Sur les produits de deux systèmes de vecteurs glissants.

Par

ANTOINE BILIMOVITCH.

L'algèbre du système de vecteurs glissants se développant dans les directions différentes, dont il faut noter la direction formelle de la généralisation de la théorie des quaternions (Clifford) et la direction géométrique (Ball, Kotelnikoff, Study, v. Mises), n'a pas encore reçu jusqu'à présent de forme systématique définitivement établie.

Dans ce qui suit nous voulons traiter la notion fondamentale de cette algèbre, notamment le produit de deux systèmes de vecteurs glissants. Nous établissons les notions des produits scalaire, vectoriel et diadique sous une forme nouvelle, généralisée, dont on peut tirer, sous certaines conditions, les formes spéciales de ces produits que nous rencontrons chez les auteurs différents. En discutant la nature géométrique du produit diadique, nous utilisons celles des interprétations géométriques que nous avons données dans notre travail: „Fondements géométriques de la théorie des diades. I. Diade et affineur“ [1]).

Il est bien connu que l'on peut caractériser chaque système de vecteurs glissants par deux vecteurs: résultante générale $\vec{R}$ et moment résultant $\vec{M}^{(o)}$ pour le pôle déterminé, soit le point

[1]) Геометријске Основе рачуна са диадама. I. Диада и Афинор. Београд. 1930.

O. Quand on change le pôle, la résultante générale reste telle quelle, tandis que le moment résultant reçoit en général une valeur nouvelle définie par la formule

$$\vec{M}^{(A)} = \vec{M}^{(o)} + [\vec{R}, \vec{r}],$$

où $\vec{r}$ est le vecteur du point A par rapport au point O; les parenthèses [ ] indiquent le produit vectoriel de deux vecteurs.

Nous voulons désigner le système de vecteurs glissants rapporté au pôle O par $S^{(o)}$ ou par $\vec{R}, \vec{M}^{(o)}$.

On sait qu'il existe trois produits fondamentaux de deux vecteurs. Ces produits, — scalaire, vectoriel et diadique — nous allons les désigner par

$$(\vec{A}, \vec{B}), \qquad [\vec{A}, \vec{B}], \qquad \{\vec{A}, \vec{B}\}.$$

A côté de ces produits fondamentaux on peut déduire les autres produits dérivatifs qui sont les fonctions linéaires des produits fondamentaux. Par exemple, nous avons: le produit algébrique représentant l'affineur de la forme suivante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\});$$

le roteur-diade de Jaumann avec la valeur

$$A^r = \{\vec{B}, \vec{A}\} - (\vec{A}, \vec{B})\mathbf{I},$$

où $\mathbf{I}$ représente l'affineur-unité, c'est-à-dire l'affineur de la forme

$$\mathbf{I} = \{i, i\} + \{j, j\} + \{\kappa, k\},$$

où i, j, k sont les vecteurs orthogonaux de la longueur d'unité; puis le déviateur de Schouten

$$\vec{A} \times \vec{B} - \frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B})\mathbf{I}.$$

L'axiateur du diade peut être considéré aussi comme étant le produit de deux vecteurs, parce qu'on peut écrire

$$ax\{\vec{A}, \vec{B}\} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} - \{\vec{B}, \vec{A}\}).$$

Dans ce qui suit, si nous ne voulons pas distinguer la nature du produit de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, nous allons écrire $\vec{A}.\vec{B}$.

Soient deux systèmes de vecteurs glissants $S_1^{(o)}$ et $S_2^{(o)}$ donnés par les vecteurs

$$S_1^{(o)}(\vec{R}_1, \vec{M}_1^{(o)}),$$

$$S_2^{(o)}(\vec{R}_2, \vec{M}_2^{(o)}).$$

Nous définissons le produit

$$S_1^{(o)}.\, S_2^{(o)}$$

de ces systèmes, de quelque nature déterminée soient-ils, par l'ensemble de quatre produits que nous allons écrire sous la forme d'une matrice

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R}_1 . \vec{R}_2, & \vec{R}_1 . \vec{M}_2^{(o)} \\ \vec{M}_1^{(o)} . \vec{R}_2, & \vec{M}_1^{(o)} . \vec{M}_2^{(o)} \end{matrix} \right\},$$

où la nature de chaque produit correspondrait à celle du produit des systèmes.

Analysons les produits fondamentaux de deux systèmes: scalaire, vectoriel et diadique.

Pour le produit scalaire nous avons

$$(S_1^{(o)}, S_2^{(o)}) = \left\{ \begin{matrix} (\vec{R}_1, \vec{R}_2), & (\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) \\ (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2), & (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{M}_2^{(o)}) \end{matrix} \right\}.$$

Ainsi le produit scalaire se compose, dans le cas général, de quatre membres. Cependant on peut former de ces membres des invariants importants pour les systèmes; ces invariants peuvent être soit *absolus* soit *relatifs*. Les invariants absolus ne changent pas leur valeur avec le changement du pôle; les invariants relatifs changent en général leur valeur primitive, mais on ne peut construire la nouvelle valeur qu'en utilisant les membres du produit et le vecteur du pôle nouveau par rapport au pôle ancien, sans se servir des vecteurs séparés des systèmes-facteurs.

Pour le produit scalaire on peut indiquer deux invariants suivants:

$$i_1 = (\vec{R}_1, \vec{R}_2),$$

$$i_2 = (\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) + (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2).$$

Il est facile de voir que ce sont des invariants absolus. D'une manière formelle, on pourrait obtenir ces invariants en utilisant l'unité ε de Clifford qui satisfait la condition $\varepsilon^2 = 0$. En représentant chaque système par la somme

$$S_1^{(o)} = \vec{R}_1 + \varepsilon \vec{M}_1^{(o)},$$

$$S_2^{(o)} = \vec{R}_2 + \varepsilon \vec{M}_2^{(o)}$$

nous avons pour le produit scalaire l'équation suivante:

$$(S_1^{(o)}, S_2^{(o)}) = (\vec{R}_1, \vec{R}_2) + \varepsilon\left[(\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) + (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2)\right],$$

qui donne immédiatement les invariants sus-dits.

La condition $\varepsilon^2 = 0$ pour l'unité ε est un peu artificielle et il serait plus naturel de retenir le membre avec ε^2 dans le produit de Clifford.

Le système logique d'algébre est encore plus infirmé si le produit scalaire ne se réduit qu'à l'invariant i_2, nommé le moment relatif de deux systèmes. Quand on omet le premier invariant $i_1 = (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$, en cas de dégénération de chaque système en un seul vecteur, le produit scalaire de ces deux systèmes ne dégénère pas en produit scalaire de vecteurs, mais reste toujours égal à zéro, ce qui est contraire aux lois fondamentales de toute algèbre.

Le membre quatre dépend de la position du pôle et ne représente l'invariant ni absolu ni relatif. Outre le naturel de la constuction de la matrice du produit, c'est la raison d'analogie qui nous fait conserver ce membre, étant donné que dans les autres produits, par exemple diadique, le membre en question est nécessaire.

En cas du produit vectoriel nous avons

$$[S_1^{(o)}, S_2^{(o)}] = \left\{ \begin{matrix} [\vec R_1 , \vec R_2], & [\vec R_1 , \vec M_2^{(o)}] \\ [\vec M_1^{(o)}, \vec R_2], & [\vec M_1^{(o)}, \vec M_2^{(o)}] \end{matrix} \right\}.$$

Pour ce produit il existe aussi deux invariants dans le sens indiqué:

$$\vec R = [\vec R_1 , \vec R_2] ,$$

$$\vec M^{(o)} = \vec R_1 , \vec M_2^{(o)}] + [\vec M_1^{(o)}, \vec R_2];$$

le premier est l'invariant absolu, le second est relatif, parce que nous avons

$$\vec M^{(A)} = \vec M^{(o)} + [\vec R , \vec r] . \tag{1}$$

L'ensemble de ces invariants sous condition (1) correspond à un système de vecteurs glissants. Cet ensemble représente le produit vectoriel de deux systèmes pris dans le sens de Clifford.

Nous y noterons que pour la démonstration de l'invariance relative du vecteur $\vec M^{(o)}$ il faut utiliser la formule suivante:

$$[\,[\vec R_1 , \vec R_2] , \vec r\,] = [\vec R_1 \,[\vec R_2 , \vec r\,]\,] + [\,[\vec R_1 , \vec r\,]\, \vec R_2] . \tag{2}$$

Enfin, nous allons construire le produit diadique de deux systèmes par la matrice

$$\{S_1^{(o)}, S_2^{(o)}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\vec R_1 , \vec R_2\}, & \{\vec R_1 , \vec M_2^{(o)}\} \\ \{\vec M_1^{(o)}, \vec R_2\}, & \{\vec M_1^{(o)}, \vec M_2^{(o)}\} \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

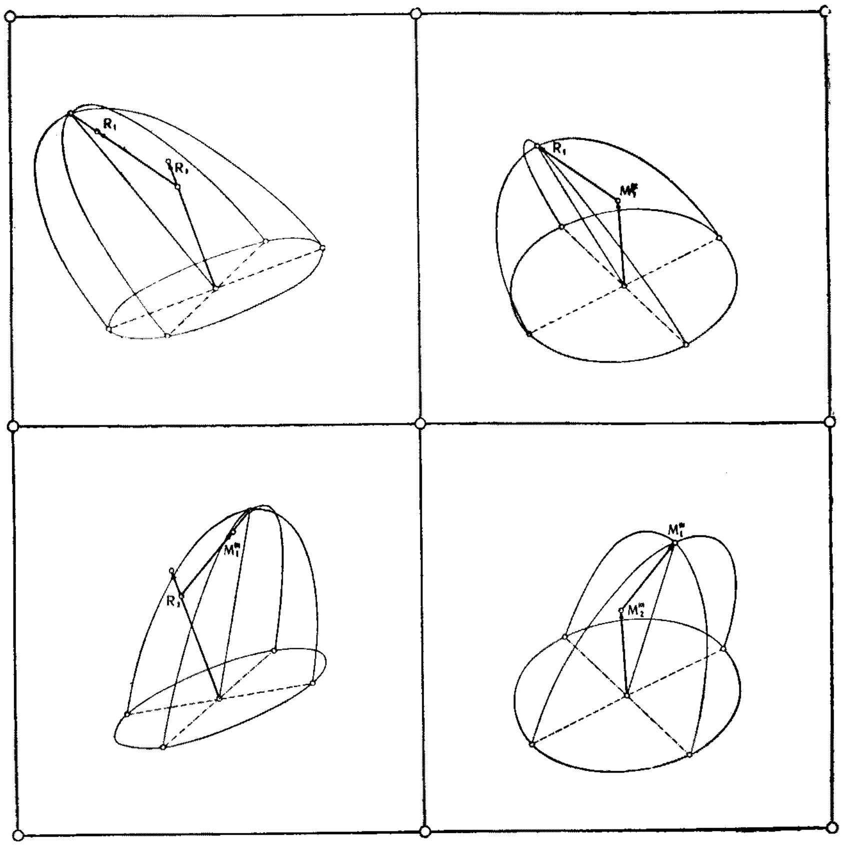
Le produit diadique de deux systèmes, de même que les produits précédents, présente une image géométrique. Ce n'est pas seulement un opérateur, mais une image complétement autonome qui, d'après les règles que nous avons indiquées (l. c.), pourrait être construite dans l'espace (fig.).

Avec la même raison que dans les cas précédents, nous pourrons former deux invariants qui seraient des membres du produit pris dans le sens de Clifford. Ce sont les invariants

$$\mathbf{A} = \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\},$$

$$\mathbf{A}^{(o)} = \{\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}\} + \{\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2\}.$$

Le premier invariant est absolu, c'est le diade construit sur les vecteurs $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$. Le deuxième, comme nous allons voir, représente un invariant relatif, c'est un affineur planaire.



Pour la démonstration de l'invariance de l'affineur $\mathbf{A}^{(o)}$, calculons sa valeur pour le pôle nouveau A. Alors nous aurons:

$$\mathbf{A}^{(A)} = \{\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(A)}\} + \{\vec{M}_1^{(A)}, \vec{R}_2\} =$$

$$= \mathbf{A}^{(o)} + \{\vec{R}_1 [\vec{R}_2, \vec{r}]\} + \{[\vec{R}_1, \vec{r}] \vec{R}_2\}.$$

Maintenant introduisons par la formule

$$\{\,\{\vec{A}\,,\vec{B}\}\,\vec{C}\}=\{\vec{A}\,[\vec{B}\,,\vec{C}]\,\}+\{\,[\vec{A}\,,\vec{C}]\,\vec{B}\}$$

analogue à (2) le produit que nous nommerons, par abréviation, le produit diadique du diade et du vecteur à droite [1]).

Alors nous aurons l'égalité

$$\mathbf{A}^{(A)}=\mathbf{A}^{(o)}+\{\,\{\vec{R}_1\,,\vec{R}_2\}\,\vec{r}\,\}\,,$$

qui démontre l'invariance relative de l'affineur $\mathbf{A}^{(o)}$.

L'expression

$$\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{A}^{(o)}$$

représente le produit diadique de deux systèmes pris dans le sens de Clifford.

Il faut considérer le produit (3) comme le produit diadique fondamental. De même que dans le cas de deux vecteurs, pour les deux systèmes on peut construire les produits dérivatifs comme les fonctions linéaires des produits diadiques différents. Par exemple la matrice

$$(4)\quad \left\{\begin{matrix} 0\,, & \{\vec{R}_2\,,\vec{R}_1\}-(\vec{R}_1\,,\vec{R}_2)\,\mathbf{I} \\ \{\vec{R}_2\,,\vec{R}_1\}-(\vec{R}_1\,,\vec{R}_2)\,\mathbf{I}\,, & \{\vec{R}_1\,,\vec{M}_2^{(o)}\}+\{\vec{M}_1^{(o)},\vec{R}_2\}-[\,(\vec{R}_1\,,\vec{M}_2^{(o)})+(\vec{M}_1^{(o)},\vec{R}_2)\,]\,\mathbf{I} \end{matrix}\right\}$$

définit un produit spécial de deux systèmes. Ce produit représente un invariant. Si nous désignons les coordonnées du produit diadique fondamental par le schéma

---

1) Dans notre travail (l. c.) nous avons donné tous les produits fondamentaux du diade et du vecteur. Ici, ce sont les produits vectoriels de nature diadique [(58)—(65) p. 74] qui nous intéressent. Le produit, que nous avons brièvement nommé produit diadique du diade et du vecteur à droite, représente une fonction linéaire, la somme des produits (58) et (65); de telle manière on pourrait écrire:

$$\{\,\{\vec{A}\,,\vec{B}\}\,\vec{C}\}={}^{d}[\,\{\vec{A}\,,\vec{B}\}\,\vec{C}]+{}^{d}[\vec{C}\{\underline{\vec{A}}\,\vec{B}\}\,]=$$

$$=\{\vec{A}\,[\vec{B}\,,\vec{C}]\,\}+\{\,[\vec{A}\,,\vec{C}]\,\vec{B}\}\,,$$

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{26} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{61} & a_{32} & \ldots & a_{66} \end{array}\right\},$$

aux coordonnées du produit (4) correspond le schéma suivant:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 0, & 0, & 0, & -(a_{22}+a_{33}), & a_{21}, & a_{31} \\ 0, & 0, & 0, & a_{12}, & -(a_{11}+a_{33}), & a_{32} \\ 0, & 0, & 0, & a_{13}, & a_{23}, & -(a_{11}+a_{22}) \\ -(a_{22}+a_{33}), & a_{21}, & a_{31}, & -(a_{25}+a_{36}+a_{52}+a_{63}), & a_{15}+a_{42}, & a_{16}+a_{43} \\ a_{12}, & -(a_{11}+a_{33}), & a_{32}, & a_{24}+a_{51}, & -(a_{14}+a_{41}+a_{36}+a_{63}), & a_{26}+a_{62} \\ a_{13}, & a_{23}, & -(a_{11}+a_{22}), & a_{61}+a_{34}, & a_{35}+a_{62}, & -(a_{14}+a_{41}+a_{25}+a_{52}) \end{array}\right\}$$

Il est évident que la règle de composition du produit (4) est analogue à celle du roteur-diade de Jaumann.

De la même manière on peut composer le produit algébrique et les autres formes des produits de deux systèmes de vecteurs glissants.