LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3e ORDRE

par

V. NIČE

Tout comme les courbes circulaires d'un certain ordre et genre se distinguent entre les autres courbes de cet ordre et genre, de même les surfaces contenant la conique absolue sont distinguées entre les autres surfaces du même ordre et ayant les mêmes singularités. Entre les quadriques il n'y a que la sphère qui passe par la conique absolue. Les surfaces générales du 3e ordre embrassent plusieurs différentes formes de surfaces passant par la conique absolue. Entre elles il y a une espèce particulière de telles surfaces qui se distinguent par leurs propriétés spéciales. C'est précisément cette espèce qui fait l'objet de ce travail.

Les plans tangents des surfaces de cette espèce le long de la conique absolue enveloppent un cône imaginaire du 2e ordre dont le sommet réel se trouve sur la surface même. Nous allons voir que ces surfaces possèdent quelques propriétés caractéristiques de la sphère. La différence entre ces surfaces et les autres qui passent par la conique absolue pourrait donc être comparée avec la différence entre les courbes circulaires ordinaires du 3e ordre et la strophoïdale respectivement la strophoïde ordinaire. A cause de cette analogie avec la strophoïde et la strophoïdale plane ces surfaces serront appelées surfaces strophoïdales du 3e ordre.

I. Steiner, Grassmann, Majcen et d'autres géomètres ont donné plusieurs procédés pour obtenir les surfaces générales du 3e ordre. R. Sturm a montré qu'elles peuvent être obtenues comme produit d'une gerbe de rayons et d'une gerbe de surfaces du 2e ordre en correspondence homographique. Nous choisissons ce même procédé en définissant la gerbe de quadriques à l'aide d'une conique et de deux points au lieu de 8 points associés. Ces trois éléments définissent une gerbe spéciale de quadriques.

Soit donnés dans l'espace une conique c et deux points A, B. Coupons cette conique par un plan passant par les points A, B. Les points d'intersection K_1, K_2 et les points A, B définissent dans ce plan un faisceau de coniques dont chacune forme avec la conique c la courbe fondamentale du 4e ordre (dégénérée en deux coniques) d'un faisceau de surfaces du 2e ordre. Donc il y a ∞^2 de quadriques passant par les points A, B, K_1, K_2 et la conique c. Il est évident que chaque plan passant par les points A, B donnera de cette manière les mêmes ∞^2 quadriques. Cela veut dire que la conique c et les points A, B définissent une gerbe de surfaces du 2e ordre.

Prolongeons la droite AB jusqu'au point d'intersection C avec le plan de la conique c. Déterminons sur la droite AB le point C_1 de sorte que nous ayons $(A\,B\,C\,C_1) = -1$. Désignons par t la polaire du point C par rapport à la conique c. Le point C et le plan ρ du point C_1 et de la polaire t sont pôle et plan polaire des ∞^2 quadriques de la gerbe. C'est une propriété de cette gerbe seulement qui nous sera utile dans ce qu'il suit.

Choisissons dans l'espace un point arbitraire S comme support d'une gerbe de droites. Le point d'intersection de chacune de ces droites soit le pôle du plan de la conique c comme plan polaire par rapport à une des quadriques de notre gerbe. Nous associons à chaque droite de la gerbe (S) la quadrique ainsi obtenue. De cette manière nous avons établi une correspondence homographique entre la gerbe de droites et la gerbe de quadriques, car il est clair qu'à chaque faisceau de 4 droites harmoniques de la gerbe (S) dans un plan correspondent 4 surfaces harmoniques d'un faisceau de surfaces dans la gerbe des quadriques (Reye).

Le produit de ces deux gerbes est une surface du 3e ordre, car une droite p quelconque la coupe en trois points. Soit la droite s l'intersection du plan ρ et du plan passant par le point S et la droite p. Les points de cette droite seront les pôles du plan de la contique c par rapport aux surfaces d'un faisceau dans notre gerbe de quadriques. Le plan (pS) coupe ce faisceau de surfaces en un faisceau de coniques et la gerbe de droites (S) en un faisceau de droites. Le produit de ces faisceaux est une courbe du 3e ordre qui coupe la droite p en trois points.

Les points S, A, B et la conique c se trouvent sur cette surface générale du 3e ordre. Chaque droite de jonction du point S et d'un point de la conique c a sur cette conique deux points en commun avec la surface du 3e ordre, car dans ce point cette droite touche la surface de la gerbe qui lui est associée. Il s'ensuit que les plans tangents de la surface du 3e ordre le long de la conique c enveloppent un cône du 2e ordre dont le sommet se trouve sur cette surface.

Les deux cônes passant par la conique c et ayant les points A, B comme sommets se coupent dans une autre conique c_1 qui se trouve dans le plan ρ. Le cône passant par la conique c_1 et ayant comme sommet le point S touche aussi la surface du 3e ordre le long de cette conique c_1, car au point de la conique chacune des génératrices du cône a deux points en commun avec la surface du 3e ordre. En effet, les points de la conique c_1 sont les sommets de tous les cônes dans notre faisceau spécial de la gerbe de quadriques.

Par une argumentation simple nous obtenons les 27 droites réelles ou imaginaires des surfaces du 3e ordre et aussi la paire de points doubles, réels ou imaginaires, sur la conique c. Dans la suite nous nous bornons à considérer le cas spécial de ces surfaces mentionné dans l'introduction.

II. Soit, comme auparavant, A, B, S des points arbitraires. La conique réelle c soit remplacée par la conique absolue. Notre gerbe du quadriques devient alors une gerbe de sphères définie par les points A, B. Le plan ρ sera le plan de symétrie du segment AB; les points d'intersection de ce plan et des droites de la gerbe (S) seront les pôles du plan polaire infiniment éloigné par rapport aux surfaces du 2e ordre passant par la conique absolue. Ce sont donc des sphères et leurs centres. On en conclut: une gerbe de sphères étant définie par deux points A, B, les points d'intersection de chaque sphère et de la droite passant par un point donné S et le centre de la sphère se trouvent sur une surface du 3e ordre passant par la conique absolue. Selon les résultats du § I. les points A, B, S se trouvent sur cette surface et le point S est le sommet d'un cône tangent du 2e ordre de la surface le long de conique absolue. Cette propriété de la surface nous indique non seulement que chaque section plane passant par S sera circulaire, mais aussi que le point S sera son foyer quadruple. Toutes les sections planes de notre surface strophoïdale passant par le point S seront donc des strophoïdales ou strophoïdes dont S est le foyer quadruple.

Soit la droite s l'intersection d'un tel plan passant par S et du plan de symétrie ρ des points A, B. Les sphères de la gerbe dont les centres se trouvent sur la droite s forment un faisceau de sphères. Ces sphères contiennent le cercle passant par A, B dont le centre se trouve sur s. Le plan de se cercle est perpendiculaire à la droite s. Le plan (Ss) coupe ce faisceau de sphères en un faisceau de cercles dont les centres se trouvent sur s. Les droites passant par S et par ces centres coupent les cercles associés dans les points d'une strophoïdale, c'est-à-dire d'une courbe bipartite du 3e ordre. Cela est vrai pour chaque plan du point S, donc la

surface strophoïdale a deux nappes. Le point S se trouve sur la partie ovale qui n'a pas de points à l'infini.

Considérons le faisceau de sphères de notre gerbe passant par les points A, B, S. Les centres de ces sphères se trouvent sur la droite du plan ρ qui est perpendiculaire au plan (A, B, S) et passe par le centre du cercle de ces trois points. Le plan de cette droite et du point S coupe le faisceau de sphères associé en un faisceau de cercles passant par S. Le produit de ce faisceau de cercles et du faisceau de droites associé du point S dégénère donc en une droite l et le point S, respectivemment la droite l et une paire de droites isotropes passant par S. Le point S et donc un ombilic de la surface strophoïdale. La droite l se trouve d'un côté du plan ρ et le point S de l'autre côté. Leurs distances du plan ρ sont égales. Le plan (A, B, S) est le plan de symétrie de la surface strophoïdale car il est un plan de symétrie de la gerbe de droites et de la gerbe de sphères. Ce plan coupe la surface en une strophoïdale que nous appelons la strophoïdale de symétrie de la surface. L'asymptote a de cette strophoïdale passe par le point d'intersection L de la droite l et de la strophoïdale. Il y a donc encore trois plans tangents passant par la droite l outre celui qui touche la surface au point S. Deux de ces plans touchent la surface aux points A, B et le troisième à l'infini. Comme toutes les sections de la surface sont circulaires, les plans de la droite l coupent la surface en cercles. Dans les plans (lA) et (lB) ce cercle dégénère en deux droites isotropes se coupant dans A respectivement dans B. Ces deux points sont donc aussi des ombilics.

On sait que l'asymptote de la stroptoïdale et le foyer quadruple sont à distances égales de la droite de symétrie du faisceau de cercles (générant la courbe avec un faisceau de droites). Il s'ensuit immédiatement que le plan α de la droite l et de l'asymptote a est un plan asymptotique de la surface strophoïdale. On conclut en outre que sur la droite infiniment éloignée de la surface se trouvent deux droites infiniment voisines de la surface qui se coupent. De cette manière nous avons obtenu toutes les trois droites réelles possibles de cette surface. Tous les plans parallèles au plan α coupent la surface en cercles, car se sont des coniques passant par les points d'intersection de la conique absolue et de la droite infiniment eloignée de la surface. Comme il existe quatre plans tangents parallèles au plan asymptotique α, la surface possède encore quatre ombilics dans son plan de symétrie. Il y a donc sept ombilics qui sont tous dans le plan de symétrie.

Nous avons vu que chaque plan du point S coupe la surface strophoïdale en une strophoïdale dont le point S est le foyer quadruple. Les

foyers quadruples des sections de la surface strophoïdale avec les plans d'une droite quelconque à l'infini se trouvent sur une perpendiculaire commune de ces plans, car celle-ci passe par le pôle de cette droite à l'infini par rapport à la conique absolue. Cette perpendiculaire est la section d'une paire de plan tangents imaginaires de la surface strophoïdale dans les points d'intersection de la droite à l'infini avec la conique absolue. Comme dans chaque faisceau de plans parallèles il y en a un qui passe par le point S et celui-ci est le foyer quadruple de la section, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants pour la surface strophoïdale:

a) Le foyer quadruple de chaque section plane de la surface strophoïdale est la projection normale du point S sur ce plan.

Il s'ensuit aussi:

b) Les foyers quadruples des sections de la surface strophoïdale avec les plans d'une droite quelconque se trouvent sur un cercle passant par le point S et coupant cette droite dans le point diamétral.

c) Les foyers quadruples des sections de la sufrace strophoïdale avec les plans d'un point quelconque se trouvent sur une sphère. Ce point et le point S sont des points diamétraux de la sphère.

Ces trois théorèmes mettent en relief l'analogie entre la surface strophoïdale et la sphère. Les résultats obtenus nous permettent d'ajouter les théorèmes suivante:

d) Entre les sections de la surface strophoïdale avec des plans parallèles il y en a, outre celle qui passe par S, encore deux qui sont des strophoïdales. Entre les plans d'une droite quelconque il y en a, outre celui qui passe par S, encore un ou trois qui coupent la surface strophoïdale en strophoïdales.

e) Entre les plans d'un point quelconque il y en a ∞^1 qui coupent la surface strophoïdale en strophoïdales. Les foyers quadruples de ces sections strophoïdales se trouvent sur une courbe sphérique du 4e ordre sur la surface strophoïdale.

La conique c_1 des sommets de tous les cônes dans notre gerbe de sphères est un cercle imaginaire dans le plan de symétrie des points A, B. Nous avons vu que les sections de la surface strophoïdale parallèles au plan asimptotique sont des cercles. A l'aide de ce fait et du théorème a) on conclut que toutes les sections des plans passant par les points A, B sont des strophoïdales dont les foyers quadruples se trouvent sur un cercle de la surface. Ce cercle passe par S et son plan est perpendiculaire à la droite AB.

Toute surface bipartite du 3e ordre possède, outre le plan tangent de ses trois droites réelles, encore 12 plans tangents contenant des paires de droites imaginaires de la surface. Chacune des trois droites réelles se trouve dans quatre de ces 12 plans (Cremona). On trouve facilement ces 12 plans en tenant compte du fait que deux droites réelles à l'infini de la surface coïncident. Les quatre plans passant par cette droite à l'infini doivent donc être comptés deux fois.

Si le point S se trouve sur la droite AB, la surface strophoïdale sera un surface de rotation. Toutes les droites réelles seront à l'infini et la surface de rotation aura une droite d'inflexion à l'infini. Toutes les sections planes menées par le point S seront des strophoïdes symétriques.

III. Supposons maintenant que les points A, B coïncident avec un seul point D. Le produit d'une telle gerbe de sphères et de la gerbe de droites (S) sera un surface strophoïdale avec le point double D. Dans ce cas le plan ρ passe par le point D et le cercle c_1 dégénère dans ce plan en une paire de droites isotropes du point D.

Outre les propriétés déjà exposées la surface en aura d'autres, car les plans de la droite SD et les plans de l'axe de la gerbe de sphères coupent la surfaces en strophoïdes.

Selon II. les foyers quadruples des sections planes de la surface sont les projections orthogonales du point S sur le plan de la section. Il s'ensuit que les plans de la droite SD coupent la surface en strophoïdes. Les foyers quadruples des sections planes (du genre zéro) du point D se trouvent sur une sphère dont SD est un diamètre. Le plan mené par la droite réelle finie et le point D est perpendiculaire à la droite SD et coupe la surface encore en une paire de droites isotropes. La sphère dont nous venons de parler touche ce plan au point de ces droites isotropes, donc elle coupe la surface en une courbe composée de la paire de droites isotropes, de la conique absolue et d'un cercle. Tous les plans de l'axe de la gerbe de sphères peuvent être considérés comme des sphères à diamètre infini. Les points de la surface se trouvant sur de telles sphères sont sur la droite à l'infini et sur un cercle passant par le point S et coupant l'axe de la gerbe au point diamétral. Ce fait est en vigueur pour toutes les trois formes de surfaces strophoïdales.

On sait que toute courbe unicursale circulaire du 3e ordre est la courbe pédale d'une parabole. La strophoïde est la courbe pédale d'une parabole dont le foyer se trouve sur la droite joignant le foyer quadruple et le point double de la strophoïde. Le foyer quadruple est au centre du foyer de la parabole et du point double de la strophoïde. La directrice de la

parabole est parallèle à l'asymptote de la strophoïde et passe par son point double.

Nous avons dit que les sections de la surface strophoïdale et des plans de l'axe de la gerbe de sphères sont des strophoïdes dont les foyers quadruples forment un cercle qui passe par le point S et coupe l'axe orthogonalement au point diamétral à S. Choisissons sur la droite SD le point F de sorte que S bissecte le segment FD. Menons par le point F un cercle coupant orthogonalement l'axe au point diamétral à F. Les plans de l'axe coupent la surface strophoïdale en strophoïdes dont les foyers quadruples se trouvent sur le cercle passant par S; les points d'intersection des plans avec le cercle passant par F sont les foyers des paraboles dont les strophoïdes sont les courbes pédales par rapport au point D comme pôle. Les directrices de ces paraboles sont dans le plan ρ du point D. Considérons les plans orthogonaux au plan d'une telle parabole et enveloppant cette parabole. Ces plans enveloppent un cylindre parabolique qui est congruent à tous les autres cylindres obtenus de cette manière, car toutes les paraboles en question sont congruentes. Comme tous ces cylindres touchent un même plan le long de leurs génératrices de sommet et passent par un même point de ce plan, ils enveloppent un paraboloïde de rotation. Ce point se trouve sur une droite perpendiculaire au plan ρ et cette droite est l'axe du paraboloïde. Dans le plan ρ se trouvent toutes les directrices des sections axiales du paraboloïde et le point F est leur foyer commun. On en conclut que toute surface strophoïdale du 3e ordre à un point double est la surface pédale d'un paraboloïde de rotation si le pôle se trouve dans le plan des directrices des sections axiales du paraboloïde.

Sur une telle surface strophoïdale il n'y a que trois ombilics dans son plan de symétrie.

IV. Soient maintenant les points A, B sur l'axe de la gerbe de sphères des points imaginaires. Le produit de la gerbe de sphères et de la gerbe de droites (S) sera une surface unipartite du 3e ordre. On peut imaginer cette surface comme formée à partir d'une surface à point double, ce point s'étant decomposé au sens d'un hyperboloïde à une nappe (F. Klein). Par une droite (à l'infini ou non) on ne peut mener que quatre plans tangents, le plan asymptotique inclus. Donc ces surfaces strophoïdales n'auront que trois ombilics (le point S inclus). Les plans tangents réels de la surface passant par le point S enveloppent un cône tangent le long du cercle c_1 de cette surface dans le plan ρ.

Nous savons que tous les plans du points S coupent la surface en strophoïdales ou strophoïdes dont S est le foyer quadruple. Les plans du point S touchant le cercle c_1 touchent la surface et coupent cette surface en strophoïdes, car les sections possèdent un point double. On voit donc qu'il y a ∞^1 de plans passant par le point S et coupant la surface unipartite strophoïdale en strophoïdes dont S est le foyer quadruple. Ces plans enveloppent un cône du 2e ordre et les points doubles des strophoïdes se trouvent sur un cercle de la surface.