2. Ausser der Ungleichung (6), stützt sich der Beweis des Satzes 2 auf folgendem

Hilfssatz. *Für ein bestimmtes n sei $k=[n/2]$,*

$$C_{2k}=c_1-2c_2+3c_3-\cdots+(2k-1)c_{2k-1}-2k\,c_{2k}\geqslant 0 \tag{15}$$

und

$$c_1-c_2\geqslant c_2-c_3\geqslant\cdots\geqslant(c_{n-2}-c_{n-1})\geqslant(c_{n-1}-c_n)\geqslant 0; \tag{16}$$

dann ist

$$(n+1)c_n\leqslant 2(c_1-2c_2+3c_3)=2A\leqslant 6(c_1-2c_2+c_3) \tag{17}$$

Beweis. Sei

$$C_{2k}=A+B$$

mit

$$B=-4c_4+5c_5-6c_6+\cdots-2k\,c_{2k}$$

gesetzt. Wegen (16) ist

$$0<M=2c_4-c_5+c_6-c_7+\cdots-c_{2k-1}$$

und da

$$B+M=-2(c_4-2c_5+c_6)-3(c_6-2c_7+c_8)-\cdots-(k-1)(c_{n-2}-2c_{n-1}+c_{2k})-$$
$$-(k-1)c_{2k}$$

ist, so ist ebenfalls wegen (16)

$$C_{2k}=A-2(c_4-2c_5+c_6)-\cdots-(k-1)(c_{n-2}-2c_{n-1}+c_{2k})-(k-1)c_{2k}-M.$$

Wegen (15) ist aber

$$0 \leqslant C_{2k} \leqslant A - (k+1)\, c_{2k},$$

woraus folgt dass

$$c_{2k} \leqslant \frac{A}{k+1}.$$

Also ist, für gerades $n = 2k$

$$c_n \leqslant \frac{2A}{n+2} < \frac{2A}{n+1}$$

und für ungerades n, wegen $2k = 2[n/2] = n-1$ und (16),

$$c_n \leqslant c_{n-1} = c_{2k} \leqslant \frac{A}{k+1} = \frac{2A}{n+1}$$

womit (17) bewiesen ist.

Nun folgt, aus der Bedingung (4), dass

$$S_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sin \nu\theta \geqslant 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/n \quad \text{und} \quad \pi - \pi/n \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{18}$$

ist, was für $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/n$ ersichtlich ist. Um noch die Gültigkeit von (18) für $\pi - \pi/n \leqslant \theta \leqslant \pi$ zu zeigen, sei

$$\theta = \pi - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/n,$$

gesetzt. Dann ist

$$S_n(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} c_\nu \sin \nu x = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \nu\, c_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (C_\nu - C_{\nu-1}) \frac{\sin \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \frac{\sin(\nu+1)x}{\nu+1} =$$

$$= C_n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \left\{ \frac{\sin \nu x}{\nu} - \frac{\sin(\nu+1)x}{\nu+1} \right\},$$

woraus, wegen (15) und

$$\frac{\sin \nu x}{\nu} - \frac{\sin(\nu+1)x}{\nu+1} = x \left\{ \frac{\sin \nu x}{\nu x} - \frac{\sin(\nu+1)x}{(\nu+1)x} \right\} \geqslant 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/n$$

die Behauptung (18) folgt.

Es genügt also, nach (18), dass die Ungleichung (5) für $\pi/n \leqslant \theta \leqslant \pi - \pi/n$ erfüllt wird. Wegen (6) wird aber

$$S_n(\theta) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{n} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{n}$$

falls

$$(c_1 - 2c_2 + c_3)\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{c_n}{2} \tag{19}$$

ist. Nach (17) und wegen $C_2 = c_1 - 2c_2 \geqslant 0$ ist aber

$$(n+1)\,c_n \leqslant 2A = 2(c_1 - 2c_2 + 3c_3) \leqslant 6(c_1 - 2c_2 + c_3).$$

Also wird (19) sicher erfüllt, falls

$$(c_1 - 2c_2 + c_3)\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{3}{n+1}(c_1 - 2c_2 + c_3)$$

ist, womit der Satz 2 bewiesen ist, da

$$\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{3}{n+1}$$

schon für $n \geqslant 2$ gilt.

Beweis der Ungleichung (6). Sei

$$S_n(\theta) = T_n(\theta) + \frac{c_n}{2}\sin n\theta \tag{20}$$

mit

$$T_n(\theta) = c_1 \sin\theta + c_2 \sin 2\theta + \cdots + c_{n-1}\sin(n-1)\theta + \frac{c_n}{2}\sin n\theta.$$

Aus der bekannten Identität

$$\frac{\sin \nu x}{\sin x} = 2\cos(\nu - 1)x + 2\cos(\nu - 3)x + \cdots$$

wo das letzte Glied $2\cos x$ oder 1 ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, folgt

$$\frac{T_n(\theta)}{2\sin\theta} = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \cos\nu\theta = R_{n-1}(\theta) \tag{21}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_0 &= c_1 + c_3 + \cdots + c_{n-2} + c_{n/2},\\
A_1 &= c_2 + c_4 + \cdots + c_{n-3} + c_{n-1},\\
A_2 &= c_3 + c_5 + \cdots + c_{n-2} + c_{n/2},\\
A_3 &= c_4 + c_6 + \cdots + c_{n-3} + c_{n-1}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{n-2} &= c_{n-1}\\
A_{n-1} &= c_{n/2}
\end{aligned} \tag{22}$$

für

$$n = 2k + 1$$

bzw.

$$\begin{aligned}
A_0 &= c_1 + c_3 + \cdots + c_{n-3} + c_{n-1}, \\
A_1 &= c_2 + c_4 + \cdots + c_{n-2} + c_{n/2}, \\
A_2 &= c_3 + c_5 + \cdots + c_{n-3} + c_{n-1}, \\
A_3 &= c_4 + c_6 + \cdots + c_{n-2} + c_{n/2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{n-2} &= c_{n-1}, \\
A_{n-1} &= c_{n/2},
\end{aligned} \tag{22'}$$

für

$$n = 2k.$$

Da, für gerades n,

$$\begin{aligned}
A_0 - 2A_1 + A_2 &= c_1 + c_3 + \cdots + c_{n-2} + c_{n/2} - 2(c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{n-1}) + \\
&\qquad + (c_3 + c_5 + \cdots + c_{n/2}) = \\
&= (c_1 - 2c_2 + c_3) + (c_3 - 2c_4 + c_5) + \cdots + (c_{n-2} - 2c_{n-1} + c_n),
\end{aligned} \tag{23}$$

und, für ungerades n,

$$\begin{aligned}
A_0 - 2A_1 + A_2 &= (c_1 + c_3 + \cdots + c_{n-3} + c_{n-1}) - 2(c_2 + c_4 + \cdots + c_{n/2}) + \\
&\qquad + (c_3 + c_5 + \cdots + c_{n-1}) = \\
&= (c_1 - 2c_2 + c_3) + (c_3 - 2c_4 + c_5) + \cdots + (c_{n-3} - 2c_{n-2} + c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_n)
\end{aligned} \tag{23'}$$

ist, und allgemein $\Delta^2 A_\nu = A_\nu - 2A_{\nu+1} + A_{\nu+2}$ eine Summe von $\Delta^2 c_\nu$ und $c_{n-1} - c_n$ ist, weil in (22) und (22′) $c_{n/2}$ statt c_n steht, so ist wegen (3), $\Delta^2 A_\nu \geqslant 0$ für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, wenn dabei $A_\nu = 0$ für $\nu \geqslant n$ gesetzt wird.

Somit ist, nach dem Satz 3, das Cosinuspolynom $R_{n-1}(\theta)$ von (21) positiv, und sogar, wegen (10),

$$R_{n-1}(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \cos \nu\theta \geqslant \frac{1}{2}(A_0 - 2A_1 + A_2), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Nach (22) und (22′) ist also

$$\begin{aligned}
R_{n-1}(\theta) &\geqslant \frac{1}{2}\left\{(c_1 - 2c_2 + c_3) + (c_3 - 2c_4 + c_5) + \cdots + \begin{matrix}(c_{n-2} - 2c_{n-1} + c_n) \\ (c_{n-1} - c_n)\end{matrix}\right\} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2}(c_1 - 2c_2 + c_3).
\end{aligned} \tag{24}$$

Schreiben wir das Polynom (20), wegen (21), in der Form

$$\frac{S_n(\theta)}{\sin\theta} = 2R_{n-1}(\theta) + \frac{c_n}{2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

so gilt, wegen (24),

$$S_n(\theta) \geqslant (c_1 - 2c_2 + c_3)\sin\theta + \frac{c_n}{2}\sin n\theta\,,$$

also die Ungleichung (6).

2.3. Beweis des Satzes 4. Die Methode die hier für den Beweis des Satzes 4 angewandt wird ist elementar geometrisch und wurde von mir [6], [7] und [8] zum Beweis ähnlicher Sätze gebraucht.

Wie ich in der Note [6] gezeigt habe, die Summen

$$s_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < \theta < \pi,$$

deren Koeffizienten a_ν positiv und monoton sind, stellen in komplexer Ebene die Ecken einer Polygonal-Spirale dar, deren Seitenlänge a_ν ist. Aus dieser geometrischen Darstellung folgt dass die Ecke $s_{\nu+1}$ am Kreise K_ν liegt, aus dessen Mittelpunkt W_ν die Seitenlänge der Spirale unter dem Winkel θ gesehen wird. Da $a_{\nu+1} \leqslant a_\nu$ ist, so folgt weiter $K_{\nu+1} \subseteq K_\nu$.

Es sei noch erwähnt dass die Tangente des Kreises K_ν die durch die Ecke s_ν geht, zugleich die Halbierungslinie des Aussenwinkels θ der Polygonal-Spirale in dieser Ecke ist. Insbesondere, der Neigungswinkel der Tangente des Kreises K_0 im Anfang 0 beträgt $-\theta/2$.

Das Sinuspolynom (5) kann folgenderweise geschrieben werden

$$2iS_n(\theta) = 2ie^{-\theta i/2}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sin\frac{2\nu-1}{2}\theta + c_{n+1}e^{n\theta i} + \left(-c_1 + \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu - c_{\nu+1})e^{\nu\theta i}\right).$$

Zerlegt man noch $c_{n+1}e^{n\theta i}$ in

$$c_{n+1}\,e^{-\theta i/2}\left\{\cos\frac{2n+1}{2}\theta + i\sin\frac{2n+1}{2}\theta\right\}$$

so kann die letzte Formel wie folgt geschrieben werden

$$2iS_n(\theta) = 2ie^{-\theta i/2}\sum_{\nu=1}^{n+1}{}' c_\nu \sin\frac{2\nu-1}{2}\theta + \left(-c_1 + \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu - c_{\nu+1})e^{\nu\theta i}\right) + \\ + e^{-\theta i/2}c_{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\theta. \tag{25}$$

Wird in der erwähnten geometrischen Darstellung

$$a_0 = 0, \quad a_i = c_i - c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

gesetzt, so folgt dass der dem Ausdruck

$$I=\left(-c_1+\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu-c_{\nu+1})e^{\nu\theta i}\right)$$

entsprechende Punkt im System der Kreise $K_1, K_2, \ldots$ liegt, falls

$$c_\nu-c_{\nu+1}\geqslant c_{\nu+1}-c_{\nu+2}, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1$$

ist.

Die Tangente $\overline{O_1T_1}$ am Kreise K_1 im Punkte O_1 hat den Neigungswinkel $+\theta/2$ (s. Fig. 1).

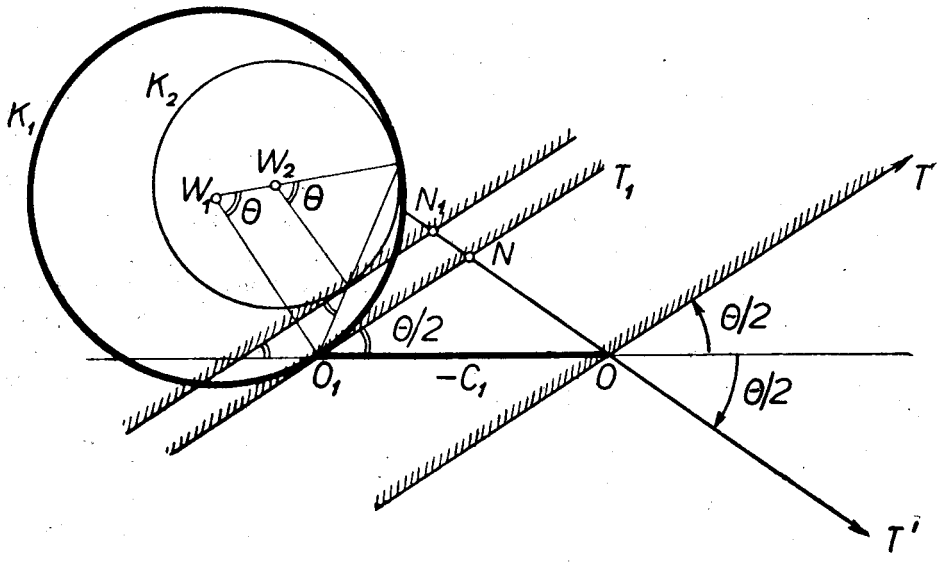

Fig. 1

Wird (25) auf $\overline{OT'}$ projiziert, nämlich wird nach Multiplikation mit $e^{\theta i/2}$ sein reeller Teil genommen, so folgt dass $S_n(\theta)$ nicht Null werden kann, falls

$$Re\,\{2\,ie^{\theta i/2}\,S_n(\theta)\}<0$$

ist, d. h. falls

$$Re\left\{e^{\theta i/2}\left[-c_1+\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu-c_{\nu+1})e^{\nu\theta i}\right]\right\}+c_{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\theta<0$$

ist.

Da $[-c_1+\Sigma(\ldots)]$ im System der Kreise $K_1, K_2, \ldots$ liegt, und da, wegen $\pi/2-\theta/2>\theta/2$, die Projektion von $[-c_1+\Sigma(\ldots)]$ auf $\overline{OT'}$ rechts

von $\overline{ON}$ liegt, so kann $S_n(\theta)$ nicht Null werden falls

$$c_{n+1} \leqslant \frac{c_1}{2} \leqslant \overline{ON}$$

ist.

Die erweiterte Bedingung folgt unmittelbar (s. Fig. 1) wenn man bemerkt dass die $[-c_1+\Sigma(\ldots)]$ aus (25) im Kreise K_2 liegt, so dass $S_n(\theta) \neq 0$ falls

$$c_{n+1} \leqslant \frac{c_1+(c_1-2c_2+c_3)}{2} \leqslant \frac{\overline{ON}+\overline{NN_1}}{2}$$

ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Jackson, D. — Über eine trigonometrische Summe. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Bd. *32* (1911).

[2] Gronwall, T. H. — Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen ... *Math. Ann.* Bd. *72*, S. 228—243 (1912).

[3] Fejér, L. — Einige Sätze die sich auf das Vorzeichen ... *Monatshefte für Math. u. Phys. 35* (2), S. 365—344 (1928).

[4] Landau, E. — Über eine trigonometrische Ungleichung. *Math. Zeit. 37*, S. 36 (1933).

[5] Fejér, L. — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Trans. Amer. Math. Soc. 39*, S. 18—59 (1936).

[6] Tomić, M. — Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe 2*, S. 146—156 (1948).

[7] Karamata, J. et Tomić, M. — Considérations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques. *Ibid.* S. 157—175.

[8] Tomić, M. — Sur certaines propriétés des séries de Taylor dont les coefficients sont convexes ou satisfont à d'autres conditions analogues. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe 3*, S. 244—258 (1950).