Sur une classe de fonctions analytiques.

Par

MILOCH RADOÏTCHITCH.

Introduction.

Soit $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite de fonctions analytiques; si la fonction analytique $F(z)$ conserve sa valeur lorsqu'on substitue à z l'une quelconque des fonctions $f_n(z)$, c. à d. si

$$F\{f_n(z)\} \equiv F(z) \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

la fonction $F(z)$ est dite ***automorphe*** [1]).

Les fonctions automorphes les plus générales qui ont été particulièrement étudiées sont celles, pour lesquelles les fonctions $f_n(z)$ sont des fractions linéaires de z. Ce sont les fonctions automorphes au sens plus étroit du mot ou, plus exactement, les fonctions ***linéairement automorphes***.

Ici, nous allons considérer une catégorie générale de fonctions automorphes dont la définition est basée sur un critère d'autre espèce. Nous ne bornerons pas les fonctions f_n à une classe plus ou moins particulière; nous les laisserons quelconques, car nos considérations étant de nature géométrique ne précisent pas les expressions analytiques.

La fonction inverse, $z = \Phi(\varsigma)$ d'une fonction automorphe, $F(z) = \varsigma$, est une fonction multiforme dont les déterminations sont liées entre elles par les fonctions f_n. Si l'on divise la surface

---

1) Je me tiendrai à la nomenclature de F. Klein, que je préfère à celle de H. Poincaré, car elle me semble plus convenable aux considérations qui ont un caractère général.

de Riemann de $\Phi(\varsigma)$ en feuillets recouvrant tout le plan, leur entrelacement caractérisera à un certain point la nature des fonctions f_n. A cette division en feuillets correspondra une division du domaine d'existence de $F(z)$ en domaines partiels qui joueront en partie un rôle semblable à celui des *polygones générateurs* ou *domaines fondamentaux* dans les fonctions linéairement automorphes (selon qu'on se tient à la nomenclature de Poincaré ou de Klein). En s'y rattachant, nous aussi, nous appellerons nos domaines, *fondamentaux*. La division du domaine d'existence de $F(z)$ en de tels domaines nous fournira une image de l'automorphie de $F(z)$, que nous allons examiner. Je dis, *automorphie*; en effet, si on laisse les fonctions f_n quelconques, il s'agit moins d'une espèce particulière de fonctions telles que $F(z)$, que d'une propriété générale des fonctions analytiques.

Dans la première partie nous allons définir la catégorie de fonctions qui seront l'objet de ces considérations. Nous les appellerons fonctions *absolument automorphes; automorphes* — parce que leur domaine d'existence peut être divisé en domaines fondamentaux qui expriment l'existence des fonctions f_n ; *absolument* — parce que ces domaines fondamentaux sont une espèce d'éléments irréductibles, absolus ($F(z)$ est univalente dans chacun d'eux et y prend toute valeur). Puis, nous envisagerons quelques faits fondamentaux concernant les fonctions absolument automorphes.

La seconde partie se rapporte aux fonctions absolument automorphes uniformes. Nous les considérerons d'abord du point de vue général. Puis, nous passerons à quelques cas particuliers: aux fonctions qui sont en même temps linéairement automorphes; aux fonctions entières et méromorphes, car celles-ci sont, toutes, absolument automorphes; enfin, aux fonctions uniformes ayant un ensemble dénombrable, quelconque, de points singuliers transcendants.

Tout celà ne représente que quelques pas, dans une direction de recherches qui pourra, comme je le crois, contribuer à la solution de certaines questions générales et fondamentales de la théorie des fonctions analytiques.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

1. Les domaines fondamentaux.

L'une des notions principales de la théorie des fonctions linéairement automorphes est le *domaine fondamental*, — le *polygone générateur* de H. Poincaré. La fonction y prend toutes les valeurs dont elle est susceptible et celà, le même nombre de fois. En outre, le domaine d'existence d'une telle fonction peut être divisé entièrement en domaines fondamentaux et, par conséquent, si l'on connaît la disposition de ces domaines dans le plan et les propriétés de la fonction dans l'un d'entre eux, on connaîtra celle-ci partout. Dans le cas des fonctions périodiques, le domaine fondamental devient un parallélogramme ou une bande de périodicité.

Cependant le domaine fondamental dont nous nous occuperons ici a un sens un peu différent: nous appellerons ainsi un domaine où la fonction ne prend ses valeurs qu'une seule fois. On obtient ainsi une notion qui peut servir de base aux considérations générales qui vont suivre. Je l'ai introduite pour la première fois dans ma note „Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes“ [2]). Ici, en m'aidant de mon travail paru plus tard „Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets“ [3]) je compléterai, entre autres, les résultats communiqués dans cette première note.

La définition que je propose est la suivante:

Définition 1 — *Un domaine ouvert de la surface de Riemann d'une fonction analytique sera un domaine fondamental, s'il a les propriétés suivantes:*

1⁰ *la fonction y prend chaque valeur une fois seulement;*

2⁰ *elle prend toutes les valeurs, soit à l'intérieur, soit sur*

---

[2]) C. R. Acad. Sc., t. 190, p. 356.

[3]) „Glas“ de l'Acad. Roy. Serbe, t. 146, p. 37., 1931.

la frontière, c. à d. en général comme une valeur limite;

3° *chaque partie de cette frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.*

Par conséquent, un domaine fondamental ne peut pas augmenter sans perdre la propriété 1°, ni diminuer sans perdre la propriété 2°; quant à la propriété 3°, elle est ajoutée pour supprimer les parties de la frontière qui seraient superflues; ce seraient, pour ainsi dire, des lignes entaillées dans l'intérieur du domaine et par lesquelles celui-ci ne limiterait aucun domaine extérieur.

Il existe évidemment une relation étroite entre un domaine fondamental et un feuillet de la surface de Riemann qui appartient à la fonction inverse. D'après la définition du feuillet dont je me sers ici, les domaines fondamentaux et les feuillets correspondent exactement entre eux. Par conséquent, on peut l'énoncer de la façon suivante [4]):

Définition II — *Un domaine ouvert d'une surface de Riemann sera un feuillet, s'il a les propriétés suivantes:*

1° *il ne recouvre le plan dans aucune partie plus d'une fois*

2° *il recouvre le plan de telle sorte, qu'il ne reste aucun domaine complémentaire;*

3° *chaque partie de sa frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.*

De même que les domaines fondamentaux, les feuillets ne peuvent être non plus ni augmentés ni diminués sans cesser d'être des feuillets.

Je crois utile de faire une remarque générale sur les surfaces de Riemann. Elles figurent dans ce travail seulement comme identiques aux domaines d'existence des fonctions analytiques (c. à d. aux domaines où ces fonctions sont uniformes et, sauf pour les singularités algébriques, régulières). Donc la surface de Riemann est un domaine ouvert et sa frontière est formée par les singularités transcendantes, isolées ou non, de la fonction qui lui est rattachée.

Il est évident que toute surface de Riemann n'a pas de feuillets. Par ex., on peut concevoir des fonctions multiformes qui ne peuvent pas être prolongées à l'extérieur d'un cercle. Alors

---

[4]) Voir la note citée [3]).

aucun feuillet ne peut satisfaire à la définition II. La surface d'une fonction algébrique a au contraire toujours des feuillets. Une telle fonction possède également des domaines fondamentaux. Mais, si la surface de la fonction inverse d'une fonction analytique est restreinte à un domaine du plan, qui est par ex. borné, alors au contraire cette fonction n'a aucun domaine fondamental. — Ceci nous montre que les notions du feuillet et du domaine fondamental s'appliquent seulement à certaines espèces de fonctions qui, bien que très générales, ne comprennent pas toutes les fonctions analytiques. Il est vrai qu'on pourrait élargir d'avantage ces notions, mais celà dépasserait nos buts actuels.

2. La division en domaines fondamentaux.

L'intérêt qui existe à considérer les domaines fondamentaux, n'est pas contenu dans un seul de ces domaines mais dans le fait qu'une partie plus ou moins grande de tout le domaine d'existence de la fonction envisagée peut être partagée en de tels domaines. Je passe donc à une définition exacte de cette division [5]). Elle ce rapporte au domaine d'existence tout entier et s'applique aux feuillets aussi bien qu'aux domaines fondamentaux.

Définition III. — *Diviser la surface de Riemann d'une fonction analytique en feuillets — ou en domaines fondamentaux — signifie: concevoir une suite de feuillets — ou de domaines fondamentaux — de cette fonction, qui n'ont pas de points communs et qui ne laissent subsister sur cette surface aucun domaine extérieur à cette suite.*

Une telle suite sera appelée un système de feuillets, respectivement, de domaines fondamentaux.

Toutes les surfaces de Riemann ne peuvent pas être partagées, soit en feuillets, soit en domaines fondamentaux. Celà est évident d'après les remarques du paragraphe précédent. Il existe par ex. des fonctions qui, bien que possédant quelques domaines fondamentaux, ne permettent pas la formation d'un système complet de ces domaines. Or, si une surface est divisible en feuillets ou en domaines fondamentaux, généralement, cette division peut

[5]) Voir [2]).

être changée d'une infinité de manières. En effet, les frontières des feuillets sont tout simplement des lignes de ramification qui sont toutes variables, excepté aux points de ramification. Par ex. en variant la forme d'un seul feuillet, tout le reste pourra changer convenablement, de façon à maintenir le système intact. Cependant, on pourrait imaginer des surfaces de Riemann divisibles en feuillets ou en domaines fondamentaux, mais d'une manière qui ne serait pas variable comme à l'ordinaire: si l'on voulait changer la forme d'un feuillet, ou se heurterait à certaines lignes infranchissables qui conserveraient la forme, entière ou en partie, fixe; la même chose pourrait se passer avec les domaines fondamentaux.

Or, dans ce travail nous allons nous occuper seulement d'une catégorie de fonctions qui sont toutes divisibles en domaines fondamentaux et leurs inverses en feuillets, et pour lesquelles une variabilité du système de ces domaines existe, pareille à celle qu'on connaît dans les fonctions algébriques. Ces fonctions, nous les nommerons absolument automorphes, pour des raisons qui vont être connues.

3. Les surfaces de Riemann illimitées.

Pour établir une classe générale de surfaces de Riemann qui peuvent être partagées en feuillets, j'ai introduit dans l'un de mes travaux antérieurs [6]) la classification des surfaces de Riemann en *surfaces limitées* et *illimitées*. Leur définition est basée sur la notion auxiliaire du *cercle de limitation* [7]):

Définition IV — *Soit $\Phi(\varsigma)$ une fonction analytique; un cercle Θ du plan de ς est un cercle de limitation pour $\Phi(\varsigma)$ si, en prolongeant analytiquement un certain élément de $\Phi(\varsigma)$ situé dans Θ et de toutes les manières possibles sans sortir de Θ, il existe un domaine dans Θ où l'on ne peut pas pénétrer.*

La définition que je voudrais énoncer maintenant se rapporte en même temps aux fonctions et à leurs surfaces; je l'exprimerai ainsi:

---

[6]) Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets, „Glas" de l'Acad, Roy. Serbe, t. 134, p. 63, 1929,

[7]) Voir [2]).

Définition V — *Une fonction analytique $\Phi(\varsigma)$ (ou sa surface de Riemann) sera dite limitée ou illimitée, selon qu'elle possède ou non des cercles de limitation.*

Par conséquent, les surfaces de Riemann illimitées se distinguent par le fait qu'il n'y a aucune ligne singulière située sur cette surface, qui présenterait des limitations au prolongement analytique. Il faut remarquer qu'il peut y avoir dans ce cas néanmoins des lignes singulières non seulement en projection sur le plan, mais effectivement, sur la surface même. La nature des surfaces illimitées peut être exprimée aussi de la façon suivante: „Soit dans le plan une courbe continue quelconque; si nous pouvons prolonger analytiquement la fonction le long de toute cette courbe, en ne nous écartant d'elle que d'une distance inférieure à un nombre arbitrairement petit, la surface de Riemann est alors illimitée". Auparavant j'ai basé sur cette propriété la définition même des surfaces illimitées [8]). On reconnaît facilement sa validité par de la définition V.

Toutes ces notions étant fixées, j'énonce le théorème suivant, fondamental pour l'objet du travail actuel:

Théorème 1. — *Toute surface de Riemann illimitée peut être divisée en feuillets dont les frontières sont continues et celà est possible de manière qu'au voisinage de chaque point de la surface ne se trouve qu'un nombre fini de feuillets.*

Je rappelle que la frontière d'un domaine est dite continue, si tous ses points sont accessibles c. à d. si l'on peut atteindre chaque point de cette frontière par des chemins convergents et passant par l'intérieur de ce domaine. Si la frontière n'est pas continue, elle contient des „bouts" inaccessibles.

La démonstration du théorème 1 fut exposée dans deux de mes travaux antérieurs [9]). Elle est trop longue pour être reproduite ici. D'après ce théorème, toute surface de Riemann illimitée peut être partagée en feuillets de manière que dans le voisinage des points situés sur la frontière de la surface, et là seulement, peut atteindre une infinité de feuillets; auprès d'un point qui appartient à l'intérieur de la surface ne se trouve au contraire qu'un nombre fini de feuillets.

---

[8]) Voir [3]) et [6]).

[9]) Voir [3]) et [6]).

Enfin, on peut s'assurer dans la démonstration du théorème 1 que le système de feuillets d'une fonction illimitée est infiniment variable. Il y règne une liberté semblable à celle qui existe dans les fonctions algébriques. On peut même dire que les fonctions illimitées sont les seules qui possèdent une telle liberté car, dès qu'il y a un cercle de limitation, même si celui-ci n'empêche pas tout à fait la formation d'un système, il donne au moins aux feuillets une forme en partie invariable.

4. Les fonctions absolument automorphes.

A la division de la surface de Riemann d'une fonction analytique en feuillets correspond la division de la surface de Riemann de la fonction inverse en domaines fondamentaux et réciproquement. Par conséquent, au théorème 1 doit correspondre un théorème analogue, concernant la division en domaines fondamentaux de la surface d'une fonction qui a la propriété de pouvoir être conçue comme l'inverse d'une fonction illimitée. D'où le théorème suivant:

Théorème 2. — *La surface de Riemann d'une fonction analytique dont l'inverse est illimitée peut être divisée en domaines fondamentaux de manière que 1⁰ leurs frontières soient continues en chaque point de la surface et que 2⁰ un nombre fini de ces domaines fondamentaux, seulement, peut atteindre dans le voisinage d'un point quelconque de la surface.*

Il est évident que ce théorème découle du théorème 1. — Soit $\Phi(\varsigma)$ la fonction illimitée, citée dans le théorème 1 et soit $F(z)=\varsigma$ la fonction inverse. Envisageons un feuillet Δ du théorème 1 et un point α situé sur la frontière de Δ. A Δ correspond un domaine fondamental D situé sur la surface de $F(z)$, au point α, un point a situé sur la frontière de D. Si a appartient à la surface de $F(z)$ et non pas à sa frontière, c. à d. si $F(z)$ est régulière en ce point, ou au plus singulière algébriquement, $\Phi(\varsigma)$ est régulière en α, ou au plus singulière algébriquement. Donc, on peut décrire sur la surface un cercle K de centre α tel que $\Phi(\varsigma)$ y soit régulière, sauf peut-être en α. Par conséquent, à chaque ligne continue contenue dans K, correspond une ligne tracée sur la surface de $F(z)$, située auprès de a et qui est aussi continue. Or, la frontière de Δ étant continue, celle de $F(z)$ l'est donc aussi, auprès du point a. Ainsi la propriété 1° citée dans le théorème 2 se trouve démontrée: les seuls points où les frontières des domaines fondamentaux ne sont pas nécessairement continues, sont situés sur la frontière de la surface de Riemann: ce sont les points singuliers transcendants de $F(z)$.

On démontre de la même façon la propriété 2°. — Puisque, d'après le théorème 1, un nombre limité de feuillets doit atteindre près d'un certain point α de la surface de Φ, la même chose aura lieu avec les domaines fondamentaux près d'un point semblable de la surface de F et celà, grâce à la régularité mentionnée, dans un cercle K de centre α. Donc les points situés sur la frontière de la surface sont les seuls auprès desquels peuvent atteindre les points appartenant à une infinité de domaines fondamentaux différents; ce sont les points transcendants de $F(z)$. — Ainsi le théorème 2 est complètement démontré.

Les fonctions inverses des fonctions illimitées possèdent la propriété essentielle des fonctions automorphes. En effet, leurs domaines d'existence peuvent être divisés en domaines fondamentaux dans lesquels, si l'on inclue les frontières, toutes les valeurs de la fonction se reproduisent. De plus, dans chacun de ces domaines la fonction est univalente; enfin, selon les propriétés 1° et 2° du théorème 2, ces domaines peuvent affecter des formes et une conformation simples. Nous appelerons donc ces fonctions, ***absolument automorphes***. J'énonce ceci pour plus de clarté sous la forme d'une nouvelle définition:

Définition VI — *Une fonction analytique sera dite absolument automorphe si sa fonction inverse est illimitée.*

Usant de cette dénomination, qui sera justifiée encore, au cours de ces considérations, j'énonce une seconde fois le théorème 2, en faisant en même temps ressortir le rôle des singularités transcendantes:

Théorème 2'. — *La surface de Riemann de toute fonction absolument automorphe peut être divisée en domaines fondamentaux de manière que 1° leus frontières soient continues, sauf peut-être aux points singuliers transcendants et que 2° une infinité de domaines fondamentaux peut atteindre uniquement auprès des points singuliers transcendants.*

5. La correspondance des domaines fondamentaux entre eux.

Après avoir dit un mot sur les expressions analytiques de la division en domaines fondamentaux, nous rejoindrons la définition des fonctions automorphes générales, mentionnée dans l'Introduction et le caractère automorphe des fonctions absolument automorphes sera manifeste.

D'après ce qui a été dit dans l'Introduction, sur la divisibilité du domaine d'existence d'une fonction analytique $F(z)$ en domaines fondamentaux, correspond un groupe de transformations effectuées par les fonctions $f_n(z)$ et qui font que $F(z)$ est automorphe. Cette correspondance est la plus évidente quand les fonctions $f_n(z)$ sont linéaires, car ces fonctions transmettent alors une suite de représentations conformes du système des domaines fondamentaux sur lui-même. Or, il est intéressant d'étudier comment se comportent les domaines fondamentaux dans des représentations analogues, quand il est question de fonctions absolument automorphes.

Soit $F(z)$ une fonction absolument automorphe et soit $z = \Phi(\varsigma)$ sa fonction inverse. Nous supposons que la surface de $F(z)$ est divisée en domaines fondamentaux, D_0, D_1, $D_2, \ldots$ et la surface de $\Phi(\varsigma)$ en feuillets, Δ_0, Δ_1, $\Delta_2 \ldots$, ceux-ci étant construits d'après les règles de la démonstration du théorème 1. Désignons par Δ'_v la projection de Δ_v $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sur le plan. Puisqu'au cours de la construction du feuillet Δ_v on ne franchit jamais, dans le plan, les frontières des domaines $\Delta'_0, \Delta'_1, \ldots \Delta'_{v-1}$ (la démonstration du théorème 1 nous le montre), il est impossible que ces frontières, avec la frontière de Δ'_v divisent le plan en plusieurs domaines distincts. Donc, si l'on envisage deux domaines quelconques, Δ'_m et Δ'_n, on sait d'autant mieux que leurs frontières ne partagent pas le plan en domaines séparés Par conséquent, les frontières de ces deux domaines font ensemble la frontière d'un certain domaine ouvert que nous désignerons par $\Pi'_{m,n}$. Ce domaine recouvre tout le plan, comme Δ'_m et Δ'_n, et il est en même temps contenu dans chacun de ces deux domaines. Si l'on projette $\Pi'_{m,n}$ de nouveau sur les feuillets Δ_m et Δ_n, on reçoit un domaine $\Pi_{m,n}$ qui appartient au feuillet Δ_m et un nouveau, $\Pi_{n,m}$ qui appartient au feuillet Δ_n. Pour plus de clarté je dirai qu'on obtient $\Pi_{m,n}$ de Δ_m, en dessinant dans Δ_m certaines lignes continues qui ne morcellent pas Δ_m et, peut-être aussi, quelques ensembles discontinus de points, destinés tous à former la frontière de $\Pi_{m,n}$.

La fonction Φ transmet une représentation conforme et biunivoque de $\Pi_{m,n}$ sur un domaine ouvert, soit $P_{m,n}$, contenu dans D_m; et de la même manière, de $\Pi_{n,m}$ sur $P_{n,m}$, contenu dans D_n. (Fig. 1 — Les frontières ajoutées dans D_m pour offrir l'image de $P_{m,n}$ sont indiquées en pointillé. La figure représente une région où $F(z)$ est uniforme).

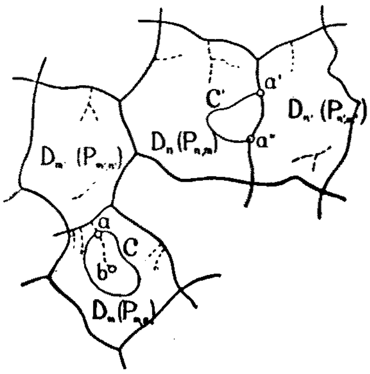

Fig. 1.

Puisqu'il ne correspond aux domaines $\Pi_{m,n}$ et $\Pi_{n,m}$ qu'un seul domaine $\Pi'_{m,n}$ dans le plan de ς, les deux représentations caractérisées peuvent être unies en une seule, c. à d. on peut représenter directement $P_{m,n}$ sur $P_{n,m}$ et inversement. Ceci sera accompli par la fonction $z'' = \Phi\{F(z')\}$, où z' et z'' désignent z dans $P_{m,n}$ et $P_{n,m}$ respectivement. Je désignerai cette fonction par $z'' = f_{m,n}(z')$. La fonction $f_{m,n}(z)$ est donc uniforme dans $P_{m,n}$ et elle fournit une représentation biunivoque et conforme de ce domaine sur $P_{n,m}$. De même, la fonction inverse $f_{n,m}(z)$ fournit la représentation inverse, de $P_{n,m}$ sur $P_{m,n}$.

La manière dont est définie la fonction $f_{m,n}$ nous montre qu'elle a la même valeur en z' et en z''. Donc, les fonctions $f_{m,n}$ sont identiques aux fonctions $f_n(z)$. — *Ainsi, la relation entre nos considérations géométriques et la définition d'une fonction automorphe est établie.*

Les circohstances devinnent plus simples si les domaines $P_{m,n}$ et $P_{n,m}$ se réduisent aux domaines fondamentaux D_m et D_n. Ce cas se présente lorsque $f_{m,n}$ est uniforme dans D_m et de même, sa fonction inverse $f_{n,m}$ dans D_n. — La réciproque est également vraie. Si $f_{m,n}$ est uniforme dans D_m et $f_{n,m}$ dans D_n, alors $f_{m,n}$ transmet une représentation conforme, biunivoque de D_m sur D_n.

Si, au contraire, le domaine $P_{m,n}$ n'est pas égal à D_m, certaines parties de la frontière de $P_{m,n}$ sont contenues dans D_n. A ces parties correspondent alors des parties de la frontière de D_n. Soit a un point situé dans D_m, sur la frontière ge $P_{m,n}$. Si

a n'est pas un point extreme, c. à d. si a morcelle la frontière de $P_{m,n}$, désignons par l une partie contenue dans D_m. Soit C une courbe continue fermée, contenue dans $P_{m,n}$, sauf le point a par lequel elle passe et entoure l. D'après la condition 3e de la définition du domaine fondamental, à C correspond dans D_m une courbe C' qui est généralement ouverte (car au point a correspondent en général deux points distincts, a' et a'', situés sur la frontière de D_n). Si l'on avait $a' = a''$ il suffirait, pour éviter cette égalité, de choisir au lieu de a un point sur l, aussi près de a que l'on voudrait. — Donc la fonction $f_{m,n}$ est multiforme dans D_m; les parties de la frontière de $P_{m,n}$ situées dans D_m sont des lignes critiques. — Soit b un point extreme de l; on peut choisir dans sa proximité des points semblables à a et l'on peut décrire des courbes semblables à C, et qui entourent b d'aussi près que l'on voudra; b est par conséquent un point critique de $f_{m,n}$.

Dans l'intérieur du domaine $P_{m,n}$ la fonction $f_{m,n}$ est uniforme et régulière excepté, peut-être, en un seul pôle qui est alors du premier ordre. Or, quel est l'ensemble de tous les points singuliers, situés sur la frontière de $P_{m,n}$? — Dans le cas général cette frontière n'est pas continue; soit donc K l'ensemble des points où cette frontière est continue. (Plus exactement, K est l'ensemble des bouts entièrement accessibles, car on a fait abstraction des points dits inaccessibles).

D'autre part, puisque la surface de Φ est illimitée, l'ensemble de tous les points singuliers situés sur la frontière du feuillet Δ_v (celui-ci a sa frontière continue par hypothèse) est évidemment *partout discontinu.*

Or, l'ensemble E_1 des points singuliers de $F(z)$ situés sur K est partout discontinu. En effet, il est composé de points qui correspondent aux points singuliers de $\Phi(\varsigma)$, situés sur la frontière de Δ_m et de quelques points singuliers algébriques de $F(z)$, qui se trouvent sur K. Ces deux ensembles de points étant partout discontinus, E_1 l'est aussi.

Enfin, puisque l'ensemble des points singuliers de $\Phi(\varsigma)$ situés sur la frontière de Δ_n est partout discontinu, l'ensemble correspondant sur la frontière de $\Pi_{m,n}$ l'est aussi, et de là on tire la même conclusion pour l'ensemble correspondant, situé sur la partie K de la frontière de $P_{m,n}$. Désignons cet ensemble par E_2.

Puisque la fonction $f_{m,n}$ est composée de F et de Φ, les ensembles E_1 et E_2 contiennent tous les points singuliers de $f_{m,n}$ situés sur K. Autrement dit, en faisant exception des points inaccessibles de la frontière du domaine $P_{m,n}$, l'ensemble des points singuliers de $f_{m,n}$ situés sur cette frontière est partout discontinu sur la surface de Riemann de $F(z)$.

Il résulte donc, entre autres, que chaque fonction $f_{m,n}$ peut être prolongée analytiquement au dehors de $P_{m,n}$, à partir de chaque endroit de sa frontière. En effet, l'ensemble E_1+E_2 étant partout discontinu, il se trouve dans le voisinage de chaque point de la dite frontière un point, où $f_{m,n}$ est régulière et d'où le prolongement peut commencer. Considérons ces prolongements. — Prolongeons la fonction $f_{m\,n}$ en sortant de $P_{m,n}$ sur un seul endroit de sa frontière et restons dans le premier des domaines où nous venons de pénétrer; soit $P_{n',m'}$ ce domaine. A ce prolongement correspond dans l'image conforme la sortie du domaine $P_{n,m}$ et l'entrée dans un autre domaine, $P_{n',m'}$. — Les qualités de $f_{m,n}$ par rapport à F restant partout les mêmes, on voit que $f_{m,n}$ est dans $P_{m',n'}$ identique à $f_{m',n'}$ et que par conséquent, elle fournit une représentation biunivoque, couforme de $P_{m',n'}$ sur $P_{n',m'}$.

Généralement $m' \neq m$ et $n' \neq n$; alors $P_{m',n'}$ se trouve à l'extérieur de D_m et appartient au domaine fondamental limitrophe, $D_{m'}$. De même, $P_{n',m'}$ se trouve alors à l'extérieur de D_n et appartient au domaine $D_{n'}$ limitrophe à D_n. Si au contraire $m' = m$ (le cas où simultanément $n' = n$ est exclu), le prolongement ne sort pas de D_m, mais dans l'image conforme, on sort de D_n. Enfin, si $n' = n$ et $m' \neq m$, on sort de D_m mais l'on reste dans D_n.

Ce prolongement analytique peut être continué dans tous les domaines D_v, indéfiniment, c. à d. *les fonctions* $f_{m,n}(z)$ (qui sont identiques aux fonctions $f_n(z)$) *existent dans tout le domaine d'existence de la fonction* $F(z)$. *Elles transforment le système des* $P_{m,n}$ *en lui même ou, plus précisement, un aspect de ce système* (celui où $P_{m,n}$ se trouve dans D_m, $P_{n,r}$ dans D_n et c.) *en un autre aspect du même système* (celui où $P_{n,m}$ est dans D_n, — et non pas $P_{n,r}$ — et c.). Cependant, la surface de Riemann de $f_{m,n}(z)$ est dans le cas général ramifiée sur la surface de $F(z)$.

DEUXIÈME PARTIE.

DIFFÉRENTES ESPÈCES DE FONCTIONS ABSOLUMENT AUTOMORPHES.

6. Les fonctions absolument automorphes uniformes.

La catégorie des fonctions absolument automorphes, étant très générale, embrasse une grande variété de fonctions analytiques, auxquelles on peut appliquer le théorème 2 (ou 2′) et en tirer les conséquences qui se présentent dans chaque cas. Voyons d'abord quelques propriétés générales des fonctions absolument automorphes uniformes, puis nous passerons à certaines classes connues de fonctions pour lesquelles on peut démontrer, sans trop de difficulté, qu'elles sont absolument automorphes. Il s'agira toujours des fonctions absolument automorphes uniformes.

Rappelons en passant que le domaine d'existence d'une fonction uniforme générale est un domaine ouvert du plan et que sa forme peut être quelconque. Sa frontière est formée par les singularités transcendantes et, par conséquent, à l'intérieur, la fonction ne peut avoir que des pôles. La fonction inverse d'une fonction uniforme se distingue par le fait qu'elle prend chaque valeur une seule fois: elle est univalente sur sa surface de Riemann.

La condition de l'uniformité simplifie les circonstances. Le système de domaines fondamentaux obtient alors une forme qu'on peut imaginer facilement; c'est comme un filet curviligne, irrégulier, étendu dans le plan et qui recouvre tout le domaine d'existence de la fonction considérée. Cependant, je dois remarquer que les résultats qui vont être signalés ne sont pas tous liés à l'uniformité. Pour la plupart ils pourraient être étendus assez facilement aux fonctions multiformes.

D'abord, je démontre le théorème suivant, valable pour toute fonction absolument automorphe uniforme:

Théorème 3. — *Quelque soit le système de domaines fondamentaux d'une fonction absolument automorphe uniforme, une infinité de ces domaines arrivent au voisinage de chaque point singulier transcendent de cette fonction.*

Démontrons ce théorème d'abord pour un ensemble partout discontinu de points singuliers, puis pour un ensemble qui contient des parties continues, c. à d. des lignes singulières.

Soit E un ensemble partout discontinu de points transcendants de la fonction considérée $F(z)$; on peut supposer que E se trouve dans la partie finie du plan. Enfermons E dans un contour rectifiable C_1 qui passe par les points réguliers de $F(z)$ et n'enferme aucune autre singularité transcendante. Il est impossible que l'intérieur de C_1 soit réparti parmi un nombre limité de domaines fondamentaux. — En effet, si ce nombre était limité, désignons le par n. Envisageons ces n domaines fondamentaux et les n feuillets correspondants de la fonction inverse, $\Phi(\varsigma)$.

Puisque n est limité on peut toujours obtenir de $F(z)$, par une transformation homographique, une fonction qui est bornée à l'intérieur de C_1. En effet, soit $\varsigma=\beta$ un point situé dans la partie finie du plan de ς et auquel correspond un point intérieur sur chacun des n feuillets envisagés (n étant fini, un tel point β existe toujours). Considérons au lieu de $F(z)$ la fonction $1/\{F(z)-\beta\}=F_0(z)$. C'est naturellement, aussi une fonction absolument automorphe. Soit $\Phi_0(\varsigma)$ sa fonction inverse. La fonction $F_0(z)$ a dans C_1 les mêmes singularités transcendantes que $F(z)$. Ensuite, $F_0(z)$ est bornée dans C_1 excepté au voisinage d'un certain nombre de pôles, au plus égal à n. Donc on peut déformer C_1 d'une manière continue en diminuant le domaine renfermé, de façon qu'on ne traverse ni ne touche aucun point singulier transcendant, mais pourtant que tous les pôles mentionnés deviennent extérieurs à C_1. Cette déformation ne supprime pas la condition que E soit l'ensemble des points singuliers enfermés dans C_1. Or, $F_0(z)$ est maintenant bornée dans C_1 et nous pouvons continuer la démonstration.

Déformons C_1 en tous ses points, en agrandissant le domaine qu'il renferme, mais de manière à ne traverser ni ne toucher aucun point singulier de $F_0(z)$. Soit C_2 le nouveau contour. C_1 et C_2 renferment un domaine doublement connexe et dans lequel $F_0(z)$ est holomorphe; donc, on a dans ce domaine, d'après la formule de Cauchy:

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1 + C_2} \frac{F_0(x)}{x-z}\, dx\,.$$

En désignant

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{F_0(x)}{x-z}\, dx = \psi_1(z) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{F_0(x)}{x-z}\, dx = \psi_2(z)\,,$$

on peut écrire: $F_0(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z)$. La fonction $\psi_1(z)$ est régulière à l'intérieur de C_1 et nulle à l'infini; $\psi_2(z)$ est au contraire régulière dans C_2. La fonction $\psi_1(z)$ a dans C_1 les mêmes singularités que $F_0(z)$, car elle n'y diffère que par une fonction holomorphe. $\psi_1(z)$ est donc bornée dans C_1 et, par conséquent, elle est bornée dans tout le plan.

Il s'ensuit que la surface de Riemann de la fonction inverse de $\psi_1(z)$ s'étend seulement sur une partie finie du plan de ς; c'est donc une surface limitée. Cette limitation provient de l'ensemble singulier de cette fonction inverse. Soit Σ cet ensemble. Σ correspond à E, puisque E est l'ensemble de tous les points singuliers de $\psi_1(z)$. Comme $F_0(z)$ ne diffère dans C_1 de $\psi_1(z)$ que par une fonction holomorphe, $\Phi_0(\varsigma)$ ne différera auprès des points de l'ensemble Σ de la fonction inverse de ψ_1 que par une fonction holomorphe. Donc, Σ appartient à l'ensemble singulier de Φ_0 et, par conséquent, il effectue la limitation de la surface de Φ_0. Autrement dit, $\Phi_0(\varsigma)$ doit être une fonction imitée. Or c'est faux, puisque $F_0(z)$ est une fonction absolument lautomorphe. Donc la supposition que n est limité était fausse. — Ainsi est accomplie la première partie de la démonstration.

Il reste à démontrer le théorème 3 pour les lignes singulières. Avant tout, les considérations peuvent être simplifiées en supposant que les lignes singulières de $F(z)$ ne forment aucun bout discontinu, c. à d. que la frontière du domaine d'existence de $F(z)$ soit continue. Ceci est permis. En effet, ce domaine peut être représenté conformément et biunivoquement sur un domaine dont la frontière est en totalité continue, ce domaine étant situé dans le plan d'une nouvelle variable t. Soit $z = G(t)$ la fonction qui effectue cette représentation. On considère $F\{G(t)\} = F_1(t)$ au lieu de $F(z)$ et on applique les résultats obtenus ainsi à $F(z)$: Si le théorème 3 est valable pour $F_1(t)$ il l'est aussi pour $F(z)$, — la représentation conforme auprès des bouts inaccessibles nous le montre immédiatement.

Il suffit de montrer que le contraire de ce qu'affirme le théorème 3 ne peut pas avoir lieu. Il est impossible qu'un nombre fini de domaines fondamentaux seulement arrivent au voisinage d'un point situé sur une ligne singulière. Car, autrement, on pourrait déterminer un arc L d'une ligne singulière et un nombre fini n de feuillets, qui seraient les seuls à avoir des points près de L. — Soit d'abord $n = 1$; donc, soit D_m le domaine fondamental unique qui limite à l'arc singulier L. La fonction $F(z)$ transmet une représentation conforme de D_m sur le feuillet Δ_m et, d'après l'allure d'une telle représentation sur la frontière, tout un arc Λ situé sur la frontière de Δ_m devrait correspondre à l'arc L. Λ serait une ligne singulière, ce qui est évidemment incompatible avec le fait que $\Phi(\varsigma)$ doit être illimitée.

On démontre facilement le cas général, $n > 1$, en s'aidant uniquement du cas précédent. (Je ferai ainsi pour éviter d'employer les propriétés de la représentation conforme des domaines qui ne sont pas uniformes, ces propriétés étant peu connues). Soient $D_{m_1}, D_{m_2}, \ldots, D_{m_n}$ les seuls domaines fondamentaux qui limitent à L (du côté considéré); soit D la somme de tous ces domaines réunis en un seul et soit Δ le domaine correspondant, composé des feuillets $\Delta_{m_1}, \Delta_{m_2}, \ldots, \Delta_{m_n}$. A l'arc L, qui est une partie continue de la frontière de D, devrait correspondre tout un arc Λ situé sur la frontière de Δ. Or, d'après ce qui a été démontré dans le cas précédent, à l'ensemble des points situés sur L, qui appartiennent à la frontière d'un seul domaine D_{m_ν} ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), ne peut correspondre aucun arc appartenant à Λ. Donc il ne lui correspond au plus qu'un ensemble de points non-dense sur Λ. La somme pour tous les ν de ces ensembles non-denses est nécessairement un ensemble de même espèce, situé sur Λ; cependant, ce devrait être l'arc Λ tout entier: il y a donc une contradiction qui prouve de nouveau le théorème 3. Ce théorème est pas conséquent complètement démontré.

On peut simplifier l'énoncé du théorème 3 et des théorèmes qui vont suivre, en introduisant la notion du *point limite de domaines fondamentaux.*

Définition VII. — *Un point $z = c$ sera dit un point limite de domaines fondamentaux, si l'on peut déterminer une suite de points qui convergent vers c et qui appartiennent à une suite infinie de domaines fondamentaux différents. — Plus exactement, c est un point limite de la dite suite de domaines fondamentaux.*

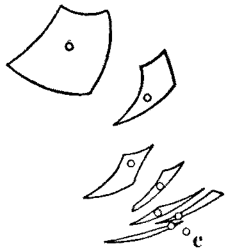

Fig. 2.

Il faut remarquer qu'une suite infinie de domaines fondamentaux, si elle a un point limite, n'est pas nécessairement une suite convergente; elle peut avoir plus d'un point limite, toute une ligne vers laquelle s'approche cette suite (fig. 2). Seulement si une suite de domaines fondamentaux possède un point limite unique, elle converge directement vers ce point.

On peut donc énoncer le théorème 3 de la façon suivante:

Théorème 3'. — *Tout point singulier transcendant d'une fonction absolument automorphe uniforme est un point limite de domaines fondamentaux.*

Je reviens au théorème 2. Si l'on compare la définition VII à la propriété 2° de l'énoncé 2', on voit que cette propriété peut être exprimée ainsi: *Les points singuliers transcendants sont les seuls qui peuvent être des points limites de domaines fondamentaux.* Ou bien: *Les points réguliers et les pôles d'une fonction absolument automorphe uniforme ne peuvent pas être des points limites de domaines fondamentaux.* Ou encore: *Chaque point limite de domaines fondamentaux est un point singulier transcendant.* En complétant le théorème 3' par cette circonstance nouvelle, on obtient la proposition suivante:

Théorème 4. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que ses points singuliers transcendants soient identiques aux points limites de domaines fondamentaux ou, en d'autres termes, que la frontière du domaine* *d'existence soit identique à l'ensemble des points limites de domaines fondamentaux.*

Un tel système de domaines fondamentaux est marqué dans le plan par un filet de lignes, qui se condense infiniment auprès de chaque point transcendant, isolé ou non. (Fig. 3 — R désigne le domaine d'existence, L une ligne singulière et p un point singulier transcendant).

Remarquons que la propriété 2° du théorème 2′ peut être énoncée aussi dans les termes suivants, qui l'élucident d'un autre côté: Il suffit d'enlever au système de domaines fondamentaux un nombre fini d'entre eux, pour que le reste soit contenu dans l'ensemble de cercles décrits des points singuliers transcendants comme centres, et de rayons inférieurs à un nombre aussi petit que l'on veut. Une exception a naturellement lieu au voisinage du point à l'infini: les mots précédents ne s'y appliquent qu'après l'avoir transféré au voisinage de l'origine, par ex., par la transformation $\frac{1}{z} = t$.

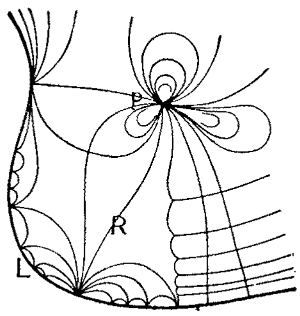

Fig. 3.

Quand on envisage certains ensembles particuliers de points singuliers transcendants, le théorème 4 donne naissance à des circonstances spéciales. — Soit d'abord $z = a$ un point transcendant isolé. Décrivons de a comme centre un cercle C n'ayant, ni à l'intérieur ni sur la circonférence, aucune autre singularité transcendante. D'après le théorème 4, a est le seul point limite des domaines fondamentaux, situés dans C ou sur sa circonférence. L'ensemble de tous les domaines fondamentaux, qui ont des points dans C, forme donc une suite qui converge vers a (fig. 4). On a par conséquent:

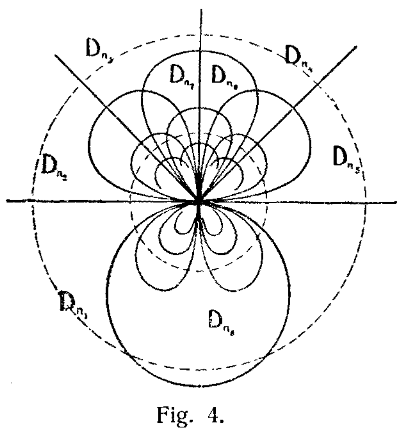

Fig. 4.

Théorème 5. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que tout point singulier transcendant isolé soit un point limite isolé de domaines fondamentaux, vers lequel converge l'ensemble de tous les domaines fondamentaux qui atteignent au voisinage de ce point* [10]).

D'ici on passe immédiatement aux points d'un ensemble réductible de points transcendants, pour se diriger vers le cas général des ensembles partout discontinus de points transcendants. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 6. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que toute suite infinie de ces domaines, qui a un point limite dans un ensemble partout discontinu de points singuliers trancendants, converge vers ce point limite.*

En d'autres termes, si c_1 est un point limite d'une suite de domaines fondamentaux et si c_1 appartient à un ensemble discontinu de points transcendants, il est impossible qu'une infinité de domaines de la même suite ait en outre un point limite c_2 différent de c_1. Car, s'il en était ainsi, il y aurait tout un continu de points limites reliant c_1 à c_2. — Ceci est un fait géométrique évident et de démonstration inutile. (D'abord il faudrait prouver l'existence d'une suite finie de points limites allant de c_1 à c_2, la distance de deux points consécutifs étant $< \varepsilon$. Puis, en faisant tendre ε vers zéro, on obtiendrait la proposition).

En ce qui concerne les lignes singulières, il faut dire que des considérations analogues aux précédentes ne s'appliquent pas sans de nouvelles difficultés. Aussi je laisse ici sans réponse la question: Une suite de domaines fondamentaux qui a un point limite sur une ligne singulière, converge-t'elle nécessairement vers ce point, on non? — Si les lignes ne sont pas continues, la réponse est certainement négative; si elle sont continues, on doit espérer une réponse affirmative.

Si une infinité de domaines fondamentaux converge vers un point, ce point est évidemment une singularité essentielle

---

10) J'insiste sur le fait que le *voisinage* d'un point est un domaine tel que C_1 c. à d., qui contient ce point et qui est *suffisamment petit.*

d'indétermination complète, appellée ainsi, parce qu'en allant vers ce point, la fonction peut s'approcher de toute valeur sans exception. Le théorème 6 montre que *chaque point appartenant à un ensemble partout discontinu de points singuliers transcendants est un point singulier essentiel d'indétermination complète.* Il s'ensuit, en particulier, le fait bien connu, que *tout point singulier transcendant isolé d'une fonction absolument automorphe uniforme est un point essentiel d'indétermination complète.*

La propriété 1° mentionnée dans le théorème 2' est restée inappliquée jusqu'à présent. Or, il résulte immédiatement de cette propriété qu'un domaine fondamental, tel que celui considéré dans ce théorème, a sa frontière continue partout, sauf au plus aux points d'une ligne singulière. En d'autres termes, tout point inaccessible d'une telle frontière appartient à une ligne singulière. Insistons sur ce fait en lui donnant la forme d'un théorème particulier:

Théorème 7. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux dont les frontières sont continues, sauf auprès des lignes singulières.*

Si la fonction n'a aucune ligne singulière, tous les domaines fondamentaux ont donc leurs frontières parfaitement continues. Par conséquent les domaines fondamentaux qui interviennent dans les théorèmes 5 et 6 ont aussi leurs frontières continues.

7. Les fonctions linéairement automorphes.

Soit $F(z)$ une fonction absolument automorphe uniforme. Son domaine d'existence est divisé en domaines fondamentaux de la manière exposée dans le théorème 2; nous les supposons rangés en une suite, $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_\nu, \ldots$

Or supposons maintenant que certaines d'entre les fonctions $f_n(z)$ soient des fractions linéaires, c. à d. que $F(z)$ soit une fonction *linéairement automorphe.* Puisque ces fonctions f_n sont uniformes dans tout le plan, elles effectuent, d'après ce qui a été dit au paragraphe 5, un ensemble de représentations conformes et biunivoques du système des domaines D_ν sur lui-même. Considérons ces représentations.

Envisageons parmi toutes les fonctions f_n, qui sont des fractions linéaires, (en y ajoutant aussi la fonction $f_0(z) \equiv z$) un groupe c. à d. un ensemble qui satisfait aux conditions suivantes: si $f_{n'}$ et $f_{n''}$ sont deux éléments de l'ensemble, $f_{n'}\{f_{n''}(z)\}$ l'est aussi; si $f_{n'}$ est un élément, sa fonction inverse l'est également (la troisième condition, l'associative, est remplie d'elle même). — On s'occupe en général non pas des fonctions f_n mais des transformations que ces fonctions effectuent; nous désignerons donc le groupe considéré de transformations, qu'on appelle alors, linéaires ou birationnelles, par Γ. Le groupe Γ peut contenir toutes les transformations linéaires qui existent pour $F(z)$, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

Les fonctions f_n de Γ transforment le domaine D_0 en une suite d'autres domaines fondamentaux, soit $D_{\nu_0}, D_{\nu_1}, \ldots, D_{\nu_m} \ldots$ $(D_{\nu_0} \equiv D_0)$. Si cette suite ne contient pas tous les domaines D_ν (par ex. si toutes les fonctions f_n ne sont pas des fractions linéaires), soit D'_{ν_m} l'un d'eux, non contenu, qui est limitrophe de D_{ν_m} (ceci peut toujours être supposé). Puisque la fonction qui transforme D_{ν_m} en D_0 est uniforme dans tout le plan, elle transfome aussi D'_{ν_m} en un domaine D'_{ν_0} qui est limitrophe de D_0 et qui n'appartient pas à la suite des domaines D_{ν_m}. Joignons D_0 et D'_{ν_0}, et appelons le nouveau domaine, R'_0; procédant de même avec D_{ν_m} et D'_{ν_m}, nommons leur somme, R'_m. Si l'ensemble de tous les domaines R'_m $(m = 0, 1, \ldots)$ ne contient pas encore tous les domaines D_ν, on doit répéter le même procédé. Soit alors D''_{ν_0} un domaine fondamental qui est limitrophe de R'_0 et qui n'appartient pas à l'ensemble des domaines D_{ν_m} et D'_{ν_m} et soit R''_0 la réunion de R'_0 et de D''_{ν_0}. Si l'ensemble de tous les domaines R''_m $(m = 0, 1, \ldots)$ ne contient pas, non plus, tous les D_ν, on répétera le procédé jusqu'à ce que tout le système des D_ν soit épuisé. Désignons par R_m la forme finale vers laquelle a convergé la suite $R'_m, R''_m, \ldots, R^{(\mu)}_m, \ldots$. Cette suite a été infinie ou finie; si elle a été finie, chaque domaine R_m contient un certain nombre fini de domaines fondamentaux, le même pour tout R_m; si la suite à été infinie, R_m contient une infinité de domaines fondamentaux.

Or, les domaines R_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les *domaines fondamentaux du groupe* Γ de transformations, chaque R_m est un polygone générateur de Poincaré. C'est une notion fondamentale de la théorie des fonctions linéairement automorphes; elle se rapporte directement à un groupe donné de transformations et non pas à une fonction $F(z)$. En cela consiste la différence principale entre la notion du domaine fondamental, employée dans la théorie des fonctions linéairement automorphes et la nôtre. La première appartient à un groupe de transformations et la seconde à une fonction. Le domaine fondamental „d'une fonction" est, d'un certain point de vue, un cas particulier du domaine fondamental „d'un groupe de transformations analytiques générales". On obtient la première quand on envisage, au lieu d'un groupe quelconque de fonctions f_n, l'ensemble de toutes ces fonctions qui appartiennent à une fonction donnée $F(z)$; alors en particulier, $F(z)$ est univalente dans chaque domaine fondamental [11]).

Les domaines R_m et leur disposition dans le plan sont connus, les divers cas possibles étant classés et étudiés. — La définition du point limite des domaines fondamentaux s'applique également aux domaines R_m; ce sont les *points limites du groupe* Γ, vers lesquels convergent les suites infinies de domaines R_m. Comme on le voit imméditement, *tout point limite de* Γ *est en même temps un point limite des domaines fondamentaux* D_ν; le contraire n'est pas exact, on peut dire que *les points limites de* Γ *appartiennent à l'ensemble des points singuliers transcendants de* $F(z)$. — Si l'on considère les domaines R_m séparément, on peut dire que R_0, par ex., est composé des domaines D_0, D'_{ν_0}, $D''_{\nu_0}, \ldots, D^{(\mu)}_{\nu_0}, \ldots$ et que les points limites de ces domaines constituent un ensemble de points, situés à l'intérieur et sur la frontière de R_0. Ceux qui sont à l'intérieur forment l'ensemble de tous les points singuliers transcendants situés à l'intérieur de R_0.

Tout celà se rapporte aux fonctions absolument automorphes qui sont en même temps linéairement automorphes. Mais, toutes les fonctions linéairement automorphes ne sont pas absolument automorphes. Pourtant nous savons que *toutes les fonctions linéairement automorphes qui le sont aussi absolument, forment une classe assez générale pour embrasser toutes les fonctions linéairement automorphes qu'on envisage dans la théorie de ces fonctions.*

---

[11]) Il faut remarquer qu'on ajoute généralement au domaine fondamental „d'un groupe" certaines parties de sa frontière, de sorte que F y soit non seulement univalente mais qu'elle y prenne toute valeur.

En effet, dans la théorie des fonctions linéairement automorphes on réduit en premier lieu les considérations aux fonctions qui sont dans chaque domaine R_m et sur sa frontière, — sauf, évidemement, aux points limites du groupe Γ, — *libres de singularités transcendantes*. En second lieu on ajoute la condition *que les transformations fondamentales, génératrices de Γ soient en nombre fini.* En vertu de cette restriction, R_m a un nombre limité de sommets et par conséquent, un nombre limité de points singuliers transcendants, situés sur la frontière de R_m. En dernier lieu on se borne à considérer seulement les fonctions *qui ne prennent dans R_m leurs valeurs qu'un nombre limité de fois*, c. à d. qui sont μ - valentes dans R_m, μ étant un nombre entier, positif, quelconque. Cette dernière condition renferme la première. Il y a donc en tout deux conditions différentes, qu'on suppose remplies au début de la théorie des fonctions linéaire ment automorphes. Or je veux démontrer que la fonction, que nous désignons de nouveau par $F(z)$, est alors toujours absolument automorphe.

Selon la définition VII il faut montrer que sa fonction inverse $\Phi(\varsigma)$ est illimitée. Soit P_m le domaine de la surface de Φ, correspondant à R_m. P_m a une forme telle, que si l'on joint les parties de sa frontière, correspondant aux mêmes projections dans le plan, on obtient une surface de Riemann algébrique. En particulier P_m recouvre le plan μ fois. Puisqu'il n'y a aucune singularité transcendante dans R_m, il n'y en aura pas non plus dans P_m. Mais sur la frontière de P_m il peut y avoir des points de ramification transcendants et celà en nombre limité (puisqu'ils correspondent aux sommets transcendants de R_m). Comme $\Phi(\varsigma)$ est une fonction linéairement polymorphe, que sa surface est composée de domaines P_m et que les valeurs prises par Φ dans les différents P_m au même point ς sont en dépendance birationnelle entre elles, à chaque point algébrique ou transcendant dans un P_m correspond un point de même espèce dans tout autre P_m. Par conséquent, l'ensemble des singularités transcendantes de Φ se projette dans le plan en un ensemble fini de points. Donc, il est évident que Φ ne peut pas avoir de cercles de limitation, — elle est illimitée [12]).

[12]) On pourrait démontrer la même chose pour des classes plus larges de fonctions linéairement automorphes, mais je dois me borner ici à aborder les problèmes dans leurs formes les plus simples.

Comme on le voit, le chemin que nous avons parcouru est opposé à celui qui a été pris dans la théorie des fonctions linéairement automorphes. Dans cette théorie on part des tranformations en formant et en étudiant les groupes discontinus qu'elles peuvent composer, puis, on arrive aux fonctions automorphes, c. à d. invariantes pour un groupe donné: on démontre l'existence des telles fonctions et l'on trouve des expressions analytiques qui les représentent. Dans ce travail, au contraire, nous sommes partis des fonctions analytiques générales et, en leur imposant certaines conditions, nécessaires pour conserver le sens de l'idée fondamentale, on déduit le système des domaines fondamentaux, qui représente le groupe correspondant de transformations. Ainsi, nous sommes arrivés à quelques faits généraux que nous avons énoncé pour la plupart comme des théorèmes. Tous ces théorèmes peuvent être appliqués maintenant aux fonctions qui sont à la fois linéairement et absolument automorphes.

8. Les fonctions entières et méromorphes.

La catégorie des fonctions absolument automorphes comprend toutes les fonctions entières et méromorphes, quelque soit leur généralité. En effet, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 8. — *Toute fonction entière ou méromorphe est une fonction absolument automorphe; le plan où une telle fonction est définie peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chaque domaine soit continue et que tous les domaines convergent vers le point à l'infini* [13].

Soit $F(z)$ une fonction entière ou méromorphe quelconque, et $\Phi(\varsigma)$ sa fonction inverse. Il faut montrer que $\Phi(\varsigma)$ est une fonction illimitée. Or, ce fait a été démontré par M. F. Iversen [14]) dans un théorème que nous pouvons exprimer au moyen du

[13]) Voir ma note [1]). — La dernière affirmation de ce théorème n'y figure pas encore.

[14]) *F. Iversen* „Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes". — *M. G. Valiron* (C. R. Acad. Sc., t. 166) en a simplifié la démonstration. J'en ai donné aussi une dans ma note „Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes", ignorant les travaux des M. M. Iversen et Valiron. Celle de M. Valiron est la plus simple.

„cercle de limitation“, et qui s'énonce ainsi sous une forme tout à fait brève: „La fonction inverse d'une fonction entière ou méromorphe n'a pas de cercles de limitation“. — Je ne reproduirai pas la démonstration du théorème de M. Iversen, puisqu' une généralisation du théorème 8 sera exposée au paragraphe 10 et que celle-ci nécessitera une démonstration complète.

Donc, $F(z)$ est une fonction absolument automorphe uniforme et par conséquent, le plan de z peut être divisé en domaines fondamentaux comme il a été dit dans le théorème 2'. Donc, puisque $z=\infty$ est la singularité transcendante unique, les théorèmes 5 et 7 s'appliquent immédiatement. De là découle le théorème 8.

Ajoutons encore quelques mots. Si l'on connaît, si peu soit-il, le système des domaines fondamentaux d'une fonction entière ou méromorphe, on connaît aussi la structure de cette fonction. — En général, certains domaines du système auront des sommets à l'infini, d'autres n'en auront pas et seront donc situés dans la partie finie du plan. Les premiers nous donnent une connaissance des chemins de détermination, c. à d. des chemins qui vont à l'infini et sur lesquels la fonction tend vers une valeur déterminée, dite asymptotique. — Par ex. si un chemin va à l'infini et s'il ne passe que par un nombre limité de domaines fondamentaux, il est sûrement un chemin de détermination. — Si tous les domaines fondamentaux sont bornés, $F(z)$ n'a aucune valeur asymptotique et partant aucune valeur exceptionnelle, elle est donc en tout cas méromorphe. Mais, si tous les domaines fondamentaux sauf un nombre limité d'entre eux, ont des sommets infinis, la fonction peut avoir des valeurs exceptionnelles. Telle sera aussi la nature du système des domaines fondamentaux dans les fonctions entières. — Comme on le voit par ces remarques, l'étude des fonctions méromorphes ou entières est polarisée à deux problèmes distincts: l'un est *topologique* et il se rapporte à la configuration du système des domaines fondamentaux; l'autre est *analytique* et il complète le premier en se rapportant à la distribution *conforme* des valeurs de la fonction considérée dans chacun des domaines fondamentaux.

---

9. Sur la disposition des domaines fondamentaux.

A propos des remarques précédentes signalons quelques considérations sur les fonctions absolument automorphes uniformes, générales. Ainsi le sujet sera rattaché directement au paragraphe 6, qui se rapportait à la disposition des domaines fondamentaux dans le plan. Ce sera aussi l'objet du paragraphe présent. Mais, comme on se heurte à chaque pas à des problèmes irrésolus, en partie nouveaux, ce qui sera mentionné ici ne contiendra que quelques remarques, concernant plutôt les méthodes qu'on pourra employer dans des recherches futures.

Avant tout, il faut dire quelques mots sur la forme d'un domaine fondamental. Cette forme est caractérisée par les *sommets.* On appelle ainsi, quand il s'agit des fonctions linéairement automorphes, les points par lesquels se rencontrent plus de deux domaines fondamentaux différents. Ici cette définition doit être généralisée en disant qu'un sommet est un point situé sur la frontière d'un domaine fondamental, tel que dans son voisinage il existe toujours des points appartenant à plus de deux de ces domaines différents. Par conséquent, chaque domaine fondamental peut être regardé comme un polygone curviligne que l'on peut nommer aussi, *polygone fondamental.* Les arcs de la frontière, découpés par les sommets sont les côtés du polygone; deux côtés consécutifs enferment un angle qui est généralement curviligne (fig. 5).

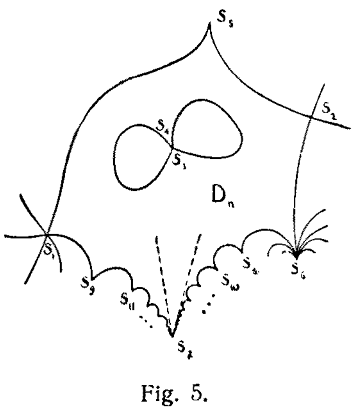

Fig. 5.

On peut distinguer les sommets *algébriques* des sommets *transcendants*, ces derniers étant ceux dans lesquels la fonction a des singularités transcendantes et les premiers, ou elle n'en présente pas. Si le système de domaines fondamentaux est tel que le théorème 4 soit applicable et, si le sommet est algébrique, son voisinage est réparti parmi un nombre limité de domaines fondamentaux et ce sommet est le point de rencontre d'un nombre limité da ces domaines (dans la figure, par ex.: s_1, s_2, s_3 et s_4); si, au contraire, le sommet est transcendant, son voisinage est réparti parmi un nombre illimité de domaines fondamentaux et deux cas peuvent se présenter: ou bien, dans le sommet se rencontre une infinité de domaines fondamentaux différents (par ex.: s_6) ou bien, le nombre de ces domaines est limité (par ex.: s_7, quand ce nombre est égal à 1).

Dans la fonction inverse de celle considérée, aux sommets algébriques correspondent les points de ramification algébriques d'ordre supérieur à un, et aux sommets transcendants, les points de ramification transcendants. — En supposant qu'en un certain sommet commun à plusieurs angles curvilignes, appartenant à plusieurs domaines fondamentaux différents, toutes les frontières aient des tangentes déterminées, on pourrait mesurer ces angles. Dans ce cas, si le sommet est algébrique et si un nombre m de domaines fondamentaux différents s'y rencontrent, ces domaines forment en ce point, d'ordinaire, m angles égaux entre eux (ex.: s_1 et s_2). Mais, généralement, un seul domaine peut avoir plusieurs angles au même sommet (ex.: s_3 et s_4); la somme de ces derniers est alors égale à $\frac{2\pi}{m}$, le nombre total des angles étant naturellement plus grand que m. Si un domaine fondamental a un seul angle en un certain sommet et si cet angle est nul (si les deux côtés de l'angle ont la même tangente), alors ce sommet est transcendant (ex.: s_5). — En un sommet transcendant les angles sont en général nuls. On se rendra compte aisément que celà se produit pour tous les angles formant une suite infinie et ininterrompue d'angles adjacents (ex: s_8); si au contraire cette suite contient un nombre limité d'angles, ceux-ci pourraient être aussi de grandeur finie (ex.: s_7).

Nous arrivons maintenant à la disposition des domaines fondamentaux dans le plan. Tous les problèmes se rapportent principalement au voisinage des singularités transcendantes (qui sont normalement des singularités essentielles). Les domaines fondamentaux s'y accumulent en nombre infini et l'important est de connaître de quelle manière. Or, nous nous bornons à considérer parmi ces singularités uniquement celles qui forment dans le plan des *continus isolés*. J'entends par là qu'une telle singularité est un continu de points singuliers dont aucun des points n'est un point limite d'autres points singuliers transcendants (c. à d. de ceux qui n'appartiendraient pas au même continu). Un tel continu est généralement une ligne cantorienne à peu près quelconque mais, nous y ferons entrer aussi le cas spécial où le continu est réduit à un point unique.

Les considérations gagneront en clarté si l'on simplifie tout d'abord la forme d'un tel continu par une transformation du plan, convenable. Pour ce but on considère le continu singulier comme la frontière totale d'un domaine du plan et l'on fait la représentation conforme de ce domaine sur l'xtérieur d'un certain cercle A. Si l'on désigne de nouveau la variable par z et la fonction absolument automorphe par $F(z)$, on a A pour continu singulier transcendant isolé, et l'on peut définir celui-ci en demandant que tous les points de A soient singuliers transcendants et qu'on puisse entourer A d'un cercle A' concentrique et plus grand, tel que dans l'anneau circulaire limité ainsi, il n'y ait pas d'autres singularités transcendantes. En particulier A peut représenter un seul point singulier essentiel, soit $z=a$.

Il convient de distinguer trois circonstances principales qui peuvent se produire dans la disposition des domaines fondamentaux autour de A: On bien, tous les domaines fondamentaux autour de A (c. à d. ceux qui ont des points dans un cercle tel que A') sauf au plus un nombre limité d'entre eux, ont des sommets situés sur A; ou, au contraire, ces domaines, sauf également un nombre limité d'entre eux, ne possèdent; aucun sommet situé sur A; ou bien encore une infinité de domaines fondamentaux a de tels sommets et une autre infinité n'en a pas. J'appellerai la disposition, et de même la singularité dans ces trois cas respectivement: de la *première espèce*, de la *seconde* et de la *troisième espèce*. — Les deux premières espèces sont opposées l'une à l'autre tandis que la troisième est mixte. Les singularités de la première espèce peuvent être représentées par la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, les singularités de la seconde espèce par une fonction elliptique de $\frac{1}{z}$ (fig. 6, *a* et *b*; — en supposant que la fonction elliptique soit du 2⁰ ordre, deux domaines fondamentaux correspondent à un parallélogramme de périodes; $\frac{1}{z}$ a été choisi au lieu de z pour ramener le point essentiel à l'origine

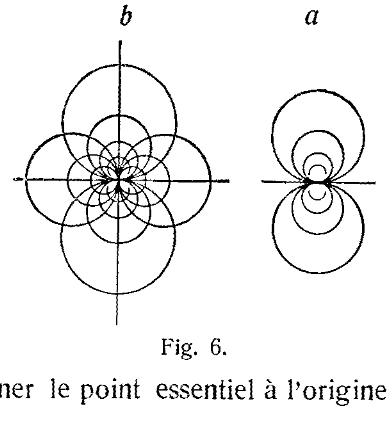

Fig. 6.

afin d'avoir un meilleur aperçu de la disposition des domaines fondamentaux) [15].

Appliquons maintenant au cercle A certaines notions mentionnées au paragraphe précédent, où A représentait un point unique. Ces notions sont, la *valeur exceptionnelle*, la *valeur asymptotique* et le *chemin de détermination*. Une valeur ici sera dite *exceptionnelle* si elle n'est pas prise par $F(z)$ autour de A (dans un cercle tel que A'); *asymptotique* si $F(z)$ converge vers cette valeur sur un chemin qui se termine en un point de A; un tel sera appelé alors un *chemin de détermination*.

Ajoutons encore une notion, celle du *faisceau d'angles* (d'angles aux sommets des domaines fondamentaux). Nous nommerons ainsi l'ensemble de tous les angles ayant un certain sommet commun et formant une suite ininterrompue d'angles adjacents. — Plusieurs cas sont à distinguer. Si l'on range ces angles dans l'ordre cyclique qu'ils occupent autour du sommet commun, le faisceau consiste alors ou bien en une suite finie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ (fig. 7, *a* et *b*) ou bien en une suite infinie (*c* et *d*). Dans ce dernier cas la suite peut être infinie dans un ou dans les deux sens, c. à d. on peut avoir la suite: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (*c*) ou la suite: $\ldots \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, (*d*). On peut distinguer aussi les cas d'un faisceau *fermé* (*a*) et d'un faisceau *ouvert* (*b*, *c* et *d*). Si le faisceau est fermé, son sommet est algébrique, s'il est ouvert, son sommet est transcendant. Donc on peut nommer ces faisceaux respectivement, *algébriques* et *transcendants*. Un faisceau algébrique contient tout le voisinage du sommet qui lui appartient, tandis qu'un faisceau transcendant ne le contient jamais entièrement; quand un faisceau est transcendant son sommet est toujours un point limite de domaines fondamentaux qui n'appartiennent pas à ce faisceau. — On voit nettement que si le faisceau est du type *c* ou *d*, son sommet ne peut pas être de la 2-de espèce.

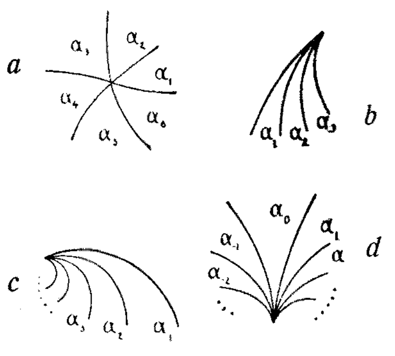

Fig. 7.

[15]) La figure 4 peut donner une idée de la disposition des domaines fondamentaux autour d'une singularité de la 3-ème espèce.

Remarquons qu'il ne peut y avoir de valeurs exceptionnelles que quand A est de la 1-ère espèce. Les faisceaux transcendants peuvent donner des indications sur les chemins de détermination. Ainsi, si un chemin tend vers le sommet d'un faisceau transcendant en ne passant que par un nombre fini de ces angles, il est sûrement un chemin de détermination. Au contraire, si un chemin tend vers le sommet commun à deux faisceaux transcendants σ_1 et σ_2 et s'il rentre sans cesse, alternativement à l'intérieur d'un angle de σ_1 et d'un angle de σ_2, il ne peut pas être un chemin de détermination. — Si A est de la seconde espèce, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de valeurs asymptotiques. — Tout celà est évident.

Une considération géométrique simple nous mène à la proposition suivante: *Si la fonction $F(z)$ tend vers la même valeur asymptotique ω, à l'intérieur de deux angles α_1 et α_2 (fig. 8) ou bien, dans la partie du plan situé entre ces deux angles elle converge toujours vers ω, ou bien, elle s'approche de toute valeur donnée arbitrairement.*

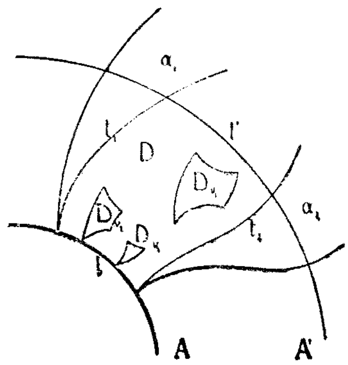

Fig. 8.

Démontrons ceci. Les angles α_1 et α_2 ont en général deux sommets distincts. Désignons par D la partie mentionnée du plan; en précisant on peut l'égaler à un domaine limité par un arc l de A, par un arc l' d'un cercle concentrique A' et par deux côtés t_1 et t_2 des angles α_1 et α_2. — Si α_1 et α_2 appartiennent au même faisceau, $F(z)$ convergera dans D vers ω sur tous les chemins qui se terminent en l; c'est le premier cas. Si α_1 et α_2 appartiennent à deux faisceaux distincts σ_1 et σ_2 on sait, d'après la définition du faisceau, que D contiendra une infinité de domaines fondamentaux. Ceux-ci s'accumulent auprès de l, donc il suffit d'envisager un suite partielle de ces domaines, soit D_{ν_1}, $D_{\nu_2}, \ldots$, pour s'assurer que $F(z)$ s'approche dans D de toute valeur sans exception. Ainsi la proposition est démontrée.

A cette proposition se rattache la suivante: *Si la fonction $F(z)$ tend vers deux valeurs asymptotiques différentes, dans* *deux angles différents, α_1 et α_2, dans la partie du plan située entre ces deux angles, elle s'approchera de toute valeur donnée arbitrairement.*

En effet, dans ces circonstances, α_1 et α_2 appartiennent à deux faisceaux distincts, ce qui nous ramène au second cas de la démonstration précédente [16]).

10. Les fonctions uniformes à un ensemble dénombrable de points singuliers transcendants.

Le théorème 8 du paragraphe 8 peut être étendu facilement aux fonctions uniformes qui ont, non pas un point transcendant unique, le point à l'infini, mais un ensemble quelconque dénombrable de ces points. Puisque un tel ensemble doit être fermé, il est en même temps un ensemble réductible. — D'où le théorème:

Théorème 9. — *Toute fonction analytique uniforme dont l'ensemble des points singuliers transcendants est dénombrable est une fonction absolument automorphe; le plan où une telle fonction est définie peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chaque domaine soit continue et que toute suite de domaines fondamentaux qui a un point limite* [17]), *converge vers ce point.*

Pour le démontrer il faut prouver que la fonction inverse, $z = \Phi(\varsigma)$ de la fonction donnée, $\varsigma = F(z)$ est illimitée, c. à d. qu'elle n'a aucun cercle de limitation.

Supposons par impossible qu'il existe un cercle de limitation, Θ. En prolongeant analytiquement Φ dans Θ à partir d'un certain élément, on décrit un domaine Δ de la surface de Riemann. Δ se projette en un domaine Δ' situé dans Θ mais ne le recouvrant pas entièrement. Soit Ω un domaine dans Θ, complémentaire à Δ'. Ω peut n'avoir aucun point commun avec le bord de Θ, mais en choisissant dans ce cas pour Θ un cercle plus petit, contenu dans le premier et dont le bord coupe Ω, on peut toujours obtenir que la frontière de Ω ait un arc ω

[16]) Si A est un point, ces deux propositions se déduisent de certains faits connus. Voir par ex. le ch IV des „Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé" de *M. G. Julia.*

[17]) Voir la définition VII.

commun avec le bord de Θ; supposons ceci. — Soit alors D le domaine ouvert du plan de z, correspondant à Δ par les valeurs de Φ. Nous supposerons que D se trouve dans la partie finie du plan. Puisque Θ se trouve aussi (on peut le supposer) dans la partie finie du plan de ς, la fonction $F(z)$ est bornée dans D. En outre, $F(z)$ est régulière dans D et sur sa frontière C, excepté aux points de C qui sont transcendants et dont l'ensemble E, est par hypothèse, dénombrable.

D'abord nous supposerons que E contient un point unique, puis qu'il contient un nombre fini de points, enfin qu'il est infini, et nous allons démontrer chaque fois que c'est impossible.

1. Soit donc $z=a$, le seul point singulier transcendant situé sur la frontière C de D. Nous reprendrons la démonstration de M. Valiron. Elle contient le lemme suivant:

„Soit un domaine ouvert D, extérieur à un cercle γ; supposons qu'une fonction analytique et régulière dans D et sur le contour C, sauf peut-être au point a de C, ait son module constant et égal à A sur C (a excepté) et inférieur à A dans le domaine D; dans ces condition, ou bien D renferme des zéros de cette fonction, ou bien il existe dans D des chemins aboutissant en a, sur lesquels la fonction tend vers zéro" [18]).

D'ici on déduit immédiatement l'impossibilité du cas considéré. En effet, on peut toujours supposer que le domaine D est extérieur à un cercle γ et que Θ est décrit de $\varsigma=0$ comme centre, avec un rayon égal à A; enfin, que ni Δ' ni la frontière de Δ' ne contient le point $\varsigma=0$. (Ceci peut être obtenu par une substitution homographique de ς, ce qui n'altère pas les circonstances essentielles). Mais alors, puisque $F(z)$ est holomorphe dans D et sur C sauf au point a, et puisque $|F(z)|<A$ dans D et $=A$ sur C sauf peut-être en a, nécessairement $F(z)$ devrait tendre vers zéro sur des chemins tracés dans D et aboutissant en a. Or, d'après la position de Δ', ceci est impossible. Donc, le premier cas est exclu.

2. Considérons le second cas; supposons par impossible qu'il se trouve sur C un nombre limité quelconque, n, de points transcendants. Divisons D en n domaines tels, que la frontière de chacun d'eux ne contienne qu'un point transcendant unique. Cette division est effectuée par certaines courbes qui ne s'approchent d'aucun de ces points. Désignons par L l'ensemble de ces

---

[18]) Voir [14]).

courbes. Soit Λ l'ensemble des points du plan de ς, qui correspond à L (fig. 9). Λ n'a évidemment aucun point commun avec la frontière de Ω. Donc, on peut tracer un cercle Θ_0 contenu dans Θ, tel que Λ reste à l'extérieur et qu'à l'intérieur de Θ_0 il y ait en même temps des points de Δ' et de Ω, c. à d. que Θ_0 soit un cercle de limitation.

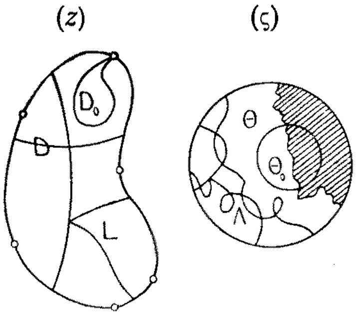

Fig. 9.

Soit Δ_0 une partie du domaine Δ que l'on décrit en prolongeant analytiquement un certain élément de Φ situé dans Θ_0, de toutes manières possibles, sans sortir de Θ_0; soit D_0 le domaine ouvert correspondant, situé dans D. Puisque Λ n'a aucun point commun avec Δ_0', L n'en aura pas avec D_0 donc, D_0 est contenu dans l'un des n domaines de D. Par conséquent, sur la frontière de D_0 il n'existe qu'un point transcendant unique; or c'est le premier cas qui vient d'être réfuté.

3. Il nous reste encore à considérer le troisième cas. Si l'ensemble E, dénombrable, a un nombre limité de points limites, le procédé suivant conduit au but. — D'abord, par une considération analogue à la précédente on construit un cercle de limitation Θ_0, contenu dans Θ puis le domaine D_0 sur la frontière duquel se trouve un seul point limite de points transcendants, a (fig. 10). Il faut alors prouver l'impossibilité de ce cas.

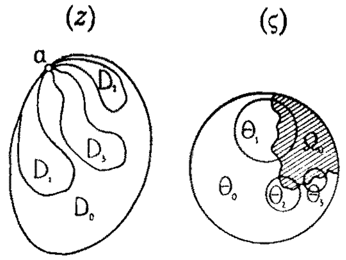

Fig. 10.

Décrivons trois cercles, Θ_1, Θ_2 et Θ_3, extérieurs l'un à l'autre, contenus dans Θ_0 et situés de part et d'autre de la frontière qui sépare Δ_0' de Ω_0. Θ_1, Θ_2 et Θ_3 sont trois cercles de limitation auxquels correspondent trois domaines, D_1, D_2 et D_3 contenus dans D_0, extérieurs l'un à l'autre. Il est impossible que D_1 par ex., n'ait pas a sur sa frontière, car, autrement, cette frontière contiendrait un nombre fini de points transcendants et ce cas a été exclu. Donc, ces trois domaines ont a sur leurs frontières.

Dans de telles circonstances, l'un d'eux, soit D_3, est situé ou bien entre les deux autres, ou bien entre deux bouts, finissant en a, d'un seul de ces domaines. — Si la frontière de D_3 est continue en a, c'est le seul point transcendant situé sur la frontière de D_3 et l'on a de nouveau le premier cas, réfuté. Si la frontière de D_3 n'est pas continue en a, une considération plus précise est nécessaire.

Le point a appartient alors à un seul ou à plusieurs „bouts" de la frontière de D_3, qui ne se réduisent pas tous au seul point a, mais qui contiennent en outre une partie plus ou moins grande de la frontière de D_0 et, par conséquent, une infinité de points transcendants de $F(z)$. La proposition de M. Valiron n'est donc pas applicable directement; il faut d'abord transformer D_3 en un domaine plus simple. Dans ce but envisageons la frontière extérieure de D_3, c. à d. les points de la frontière de D_3 qui sont nécessaires pour diviser le plan en deux domaines dont l'un contient D_3 et l'autre, le point à l'infini. Faisons la représentation conforme du premier de ces deux domaines sur un domaine dont la frontière est continue, un cercle par ex.. Soit $z=\psi(t)$ la fonction qui effectue cette représentation. A D_3 correspond un domaine D_3' contenu dans ce cercle. La fonction $\varsigma = F_1(t) = F\{\psi(t)\}$ est holomorphe dans D_3 et sur sa frontière, excepté en un seul point, qui correspond aux bouts mentionnés de D_3. Les autres conditions du théorème de M. Valiron étant alors remplies également, on obtient le même résultat que dans le premier cas, donc, ici encore, la présence d'un cercle de limitation est exclue.

Continuons la démonstration en nous aidant des cas précédents; d'abord en supposans que la seconde dérivée de E a un nombre limité de points, puis en passant aux dérivées successives et dont l'ordre ne peut dépasser un nombre fini.

Donc, la fonction $\Phi(\varsigma)$ est vraiment illimitée. De cette conclusion le théorème 9 découle immédiatement comme conséquence des théorèmes 6 et 7.

Avant de terminer notons une généralisation de nos considérations. Au lieu d'exiger que toute une surface de Riemann soit illimitée, on peut se borner à un certain domaine quelconque d'une telle surface. Un domaine Σ de la surface de Riemann d'une fonction $\Phi(\varsigma)$ sera dit illimité, s'il n'existe aucun cercle Θ tel, qu'en prolongeant analytiquement Φ à partir d'un élément y appartenant à Σ et situé dans Θ, on ne puisse pas recouvrir Θ entièrement, *à moins qu'on ne rencontre la frontière qui sépare Σ du reste de la surface.* Ainsi, on aurait aussi la notion d'une fonction „illimitée dans un domaine" de sa surface de Riemann.

Soit S le domaine de la surface de $F(z)$ correspondant à Σ. Si Φ est illimitée dans Σ, on pourra nommer $F(z)$ *absolument automorphe dans le domaine S.* Evidemment, ce nom perd son vrai sens quand $F(z)$ est trop simple dans S, c. à d par ex. si elle y est univalente. Mais si, par ex., S est un domaine du plan dans lequel $F(z)$ a des poins singuliers transcendants isolés, ce nom prendra sa pleine valeur.

En ce qui concerne la division du domaine S en domaines fondamentaux, ceci doit signifier que S est divisé en domaines et que ceux-ci sont fondamentaux, *excepté, peut être, ceux qui rencontrent la frontière qui sépare S des autres parties du domaine d'existence de $F(z)$.*

Avec ces notions généralisées on peut énoncer, entre autres, les deux propositions suivantes, analogues aux théorèmes 8 et 9:

Théorème 8*. — *Toute fonction analytique est absolument automorphe au voisinage de chacun de ses points singuliers transcendants isolés où elle est uniforme; un tel voisinage* (qui ne contient pas d'autres points singuliers transcendants) *peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ensemble ils convergent vers le point singulier transcendant considéré.*

Théorème 9*. — *Toute branche d'une fonction analytique est absolument automorphe dans chaque domaine du plan, dans lequel elle est uniforme et n'a qu'un ensemble dénombrable de points singuliers transcendants; ce domaine peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chaque domaine soit continue et que toute suite de ces domaines qui a un point limite dans le domaiue considéré, converge vers ce point.*