SUR UNE PROPRIÉTE CARACTÉRISTIQUE DU CONTINU LINEAIRE ET LE PROBLÈME DE SUSLIN

par

DJURO KUREPA

Le but de la Note sera d'établir le théorème que voici (quant à la terminologie voir ci-après)[1]:

Théorème 1. *Pour qu'un ensemble totalement ordonné continu E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre naturel* $n > 1$ *tel que l'ensemble*

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n}$$

vérifie la condition de Suslin. Le problème de savoir si la proposition précédente subsiste encore dans le cas $n = 1$ *coïncide avec le célèbre problème de Suslin.*[2]

---

[1]) Le sujet de la Note faisait partie de mes conférences *On Suslin's problem* et *Sur le problème de Suslin* que j'avais faites à Harvard (27-9-1950), Ann Arbor (31-10-1950), Berkeley (24-11-1950) et à Lausanne (le 22-1-1951) recpectivement.

L'esquisse de la démonstration du théorème ce trouve dans ma Note *La condition de Suslin et une propriété caractéristique des nombres réels* (C. r. Paris, 231, 1113—1114 (1950)).

[2]) J'ai publié plusieurs travaux concernant le problème de Suslin:

I. Voir: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* à Paris, *198* (1934), p. 703 et p. 882; *202* (1936), p. 185; *203* (1936) p. 1049; *204* (1937) p. 325; *205* (1937) p. 1033 et p. 1196.

II. *Ensembles ordonnés et ramifiés.* Thèse, Paris, 1935, pp, 1—138 (aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade, 4,* (1935); *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn) Ibidem, 6* (1937), pp. 129—160.

III. *Une propriété des ensembles bien ordonnés linéaires, (Studia Mathematica,* Lavov *9* (1940), 23—42).

IV. *Über eine Eigenschaft von Systemen linearer wohlgeordneter Mengen (Math. Annalen, 118* (1942), 578—587).

V. *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés (Revista de Ciencias: Lima, Año 42,* (1940), 827—846; año *43* (1941), 483—500); *Le problème de Suslin et les espaces abstraits* (Ibidem Año *47*, pp. 457—488).

Corollaire 1. *Pour que la réponse au problème de Suslin soit affirmative, il faut et il suffit que l'espace $E \times E$ vérifie la condition de Suslin, dès que l'espace ordonné continu E la vérifie.*

Dans le § 3 on montrera un lien inattendu entre une subdivision complète de E d'une part et d'un pavage rectangulaire de $E \times E$ d'autre part.

Dans le § 4 on définira le *produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés* et on verra comment le théorème précédent s'exprime dans le nouveau langage. Dans le § 5 on prouvera une proposition interessante due à Sv. Kurepa concernant les courbes de Peano et le problème de Suslin. On indiquera, enfin, que les considérations de la Note ne constituent qu'une partie de recherches demandant à trouver des liens entre deux ensembles (espaces) d'une part et leur produit combinatoire d'autre part.

§ 1. Définitions

Définition 1.1. Soit E un ensemble totalement ordonné; l'espace ordonné E c'est l'espace constitué des points de l'ensemble E dans lequel l'adhérence $\overline{X}$ de tout $X \subseteq E$ est définie comme l'ensemble des points $a \in E$ tels que, quel que soit l'intervalle ouvert I de E contenant a, on ait

$$I \cap X \supset v \; (v = \text{l'ensemble vide}).$$

Définition 1·2. Soit n un nombre naturel > 1 et $E_1, E_2, \ldots E_n$ une suite de n ensemble (parmi lesquels on peut avoir des égaux); on définit le „parallélépipède"

$$\underbrace{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}_{n} \tag{1}$$

comme l'ensemble des transformations uniformes f de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$ vérifiant

$$f(v) \in E_v, \quad (v \leqslant n),$$

c'est-à-dire l'ensemble (1) est constitué des „complexes ordonnés"

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (x_v \in E_v, \quad v = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

la transformation f pouvant être désignée encore par

$$f(1), \quad f(2), \ldots, f(n). \tag{3}$$

En particulier, on considère le „cube"

$$\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n} \equiv E^n; \tag{4}$$

VI. *Ensembles de suites dénombrables d'entiers (Contribution au problème de Suslin) Bull. Ac. Sci. U. R. S. S.* avec la traduction en russe, *11* (1947), 59—74).

VII. *L'hypothèse du continu et le problème de Suslin (Publ. de l'Inst. Math. Ac. Serbe*, Belgrade, 5 (1948) 26—36).

et sa „diagonale“ constituée des points

$$(x, x, \ldots x), \quad (x \in E).$$

On pose également

$$E^1 = E. \tag{5}$$

Définition 1.3. E étant un espace abstrait définissable au moyen des voisinages, l'espace E^n est constitué des points de E^n, tout point $f \in E^n$ ayant des voisinages de la forme

$$V(f(1)) \times V(f(2)) \times \ldots \times V(f(n)),$$

les $V(f(i))$, parcourant indépendamment les voisinages du point $f(i) \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Définition 1. 4. Nous dirons qu'un espace vérifie la *condition de* Suslin (ou qu'il jouit de la *propriété de* Suslin) si chaque famille d'ensembles ouverts deux à deux disjoints et extraits de l'espace est soit finie soit dénombrable (cf. Kurepa, *Comptes Rendus*, Paris, *204* (1937), p. 326 et *Revista de Ciencias*, Lima, año *47*, p. 458 et 469).

§ 2. Démonstrations du théorème précédent

§ 2. 1. *La condition du théorème est nécessaire;* c'est que E étant un ensemble ordonné continu, quel que soit $n > 1$ (et même pour $n = 1$), l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace E^n contenant un ensemble dénombrable partout dense, conséquence de la propriété analogue de l'espace $E^1 = E$: A étant un sous-ensemble dénombrable de E partout dense dans E, l'ensemble $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$ est dénombrable et partout dense dans E^n.

§ 2.2. *La condition du théorème est suffisante:* E étant un ensemble ordonné continu tel qu'il existe un entier $n > 1$ tel que l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace ordonné E contient un enseble dénombrable partout dense et dès lors, d'après un théorème de Cantor, est semblable à un ensemble linéaire. La démonstration fait usage de ceci: Si l'on partage un segment quelconque S de E en deux segments contigüs: le segment gauche S_0 et le segment droit S_1 et qu'on considère le rectangle $S_1 \times S_0$ (fig. 1) alors, à une bipartition successive de plus en plus serrée de E, correspondra dans $E \times E$ un réseau de rectangles *non empiétants*. La figure 2 montre $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ rectangles d'ordre 0, 1, 2, 3 respectivement, résultant de bipartition de E et des trois itérations successives du même procédé sur des segments qu'on obtient

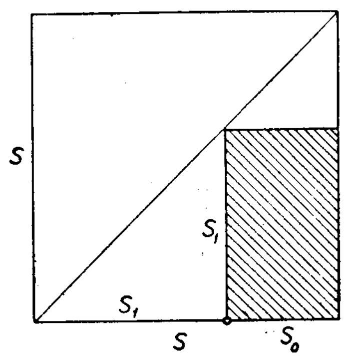

Fig. 1

ainsi. La demonstration complète résultera des lemmes 1—17 que nous allons passer en revue.

Lemme 1. *L'espace E^n vérifiant la condition de Suslin, l'espace $E^{(n-1)}$ la vérifie également.*

Dans le cas contraire, l'espace $E^{(n-1)}$ contiendrait une famille infinie non dénombrable Φ d'ensembles ouverts deux à deux disjoints; si alors I est un intervalle ouvert quelconque de l'ensemble ordonné E, la famille $\Phi \times I$ des $X \times I$, $(X \in \Phi)$ serait une famille infinie non dénombrable d'ensembles ouverts deux à deux disjoints extraits de E^n, contrairement à l'hypothèse que E^n vérifie la condition de Suslin En appliquant le lemme précédent $n-1$ fois, on obtient le

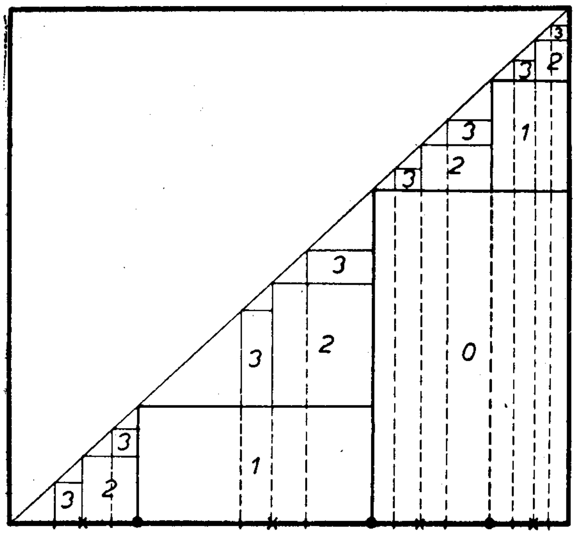

Fig. 2

Lemme 2. *Si l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace E^ν la vérifie également, quel que soit le nombre $\nu < n$; en particulier, l'espace E et le carré E^2 vérifient la condition de Suslin, dès qu'elle est vérifiée par un E^n avec $n \geqslant 2$.*

Lemme 3. *Toute famille de segments de E bien ordonnée par rapport à la relation $\supseteq$ $(\subseteq)$ est finie ou dénombrable.*

En effet, les intérieurs des ensembles

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

des éléments consécutifs A, B de la famille étant deux à deux disjoints, le lemme 3 résulte de ce que l'ensemble E vérifie la condition de Suslin.

Prouvons que l'ensemble ordonné E contient un *ensemble dénombrable partout dense.* On peut supposer que E possède un point initial et un point terminal.

Ceci étant, appliquons sur l'ensemble ordonné E le procédé de bipartition: chaque segment S de E sera décomposé en deux segments ayant en commun un seul point intérieur à S; la famille de ces deux segments là étant désignée par

$$f(S), \tag{6}$$

définissons par récurrence les familles

$$D_0, D_1, \ldots, D_\xi, \ldots, (\xi < \gamma) \tag{7}$$

de segments de E comme il suit:

D_0 sera la famille $\{E\}$ constituée de l'ensemble donné E;

D_1 sera la famille des segments appartenant à la famille $f(X):(X \in D_0)$; donc $D_1 = f(E)$; d'une façon générale, soit α un ordinal > 0 tel que les familles

$$D_0, \ldots, D_\xi, \ldots, (\xi < \alpha)$$

soient définies, quel que soit $\xi < \alpha$; définissons D_α.

Si $\alpha - 1$ existe, on posera

$$D_\alpha = \bigcup_X f(X), (X \in D_{\alpha-1});$$

donc la famille D_α est constituée des segments de E obtenus en partageant tout élément de $D_{\alpha-1}$ en deux segments contigus; bien entendu, si un $X \in D_{\alpha-1}$ est constitué d'un point — ce qui arrivera seulement dans le cas où le nombre ordinal $\alpha - 1$ est dépourvu de son prédécesseur immédiat alors, $f(X)$ ne se définit pas — ou si l'on veut, on pose $f(X) = v$ (vide).

Si $\alpha - 1$ n'existe pas, on définira D_α comme la famille des ensembles

$$\bigcap_\xi X_\xi, \quad (\xi < \alpha) \tag{9}$$

les X_ξ vérifiant

$$(X_\xi \in R_\xi \text{ et } X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_\xi \supseteq \ldots), \quad (\xi < \alpha). \tag{10}$$

Bien entendu, si une suite pareille n'existe pas, cela voudra dire que D_α est vide: $D_\alpha = v$.

Ainsi, par récurrence transfinie, on définit D_α pour tout ordinal α (dans un instant, nous verrons qu'à partir d'un $\gamma < \omega_1$, les D_α sont vides). On obtient ainsi la suite

$$D_0, D_1, \ldots, D_\alpha, \ldots, \tag{11}$$

et l'ensemble

$$D = \bigcup_\alpha D_\alpha \tag{12}$$

de segments de E appartenant à l'une des familles (11); l'ensemble vide et les segments uniponctuels de E s'y présentent aussi, comme nous le verrons bientôt.

Pour tout $\Phi \subseteq D$ nous désignerons par

$$\Psi \Phi \tag{13}$$

la famille des éléments de Φ ayant plus d'un point. En particulier, ΨD sera l'ensemble des segments non uniponctuels appartenant à l'une des familles (11).

En ordonnant par $\supseteq$ la famille D et la famille ΨD, on obtient les ensembles partiellement ordonnés

$$(D;\supseteq),\quad (\Psi D;\supseteq) \tag{14}$$

respectivement.

Lemme 4. *Quel que soit l'ordinal* α, *la famille* D_α *est ou bien vide ou bien se compose de segments de* E *n'empiétant pas les uns sur les autres* (bien entendu, on peut en avoir des uniponctuels).

Le lemme se démontre par récurrence. Il en est de même du

Lemme 5. *Quels que soieut les ordinaux* α, β, *les* D_α, D_β *sont sans éléments communs.*

Lemme 6. *Quels que soient les ordinaux* $\alpha < \beta$, *la relation* $B \in \Psi D_\beta$ (et donc $\Psi D_\beta \supset v$) *entraîne l'existence d'un et d'un seul élément* $A \in D_\alpha$ *vérifiant* $A \supset B$.

En effet, le lemme est évident si $0 = \alpha < \beta = 1$; soit $\eta > 1$ un ordinal tel que $\Psi D_\eta \supset v$ et que le lemme 6 subsiste toutes les fois que $\alpha < \beta < \eta$; prouvons qu'il en est de même si $\beta \leqslant \eta$. Si $\eta - 1$ existe, on aura, à la suite de (8) et (13):

$$\Psi D_\eta = \bigcup_X f(X),\quad (X \in \Psi D_{\eta-1});$$

dès lors, chaque élément de ΨD_η a un seul prédécesseur immédiat dans

$$\Psi D_{\eta-1}$$

et donc dans

$$\bigcup_\xi \Psi D_\xi,\quad (\xi < \eta).$$

De plus, il est évident que le non empiètement des éléments de

$$\Psi D_{\eta-1}$$

entraîne le non empiètement des éléments de ΨD_η.

Si $\eta - 1$ n'existe pas, les éléments de ΨD_η sont de la forme (9) et le fait à démontrer en résulte immédiatement.

Ainsi, par récurrence, le lemme 6 est démontré complètement.

Lemme 7. *Si $X \in \Psi D$, alors $f(X) \subseteq \Psi D$; $f(X)$ est l'ensemble des successeurs immédiats de X dans ΨD.*

Lemme 8. *Si A, B sont deux éléments de ΨD tels que $A \supset B$, alors l'un et seulement l'un des éléments de $f(A)$ contient B.*

Le lemme résulte des lemmes 6 et 7.

Lemme 9. Quels que soient $D_\alpha \supset v$ et $A \in D_\alpha$; l'ensemble

$$(-\infty, A)$$

des éléments X de D vérifiant $X \supset A$ est bien ordonné par rapport à la relation $\supseteq$ et son type d'ordre est égal à α (autrement dit, l'ensemble partiellement ordonné $(\Psi D; \supseteq)$ est un tableau ramifié dont les rangées coïncident avec des ΨD_α).

Le lemme 9 résulte des lemmes 6 et 7.

Lemme 10. Quels que soient $a \in E$ et l'ordinal ξ, D_ξ contient au plus deux éléments contenant a; en posant

$$a(\xi) = \bigcup_X X, \quad (X \in D_\xi \quad \text{et} \quad a \in X),$$

$a(\xi)$ est soit vide (v) soit un segment de E; si $a(\xi) \supset v$, alors

$$a(\beta) \supset a(\xi) \quad \text{pour tout ordinal} \quad \beta < \xi. \tag{16}$$

Tout d'abord, si D_ξ contenait trois éléments distincts A, B, C, contenant a, au moins deux des trois segments A, B, C chevaucheraient, contrairement au lemme 4. Par conséquent, $a(\xi)$ est soit vide soit un segment de E. Enfin, le reste du lemme 10 se démontre par récurrence.

Lemme 11. Quel que soit $a \in E$, il y a un ordinal γ_a vérifiant

$$\gamma_a < \omega_1 \tag{17}$$

$$a \text{ non } \in \bigcup_X X, \ (X \in \psi D_{\gamma_a}) \tag{18}$$

et tel que les ensembles

$$a(\xi), \quad (\xi < \gamma_a) \tag{19}$$

constituent une famille bien ordonnée par raport à $\supseteq$ vérifiant

$$\bigcap_\xi a(\xi) = \{a\}, \quad (\xi < \gamma_a). \tag{20}$$

Si l'on avait un $a \in E$ tel que $a(\xi) \supseteq v$ pour tout $\xi < \omega_1$, on en déduirait, d'après le lemme 10, que les $a(\xi)$, $(\xi < \omega_1)$ constituent une suite infinie non dénombrable de segments strictement décroissants de E, contrairement au lemme 3.

Ceci étant, il suffit de désigner par γ_a le premier nombre ordinal ξ tel que la famille ΨD ne contienne aucun élément contenant a, pour se rendre compte de la validité du lemme 11.

Du lemme 11 on déduit immédiatement le

Lemme 12. *L'ensemble contitué des extrémités des $X \in \Psi D$ est partout dense dans E.*

Posons

$$\gamma = \sup_a \gamma_a, \quad (a \in E); \tag{21}$$

à la suite de la relation (17), on aura

$$\gamma \leqslant \omega_1; \tag{22}$$

il est essentiel que c'est le signe $<$ qui s'y présente nécessairement (cf. le lemme 15).

Lemme 13. Quel que soit $\alpha < \gamma$, la famille ΨD_α est finie ou dénombrable.

C'est que les intérieurs des $X \in \psi D_\alpha$ sont deux à deux disjoints.

Lemme 14. Si X, Y sont deux éléments distincts de ΨD, les „rectangles„ $X_1 \times X_0$, $Y_1 \times Y_0$ de E^2 n' empiètent pas l'un sur l'autre (nous y désignons respectivement par X_0, X_1 la section initiale et la section finale de X, les deux segments X_0, X_1 constituant la famille $f(X)$ (cf. (6)).

En effet, le lemme est évident si les deux segments X, Y sont non-empiétants; reste encore le cas où $X \supset Y$ ou $Y \supset X$. Si $X \supset Y$ donc aussi $X \supset Y_i$, $(i=0, 1)$, l'un et seulement l'un des X_0, X_1, soit X_0, contient Y (v. le lemme 8); dès lors $X_0 \supset Y_0 \cup Y_1$; par conséquent, X_1 et Y_1 sont non-empiétants; il en est alors de même des rectangles $X_1 \times X_0$, $Y_1 \times Y_0$; l'empiètement de deux rectangles ayant lieu dans le cas et seulement dans le cas où empiètent aussi bien les premières projections et les secondes projections des rectangles.

Lemma 15. *Le carré* $E \times E$ *contient* $k(\Psi D)$[1] *d'ensembles ouverts deux à deux disjoints.*

En effet, faisons correspondre à tout $X \in \Psi D$ l'intérieur du rectangle $X_1 \times X_0$ (pour la signification de X_0 et X_1 voir le lemme 14); la correspondance étant biunivoque, le lemme 15 est une conséquence immédiate du lemme 14.

Lemma 16. *L'ensemble* ΨD *est dénombrable.*

Que le cardinal $k \Psi D$ de ΨD soit $\leqslant \aleph_0$, cela résulte du lemme 15 et de l'hypothèse que $E \times E$ vérifie la condition de Suslin; que d'autre part, $k \Psi D \geqslant \aleph_0$, cela résulte du fait que $\gamma \geqslant \omega_0$ et que les ΨD_α, $(\alpha < \gamma)$, sont deux á deux sans éléments communs.

Lemma 17. *L'ensemble* E *contient un ensemble dénombrable partout dense.*

En effet, d'après le lemme 15, l'ensemble ΨD est dénombrable; il en est donc de même de l'ensemble des extrémités des $X \in \Psi D$; cet ensemble étant, d'après le lemme 11, partout dense dans E, la démonstration du lemme 16 est accomplie.

Finalement l'ensemble ordonné continu E contenant un ensemble dénombrable partout dense, E est, d'après un théorème classique de Cantor, semblable à un ensemble linéaire.

C. q. f. d.

§ 3. Pavage du carré $E \times E$.

En considérant les rectangles

$$A \times B, \quad (A, B \in f(X), \quad X \in \Psi D, \quad \text{avec} \quad A \neq B) \qquad (3.1)$$

---

[1]) $kX =$ le cardinal de X.

on obtient un pavage du carré $E \times E$: les rectangles (3. 1) ne chevauchent pas et épuisent le carré $E \times E$.[1]

Il est utile de faire le procédé analogue en se servant de subdivisions successives à 3, 4 etc. parties.

D'une façon générale, $T = (T; \supseteq)$ étant un tableau ramifié *complet* d'ensembles décroissants (cf. Thèse, pp. 81—85), M étant la réunion des $X \in T$, alors les rectangles

$$A \times B, \ (A; B \in f(X), \ X \in T \text{ avec } 1 < kX = \text{le cardinal de } X \text{ et } A \neq B)$$

constituent un pavage du carré $M \times M$ dont on a enlevé un certain sous-ensemble de la diagonale; $f(X)$ y désigne l'ensemble des successeurs immédiats de X dans $(T; \supseteq)$.

On trouve ainsi un lien intime entre des subdivisions complètes d'un ensemble M d'une part et de certains pavages de $M \times M$ d'autre part.

§ 4. Produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés

$$(K; \leqslant_1), \ (M; \leqslant_2)$$

étant ensembles partiellement ordonnés, *le produit pur de* K *et* M sera l'ensemble

$$(K \times M; \leqslant) \tag{4. 1}$$

avec la condition que pour les éléments

$$(x; y), \ (x', y') \ \textit{de} \ (4. 1)$$

la relation

$$(x, y) \ \rho \ (x', y')$$

soit équivalente au système

$$x \rho_i x'; \ y \rho_i y', \ (i = 1, 2),$$

ρ désignant un élément quelconque de $\{=, <\}$.

On démontre que le produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés est partiellement ordonné; en particulier, le carré pur $(E \times E; \leqslant)$ d'un ensemble partiellement ordonné est un ensemble partiellement ordonné dont la diagonale est un sous-ensemble semblable à l'ensemble E lui-même.

---

[1]) Le pavage n'atteint pas un certain sous-ensemble de la diagonale facile à reconstruire.

Le théorème et le corrollaire précédents peuvent alors s'exprimer de la façon suivante[1]:

Théorème 4. 1. *Pour qu'un ensemble ordonné continu E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit que chaque famille d'intervalles (extrémités exclues) deux à deux disjoints et extraits du carré pur de E soit au plus dénombrable.*

§ 5. La condition de Suslin et les continus de Peano.

En se basant sur le théorème I Svetozar Kurepa en a déduit un autre que voici:

Théorème 5. 1. *Soit E un ensemble ordonné continu muni du point initial et du point final et vérifiant la condition de* Suslin; *pour que E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et suffit que pour chaque entier* $n > 1$, *l'espace E soit un transformé continu univoque de E.*

Que les conditions du théorème 5. 1 soient nécessaires c'est justement le contenu d'une proposition bien connue de Peano concernant des courbes remplissant un carré, un cube etc. Or, les conditions du théorème 5. 1 sont encore suffisantes: si elles sont vérifiées par E, E est semblable à un ensemble linéaire. Cela résulte du théorème 1, puisque des conditions du théorème 5. 1 on déduit que E^n vérifie la condition de Suslin.

En effet, dans le cas contraire, on aurait une famille infinie non dénombrable F de „cubes" deux à deux sans points communs et extraits de E^n. Soient $I \in F$ et i un point intérieur de I; alors, par hypothèse, il existe une transformation f uniforme continue de E sur E^n; si alors i_0 est un point du sous ensemble $f^{-1}(i)$, la continuité de f au point i_0 entraîne l'existance d'un voisinage I_0 de i_0 dans E se transformant dans le voisinage I de i:

$$f I_0 \subseteq I.$$

Les $I \in F$ étant deux à deux disjoints, il en seraient de même des $I_0, (I \in F)$, la transformation f étant uniforme ce qui voudrait dire que les

$$I_0, (I \in F)$$

constitueraient une famille infinie non dénombrable d'intervalles de E deux à deux disjoints, contrairement à ce que, par supposition, E vérifie la condition de Suslin.

A ce propos il est bien intéressant de remarquer ceci. D'une part, on sait que la découverte des courbes de Peano c'est-à-dire des courbes

[1]) Il est instructif de subdiviser à priori non pas E mais la diagonale de $E \times E$ et d'en reconstruire le pavage du carré.

remplissant une aire suscitait une grande surprise. D'autre part, on voit que la non-existance d'une „*courbe*" remplissant le carré $E \times E$, c-est-à-dire la non-existence d'une transformation uniforme continue d'un ensemble ordonné continu borné E vérifiant la condition de Suslin sur son carré $E \times E$ est équivalente à la réponse négative au problème de Suslin. Ainsi pour des E pareils, le phénomène de Peano (le fait que E^2 soit un transpormé continu de E) est même caractéristique pour le continu linéaire.

On peut même se demander si un ensemble ordonné continu borné E tel que E^2 soit un transformé continu de E soit nécessairement semblable à l'ensemble des nombrés réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 6. En terminant, ajoutons que nous ne connaissons aucun couple d'espaces jouissant de la propriété de Suslin dont le produit topologique cesserait de vérifier la condition de Suslin; il en est de même de la propriété lindelöffienne ou de la condition que tout ensemble ouvert soit un F_σ ou que tout ensemble isolé soit $\leqslant \aleph_0$. Dans le cas des espaces ordonnés, *chacun de ses problèmes est d'une manière équivalente lié au problème* de Suslin.

Il y là un ensemble de problèmes à explorer les liens entre un ensemble (espace) et son carré.

Zagreb, mois de mai 1950 Institut de Mathématiques, Université