Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables.

Par

WACLAW SIERPINSKI.

Une fonction continue d'une variable réelle est, comme on sait, déterminée, lorsqu'on connait ses valeurs sur un ensemble dense. Le but de cette Note est de prouver qu'une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$, continue (séparément) par rapport à x et par rapport à y, jouit d'une propriété analogue. On a notamment ce

Théorème. *Une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$, continue par rapport à chacune de ces variables séparément, est déterminée, lorsqu'on connait ses valeurs sur un ensemble de points (x, y) donné quelconque D, dense dans le plan.*

En d'autres termes: si D est un ensemble de points (x, y), dense dans le plan, et si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de ces variables (séparément), et si

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in D,$$

on a

$$f(x, y) = g(x, y),$$

quels que soient les nombres réels x et y.

Une différence de deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ continues par rapport à x et par rapport à y étant de même nature, il suffira évidemment de démontrer que si l'on a pour une fonction $f(x, y)$, continue par rapport à x et par rapport à y

$$(1) \qquad f(x, y) = 0 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in D,$$

on a constamment $f(x, y) = 0$.

Soit (x_0, y_0) un point du plan donné quelconque et soit ε un nombre positif donné.

La fonction $f(x, y)$ étant continue au point (x_0, y_0) par rapport à x, il existe un nombre positif δ_0, tel que

$$(2) \qquad |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_0| \leqslant \delta_0.$$

Soit maintenant n un indice donné et supposons que nous avons déjà défini les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_{n-1}, y_{n-1}) et les nombres $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

L'ensemble D étant dense dans le plan, il existe un point (x_n, y_n) de D, tel que

$$(3) \qquad |x_n - x_{n-1}| < \frac{\delta_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad |y_n - y_0| < \frac{1}{n}.$$

La fonction $f(x, y)$ étant continue au point (x_n, y_n) par rapport à x, il existe un nombre δ_n, tel que

$$(4) \qquad 0 < \delta_n < \frac{1}{2}\delta_{n-1}$$

et que

$$(5) \qquad |f(x, y_n) - f(x_n, y_n)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_n| \leqslant \delta_n.$$

Les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$ de l'ensemble D et les nombres $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ sont ainsi définis par l'induction et on a les formules (3), (4) et (5) pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

D'après (3) et (4) on a, pour $n > k \geqslant 0$

$$|x_n - x_k| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| <$$

$$< \frac{\delta_{n-1}}{2} + \frac{\delta_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{\delta_k}{2} \leqslant \frac{\delta_k}{2^{n-k}} + \frac{\delta_k}{2^{n-k-1}} + \ldots + \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leqslant \frac{\delta_0}{2^k},$$

donc

$$(6) \qquad |x_n - x_k| < \delta_k \leqslant \frac{\delta_0}{2^k} \quad \text{pour} \quad n > k \geqslant 0$$

d'où résulte qu'il existe la limite

(7) $$\lim_{n=\infty} x_n = \xi .$$

D'après (6) et (7) on a, pour $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

(8) $$|\xi - x_k| \leqslant \delta_k ,$$

donc, d'après (5)

$$|f(\xi, y_k) - f(x_k, y_k)| < \varepsilon ,$$

ce qui donne, d'après (1) et $(x_k, y_k) \in D$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$:

$$|f(\xi, y_k)| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \ldots ,$$

et, d'après (3), la fonction $f(x, y)$ étant continue au point (ξ, y_0) par rapport à y:

(9) $$|f(\xi, y_0)| \leqslant \varepsilon .$$

Or, d'après (8) (pour $k=0$), on a $|\xi - x_0| \leqslant \delta_0$, donc, d'après (2):

$$|f(\xi, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon ,$$

ce qui donne, d'après (9):

$$|f(x_0, y_0)| < 2\varepsilon .$$

Le nombre positif ε pouvant être quelconque, cela prouve que

$$f(x_0, y_0) = 0 ,$$

c. q. f. d. Notre théorème est ainsi démontré.

Un théorème analogue a lieu pour les fonctions de n variables réelles, continues par rapport à chacune de variables séparément. La démonstration est tout à fait analogue.

Dans le cas particulier, où D est l'ensemble de tous les points (x, y) aux coordonnées rationnelles, la démonstration de notre théorème est immédiate et résulte de la formule

$$f(x, y) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} f\left(\frac{Emx}{m}, \frac{Eny}{n}\right)$$

qui a évidemment lieu (pour x et y réels) pour toute fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles, continue par rapport à chacune de variables séparément (où Et désigne l'entier le plus grand, ne dépassant pas t).

Il est à remarquer que pour des telles fonctions on a aussi la formule

$$f(x, y) = \lim_{n=\infty} f_n(x, y),$$

où

$$f_n(x, y) = (1 - nx + Enx)\, f\left(\frac{Enx}{n}, y\right) + (nx - Enx)\, f\left(\frac{Enx+1}{n}, y\right).$$

Les fonctions $f_n(x, y)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont, comme on voit sans peine, continues (par rapport à l'ensemble de variables x, y), d'où résulte tout de suite le théorème connu de *M. H. Lebesgue*, d'après lequel toute fonction de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de ces variables (séparément) est limite de fonctions continues [1]).

Quant à notre théorème, il est à remarquer qu'on peut le déduire facilement d'une proposition de *M. R. Baire* [2]) de laquelle résulte que si la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à chacune de variables x, y séparément, il existe sur tout segment parallèle à l'axe OX ou à l'axe OY un point, où la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à l'ensemble de variables (x, y).

---

[1]) Cf. mon livre *„Funkcje przedstawialne analitycznie"*, Warszawa 1925 (en polonais), p. 66—67.

[2]) *R. Baire:* Sur les fonctions de variables réelles *(Thèse)* Milan 1899.