ÜBER DIE RANDWERTAUFGABE ZWEITER ORDNUNG

von

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

1. Im Folgenden befasse ich mich mit der nichtlinearen Randwertaufgabe zweiter Ordnung; dabei beschränke ich mich auf diejenigen Existenzsätze deren Beweis auf der Methode der schrittweisen Annäherung beruht.

Um das Wesentliche hervortreten zu lassen betrachte ich die Differentialgleichungen der Form $y'' = f(x, y)$ obwohl man entsprechende Ergebnisse auch im allgemeineren Falle erhalten kann.

Dann lautet die in Frage kommende Randwertaufgabe wie folgt:

$$y'' = f(x, y); \qquad y(a) = y(b) = 0. \tag{I}$$

Diesbezüglich bewies Herr E. Picard[1]) folgenden

Satz. *Für alle* x, y *des Gebietes*

$$\mathfrak{G}_0:\ a \leqslant x \leqslant b, \qquad |y| \leqslant K$$

sei $f(x, y)$ *stetig,*

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{8K}{(b-a)^2} \tag{a}$$

und genüge der Lipschitz-Bedingung

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \lambda\, |\bar{y} - \underline{y}|.$$

Ist

$$\lambda\,(b-a)^2 < 8 \tag{b}$$

so hat (I) *genau eine in* $\mathfrak{G}_0$ *liegende Lösung* (welche mittels der Methode der schrittweisen Annäherung berechnet werden kann).

Diesen Satz werde ich in mehreren Richtungen verallgemeinern.

---

1) E. Picard, Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, Paris 1930.

Erstens ersetze ich die Ungleichung (b) durch die wesentlich allgemeinere $\lambda (b-a)^2 < \pi^2$.

Zweitens ersetze ich die Ungleichung (a) durch $|f(x, y)| \leqslant h(x)$. Diese Verallgemeinerung führt zu einer neuen Definition des Gebietes $\mathfrak{G}_0$. Dadurch wird die Klasse der zulässigen $f(x, y)$ verallgemeinert.

Anschliessend gebe ich eine Umdeutung des Hauptsatzes (Satz A); auf diese Weise erhalte ich einen Nullstellensatz für die Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen (Satz C). Vermöge der genannten Verschärfung von (b) und der neuen Definition von $\mathfrak{G}_0$ enthält Satz B den Sturmschen Satz: *Sind a und b zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer Lösung von* $y'' = -g(x)\, y$ *mit* $0 \leqslant g(x) \leqslant \lambda$ *so ist* $(b-a) \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$,[2] als Speziallfall.

Abschliessend werde ich zeigen dass im Satze A keine der gemachten Voraussetzungen gemildert werden kann.

2. Es bezeichne $G(x, t)$ die Greensche Funktion von $y'' = 0$ bei den Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$. Also

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)(t-a)}{b-a} & \text{für } a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \\[2ex] \dfrac{(b-t)(x-a)}{b-a} & \text{für } a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \end{cases}$$

Die Funktion $f(x, y)$ wird eine LP-Funktion genannt falls fo' Voraussetzungen erfüllt sind:

a) Für $a < x < b$ ist $h(x)$ stetig und positiv.

b) Für $a < x < b$ ist

$$H(x) = \int_a^b G(x, t)\, h(t)\, dt$$

und

$$\lim_{x=a} H(x) = \lim_{x=b} H(x) = 0.$$

c) Im Gebiete

$$\mathfrak{G}: \quad a < x < b, \quad |y| \leqslant H(x)$$

ist

$$f(x, y) \text{ stetig,}$$

$$|f(x, y)| \leqslant h(x)$$

[2] E. Kamke, Differentialgleichungen, Leipzig 1942. S 124.—128.

und erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x,\bar{y})-f(x,y)|\leqslant\lambda\,|\bar{y}-y|.$$

Bemerkung 1. Die Voraussetzungen a) und b) sind erfüllt wenn $h(x)$ für $a<x<b$ stetig und der Ungleichung

$$h(x)\leqslant(x-a)^{\vartheta-2}\,(b-x)^{\vartheta-2}$$

mit $0<\vartheta\leqslant 2$ genügt. Also insbesondere wenn die Voraussetzungen des Picardschen Satzes erfüllt sind.

3. Der zu beweisende Satz lautet:

Satz A. *Ist* $f(x,y)$ *eine* LP-*Funktion und*

$$\lambda\,(b-a)^2<\pi^2 \tag{c}$$

so hat die Randwertaufgabe (I) *genau eine in* $\mathfrak{G}$ *liegende Lösung* (welche mittels der Methode der schrittweisen Annäherung berechnet werden kann).

Bemerkung 2. Auf Grund des Satzes A hat die Duffingsche Randwertaufgabe[8)]

$$y''=-\alpha^2\sin y+\beta\sin x;\qquad y(0)=y(\pi)=0$$

genau eine Lösung wenn $\alpha^2<1$ ist. Diese Lösung liegt in dem durch $0\leqslant x\leqslant\pi$, $|y|\leqslant\frac{\alpha^2}{2}x(\pi-x)+|\beta|\sin x$ definierten Gebiet $\mathfrak{G}$. Denn $h(x)=$ $=\alpha^2+|\beta|\sin x$ ergibt $H(x)=\frac{\alpha^2}{2}x(\pi-x)+|\beta|\sin x$.

Aus Satz A lässt sich folgende Verallgemeinerung des Sturmschen Satzes herleiten.

Satz B. *Ist* $f(x,y)$ *für* $a\leqslant x\leqslant b$ *eine* LP-*Funktion die der Bedingung*

$$f(x,0)\equiv 0$$

genügt und sind a *und* b *zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer eigentlichen Lösung von* $y''=f(x,y)$ *so besteht die Ungleichung*

$$b-a\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}. \tag{d}$$

Herleitung des Satzes B aus Satz A. Wäre die Ungleichung (d) nicht richtig (also (c) richtig) dann müsste durch die Punkte $(a,0)$ und

[8)] Loc. cit.[2)] S. 546—547.

$(b, 0)$ genau eine Integralkurve gehen was nicht der Fall sein kann da wegen $f(x, 0) \equiv 0$, $y \equiv 0$ eine Lösung ist.

Bemerkung 3. Satz B enthält die Sturmsche Ungleichung; denn sind a und b zwei aufeinanderfolgende Nullstellen einer Lösung y_0 von $y'' = -g(x)\, y$ so ist falls $h(x) = g(x)\, y_0(x)$ gesetzt wird

$$H(x) = \int_a^b G(x, t)\, g(t)\, y_0(t)\, dt$$

$$= y_0$$

und somit $|g(x)\, y| \leqslant h(x)$ für alle in $\mathfrak{G}$ liegende x, y d. h. $f(x, y) = -g(x)\, y$ eine LP-Funktion (mit der Lipschitz-Konstante $\lambda = \operatorname{Max} |g(x|)$.

4. Ich will die im Abschnit 1 erwähnte Tatsache dass keine der gemachten Voraussetzungen über $f(x, y)$ gemildert werden kann nachweisen.

Zunächst sei trivialerweise bemerkt dass die Ungleichung $|y| \leqslant H(x)$ nicht durch $|y| < H(x)$ ersetzt werden kann. Denn die Lösung $y = H(x)$ der Randwertaufgabe

$$y'' = -h(x); \qquad y(a) = y(b) = 0$$

liegt am Rande vom $\mathfrak{G}$.

Ich habe noch zu zeigen dass die Ungleichung $\lambda (b-a)^2 < \pi^2$ nicht durch $\lambda (b-a)^2 \leqslant \pi^2$ ersetzt werden kann.

O. B. d. A. sei $a = 0$ und $b = 1$. $f(x, y) = -\pi^2 y$ ist eine LP-Funktion mit $\lambda = \pi^2$, $h(x) = \pi^2 \sin \pi x$ und $H(x) = \sin \pi x$. Da $y = c \sin \pi x$ für jedes c eine Lösung der Randwertaufgabe

$$y'' = -\pi^2 y; \qquad y(0) = y(1) = 0$$

ist so liegen in $\mathfrak{G}$ unendlich viele Lösungen (alle deren Integrationskonstante c der Ungleichung $|c| < 1$ genügt).

5. Beweis des Satzes A. O.B.d.A. sei $a = 0$ und $b = 1$. Der Beweis des Satzes A stützt sich auf folgenden

Hilfssatz. *Sei*

$$p_1(x) = 2H(x) \tag{1}$$

und $p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x; \lambda)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *für jedes* (komplexwertige) λ *mittels*

$$p_{n+1}(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t)\, p_n(t)\, dt \tag{2}$$

erklärt.

Ist

$$|\lambda| < \pi^2$$

so konvergiert

$$P(x) = P(x;\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(x)$$

gleichmässig für alle $0 \leqslant x \leqslant 1$ *und ist*

$$= +2\,\frac{\sin(1-x)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\int_0^x h(t)\sin t\sqrt{\lambda}\,dt$$

$$+2\,\frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\int_x^1 h(t)\sin(1-t)\sqrt{\lambda}\,dt.$$

Diesen Hilfssatz werde ich im nächsten Abschnitt beweisen. Vorerst leite ich den Satz A ab.

Die schrittweisen Annäherungen y_n seien wie üblich mittels

$$y_n = -\int_0^1 G(x,t)\,f(t, y_{n-1})\,dt \tag{3}$$

mit in $\mathfrak{G}$ liegenden y_0 erklärt.

a) Alle y_n liegen im Gebiete $\mathfrak{G}$. Ist nämlich diese Behauptung richtig für ein y_{n-1} so ist

$$|y_n| \leqslant \int_0^1 G(x,t)\,|f(t, y_{n-1})|\,dt \leqslant \int_0^1 G(x,t)\,h(t)\,dt = H(x).$$

Also $|y_n| \leqslant H(x)$ für jedes n da y_0 in $\mathfrak{G}$ liegt.

b) Insbesondere gilt für jedes n die Ungleichung

$$|f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)| < \lambda\,|y_{n+1} - y_n|.$$

c) Es ist

$$|y_1 - y_0| \leqslant |y_1| + |y_0| \leqslant 2H(x). \tag{4}$$

Es werde $p_1(x) = 2H(x)$ gesetzt. Dann gilt: für jedes n ist

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant p_{n+1}(x) \tag{5}$$

wobei $p_n(x)$ die im Hilfssatz definierten Funktionen sind. Ist nämlich diese Ungleichung richtig für ein $n-1$ so ist wegen b)

$$|y_{n+1}-y_n| \leqslant \int_0^1 G(x,t)\,|f(t,y_n)-f(t,y_{n-1})|\,dt$$

$$\leqslant \lambda \int_0^1 G(x,t)\,|y_n-y_{n-1}|\,dt$$

$$\leqslant \lambda \int_0^1 G(x,t)\,p_n(t)\,dt = p_{n+1}(x)\,.$$

Also: wegen (4) ist (5) für jedes n richtig.

d) Auf Grund der Behauptung des Hilfssatzes konvergiert

$$y_n = y_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu - y_{\nu-1})$$

wenn $n \to \infty$ für jedes $0 \leqslant x \leqslant 1$; denn wegen (5) ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu - y_{\nu-1}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x).$$

Die Grenzfunktion $\lim\limits_{n=\infty} y_n$ sei mit y bezeichnet. Wegen $|f(t,y_n)| \leqslant h(t)$ lässt sich in (3) die Durchführung des Grenzüberganges $n \to \infty$ vor und hinter dem Integralzeichen vertauschen (Satz von Lebesgue). Also ist y eine Lösung der Integralgleichung

$$y = -\int_0^1 G(x,t)\,f(t,y)\,dt$$

und somit auch Lösung der gestellten Randwertaufgabe.

e) Die Eindeutigkeit der so gewonnenen Lösung ergibt slch (wie üblich) folgendermassen: Sei Y eine von y verschiedene Lösung der Randwertaufgabe. Dann ist auch

$$\psi(x) = -\int_0^1 G(x,t)\,f(t,Y)\,dt \tag{6}$$

eine Lösung. Denn aus (6) folgt $\psi'' = f(x,Y)$ d. h. $\psi'' \equiv Y''$; also ist $\psi - Y$ linear in x. Da $\psi - Y$ durch die Punkte (0,0) und (1,0) geht so ist $\psi - Y \equiv 0$; d. h.

$$Y = -\int_0^1 G(x,t)\,f(t,Y)\,dt.$$

Folglich ist

$$|Y - y_n| \leqslant \int_0^1 G(x, t)\,|f(t, Y) - f(t, y_{n-1})|\,dt$$

woraus sich wie vorhin

$$|Y - y_n| \leqslant p_{n+1}(x)$$

ergibt d.h. $Y \equiv \lim y_n$ auf Grund des Hilfssatzes.

6. Beweis des Hilfssatzes. a) Sei $\lambda > 0$; wegen (2) sind dann alle $p_n(x)$ positive. Ich beweise zunächst dass $\Sigma p_\nu(x)$ konvergiert falls $0 < \lambda < 1$ ist. Zu diesem Zwecke genügt es zu beweisen dass

$$p_n(x) \leqslant 2\,\lambda^{n-1} H(x) \tag{7}$$

für alle n und x richtig ist.

Für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist, wie leicht nachzuprüfen,

$$G(x, t)\, G(t, \xi) \leqslant G(x, \xi).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, t)\, H(t)\, dt &= \int_0^1 G(x, t) \left(\int_0^1 G(t, \xi)\, h(\xi)\, d\xi \right) dt \\ &= \int_0^1 h(\xi)\, d\xi \int_0^1 G(x, t)\, G(t, \xi)\, dt \qquad (8) \\ &\leqslant \int_0^1 G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi = H(x). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (7) ist richtig für $n = 1$ (denn es ist $p_1(x) = 2\,H(x)$). Sie sei richtig für ein $n \geqslant 1$. Dann ist laut (8)

$$p_{n+1}(x) \leqslant 2\,\lambda^n \int_0^1 G(x, t)\, H(t)\, dt \leqslant 2\lambda^n H(x)$$

w. z. b. w.

b) Wegen (2) ist $p_n(x)$ in der Form

$$p_n(x) = \lambda^{n-1} q_n(x)$$

mit von λ unabhängigen $q_n(x)$ darstellbar. Also konvergiert $\Sigma p_\nu(x)$ für jedes $|\lambda| < 1$.

Um zu beweisen, dass $\Sigma p_\nu(x)$ für alle $0 \leqslant x \leqslant 1$ konvergiert falls nur $|\lambda| < \pi^2$ ist, genügt es zu beweisen dass die für $|\lambda| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu-1} q_\nu(x)$$

eine innerhalb des Kreises $|\lambda| < \pi^2$ reguläre Funktion darstellt.

(2) besagt dass die $p_n(x)$ den Gleichungen

$$p''_{n+1}(x) = -\lambda p_n(x) \tag{9}$$

und

$$p_n(0) = p_n(1) = 0 \tag{10}$$

genügen. Es werde

$$P_n(x) = P_n(x;\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x)$$

gesetzt. Werden die Gleichungen (9) addiert so erhält man

$$P''_{n+1}(x) + \lambda P_n(x) = p''_1(x).$$

Sei $|\lambda| < 1$. Dann ist $\lim\limits_{n=\infty} P_n(x) = P(x)$ und wegen (9) auch $\lim\limits_{n=\infty} P''_n(x) = P''(x)$. Schliesslich, wegen (10), ist $P(0) = P(1) = 0$. Somit ist $P(x)$ eine Lösung der Aufgabe

$$P''(x) + \lambda P(x) = p''_1(x); \qquad P(0) = P(1) = 0.$$

Also ist

$$P(x) = -\frac{\sin(1-x)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \int_0^x p''_1(t) \sin t\sqrt{\lambda}\, dt - \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \int_x^1 p''_1(t) \sin(1-t)\sqrt{\lambda}\, dt$$

und somit $P(x)$ regulär für $|\lambda| < \pi^2$ w. z. b. w.