Bahnkurve der säkularen Polverlagerung.

Von

M. MILANKOVITCH.

Die isostatische Lagerung der aus Sial aufgebauten Kontinentalschollen auf der Simaunterlage hat, wie ich es an anderer Stelle gezeigt habe [1]), säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde zur Folge, unabhängig davon, ob sich die Kontinente gegen einander verschieben oder nicht. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der Polverlagerung erscheint dabei durch den Ausdruck

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \frac{\varkappa}{2\,(C-A)} \operatorname{grad} \Omega$$

veranschaulicht.

Hinsichtlich der in obigem Ausdruck vorkommenden Grössen ist folgendes mitzuteilen. Wenn die Kontinentalschollen auf die Dichte der Simaunterlage kondensiert wären, würde der Erdkörper durch ein glattes Ellipsoid, das innere Referenzellipsoid, begrenzt erscheinen. Die Trägheitshauptmomente des derart geformten Erdkörpers sind oben mit A, B, C, $(B = A)$ bezeichnet worden. Das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen, durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse sei J. Denkt man sich die Kontinentalschollen auf ihre normale Dichte vertikal ausgedehnt, so wird sich das Trägheitsmoment J um

1) Säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde. Berichte der königl. serbischen Akademie 1932. Vollinhaltlich übersetzt und veröffentlicht als das Kapitel 28 des Bandes I des Gutenbergschen Handbuchen der Geophysik. Berlin 1932.

der Sialdecke bezüglich einer durch den Ursprung O des Koordinatensystems gehenden Achse, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ einschliesst, dargestellt durch

$$\Omega = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma - \tag{3}$$
$$- 2A_1 \cos \beta \cos \gamma - 2A_2 \cos \gamma \cos \alpha - 2A_3 \cos \alpha \cos \beta \,.$$

Dreht man das Koordinatensystem derart, dass die Deviationsmomente zum Verschwinden gebracht werden, so wird weil

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \cos \beta; \quad z = r \cos \gamma \tag{4}$$

ist, mit Benützung von (2)

$$\Omega = I_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + I_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + I_3 \sin^2 \varphi, \tag{5}$$

wobei φ und ψ die Polarkoordinaten bezüglich des gedrehten Koordinatensystems bedeuten.

Legt man durch den Punkt $M(\varphi, \psi)$ der Erdoberfläche eine Tangentialebene und in derselben ein orthogonales Koordinatensystem $\xi - \eta$, dessen Ursprung in M und dessen ξ — Achse in der Meridianebene des Punktes M sich befindet und gegen den Aequator gerichtet ist, so kann dieses System zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Poles benutzt werden. Dass sich dasselbe von Punkt zu Punkt ändert, tut nichts zur Sache, weil für die ausserordentlich langsam und mit Ueberwindung von Widerständen verlaufende Polbewegung das Trägheitsgesetz nicht zu berücksichtigen ist, sonst aber die nachstehenden Gleichungen für jeden Punkt der Oberfläche ihre Giltigkeit behalten. Man bekommt auf diese Weise statt der Vektorgleichung (1) folgende zwei Skalargleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\varkappa}{2(C-A)} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\,, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\varkappa}{2(C-A)} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\,. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Es ist, wenn man die Grössen ξ und η im Bogenmass misst, d. h. $r = 1$ setzt

$$d\xi = -d\varphi; \quad d\eta = \cos \varphi \, d\psi \,, \tag{7}$$

und man bekommt statt (6)

einen bestimmten Betrag Ω verändern. Die oben vorkommende Grösse Ω kann als das Trägheitsmoment der Sialdecke bezüglich der in Betracht gezogenen Achse bezeichnet werden. Jedem Punkt der Erdoberfläche kann also ein bestimmter Wert der Grösse Ω zugeordnet werden, als das Trägheitsmoment der Sialdecke bezüglich der durch diesen Punkt und den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse. So erscheint die Erdoberfläche als das Feld eines Skalars Ω; der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der Polbewegung ist dem Gradient dieses Skalars direkt proportional. Die im Proportionalitätsfaktor vorkommende Grösse $\varkappa$ stellt den Anpassungskoeffizient des Erdkörpers dar. Derselbe kann als konstant betrachtet und aus den astronomischen Beobachtungen der Breiteschwankungen ermittelt werden. Die Grössen C und A unterscheiden sich um ausserordentlich geringe, rechnerisch ermittelbare Beträge von den bekannten Trägheitshauptmomenten des Erdkörpers, während die Grösse Ω aus der Form und Mächtigkeit der Kontinentalschollen berechenbar ist. Auf diese Weise stehen alle erforderlichen Daten zur Berechnung der Polverlagerungen zur Verfügung.

Die Gleichung (1) stellt die Differentialgleichung der Polbewegung dar; hier soll ihre, bisher nicht vorgenommene Integration durchgeführt werden.

Der Berechnung der Grösse Ω muss das gegenwärtige Gradnetz der Erde zu Grunde gelegt werden, weil sich alle Angaben über die Form der Kontinentalschollen auf dasselbe beziehen. Verlegt man also in den Mittelpunkt der Erde den Ursprung O eines orthogonalen Koordinatensystems, dessen Z— Achse nach dem gegenwärtigen Nordpol und dessen X— Achse nach dem Schnittpunkt des Greenwicher Meridianes mit dem Aequator gerichtet ist, und bezeichnet mit φ die geozentrische Breite, mit ψ die geographische Länge eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche, so ist

$$(2) \qquad x = r \cos\varphi \cos\psi; \quad y = r \cos\varphi \sin\psi; \quad z = r \sin\varphi .$$

Die erstrebbare Genauigkeit, mit welcher die Polbewegung mathematisch beschrieben werden kann, gestattet oben r als eine Konstante zu betrachten und die geozentrische Breite mit der geographischen zu identifizieren. Seien $I_1, I_2, I_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ die Trägheits — bzw. die Deviationsmomente der Sialdecke hinsichtlich der Achsen X, Y, Z, so ist das Trägheitsmoment Ω

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varkappa}{2(C-A)} \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}, \tag{8}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varkappa}{2(C-A)} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}. \tag{9}$$

Es folgt daraus

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi}} \tag{10}$$

als die Differentialgleichung der Polbahnkurve.

Es ist wegen (5) und (10)

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{(I_2 - I_1)\sin 2\psi}{(I_3 - I_2 \sin^2\psi - I_1 \cos^2\psi)\sin 2\varphi}. \tag{11}$$

Unser Koordinatensystem möge derart orientiert werden, dass das Trägheitsmoment I_1 der Sialdecke bezüglich der X — Achse das Minimum, jenes bezüglich der Z — Achse das Maximum ist, dass also die Ungleichheit besteht

$$I_1 < I_2 < I_3. \tag{12}$$

Setzt man also

$$\frac{I_3 - I_1}{I_2 - I_1} = k, \tag{13}$$

so ist k positiv und überdies

$$k > 1. \tag{14}$$

Die Gleichung (11) kann leicht auf folgende Form gebracht werden

$$k \frac{d\psi}{\sin 2\psi} - \frac{1}{2} \operatorname{tang}\psi \, d\psi = \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi}. \tag{15}$$

Diese Gleichung lässt sich sofort integrieren und man bekommt

$$\cos\psi \operatorname{tang}^k\psi = C_1 \operatorname{tang}\varphi \tag{16}$$

als die Gleichung der Polbahnkurve.

Die Konstante C_1 ist durch die gegenwärtige Lage der Rotationspole der Erde gegeben. Sind die Koordinaten des Nordpoles im gedrehten Koordinatensystem gleich φ_0 und ψ_0, so ist

$$C_1 = \frac{\cos\psi_0 \operatorname{tang}^k \psi_0}{\operatorname{tang}\varphi_0}. \tag{17}$$

Hat man die Gleichung (16) der Polbahnkurve im gedrehten Koordinatensystem ermittelt, so lässt sich dieselbe ohne weiters auf das ursprüngliche Koordinatensystem, d. h. auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde transformieren.

Es folgt aus (9) und (5)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varkappa\,(I_2 - I_1)}{2\,(C - A)} \sin 2\psi\,, \tag{18}$$

d. h. durch Integration

$$\operatorname{tang}\psi = C_2\, e^{\frac{\varkappa\,(I_2 - I_1)}{C - A}\, t} \tag{19}$$

Wird Zeit von der Gegenwart aus gezählt, so ist

$$C_2 = \operatorname{tang}\psi_0 \tag{20}$$

zu setzen.

Durch die vorstehenden Gleichungen ist nicht nur die Polbahnkurve, sondern auch der zeitliche Verlauf der Polbewegung eindeutig gegeben. Dabei kommt es nur auf die nummerische Ausrechnung der Grössen I_1, I_2, I_3 Λ_1, Λ_2, Λ_3 an. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung werden im Band VIII des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik veröffentlicht werden.