Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes.

Par

ELIE CARTAN.

Nous nous proposons d'exposer certaines propriétés topologiques de la quadrique complexe et de montrer leurs relations d'une part avec des résultats classiques de la géométrie algébrique des variétés tracées sur cette quadrique, d'autre part avec la théorie des espaces riemanniens symétriques clos; des théorèmes importants dus à G. de Rham nous conduiront à retrouver par une voie curieusement détournée les valeurs de certaines intégrales multiples classiques.

I. La quadrique complexe considérée comme espace symétrique clos.

1. Considérons dans l'espace projectif complexe à $n+1$ dimensions une quadrique non dégénérée (Q), que nous pouvons définir par l'équation

$$(1) \qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2+x_{n+2}^2=0;$$

nous dirons que les coordonnées x_k d'un point de (Q) sont *normales* si elles satisfont à la relation

$$(2) \qquad x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\ldots+x_{n+1}\bar{x}_{n+1}+x_{n+2}\bar{x}_{n+2}=2\,,$$

où $\bar{x}_k$ désigne la quantité conjuguée de x_k. En posant $x_k=\xi_k+i\eta_k$ les relations (1) et (2) sont équivalentes aux relations

$$\sum_{k=1}^{k=n+2} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{k=n+2} \eta_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=n+2} \xi_k \eta_k = 0. \tag{3}$$

Les coordonnées d'un point ne cessent pas d'être normales si on les multiplie par un même facteur arbitraire de module égal à 1.

La quadrique peut être regardée comme un espace clos à $2n$ dimensions réelles. Elle admet en elle-même une infinité de groupes de transformations transitifs clos [1]). Il suffit par exemple de considérer le groupe G des substitutions orthogonales *réelles* de déterminant 1 effectuées sur les x_k :

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=n+2} a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{4}$$

Ce groupe est transitif, car si $x_k = \xi_k + i\eta_k$ sont les coordonnées normales d'un point de (Q), il existe en vertu de (3) une infinité de matrices orthogonales dont les deux dernières colonnes sont formées des ξ_k et des η_k : le groupe G contient donc une infinité de transformations transformant le point $(0, \ldots, 0, 1, i)$ dans un point arbitrairement donné de (Q).

2. *Le groupe des rotations* g autour du point $(0, \ldots, 0, 1, i)$, que nous appellerons *le point-origine*, est le plus grand sous-groupe de G laissant fixe ce point; on voit immédiatement qu'il résulte d'une substitution orthogonale réelle de déterminant 1 effectuée sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, accompagnée de la substitution

$$x'_{n+1} = x_{n+1} \cos\theta - x_{n+2} \sin\theta,$$

$$x'_{n+2} = x_{n+1} \sin\theta + x_{n+2} \cos\theta;$$

cette dernière engendre un sous-groupe commutatif avec toutes les transformations de g.

D'autre part tout point infiniment voisin du point-origine, si l'on suppose, ce qui est permis, que la coordonnée normale x_{n+1} est réelle et positive, est complètement défini par ses n premières coordonnées, les deux dernières étant 1 et i. En normant ainsi sans ambigüité les coordonnées de ce point, les équations du groupe des rotations deviennent

$$x'_k = e^{i\theta} \sum_{h=1}^{h=n} a_{kh}\, x_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

---

[1]) Voir, pour la notion de groupe clos, *E. Cartan*, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 1—33).

la matrice des a_{kh} étant orthogonale, réelle, de déterminant 1.

On peut dire encore que *tout vecteur* (X_k) *issu du point-origine est transformé par le groupe des rotations suivant les formules*

$$X'_k = e^{i\theta} \sum_{h=1}^{h=n} a_{kh} X_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

La quantité $X_1 \overline{X}_1 + \ldots + X_n \overline{X}_n$, invariante par le groupe des rotations, est le carré de la longueur du vecteur, ce qui permet de définir dans (Q) une métrique riemannienne invariante par G.

3. La quadrique (Q) peut être regardée comme un *espace de Klein* dont le groupe fondamental serait G. De ce point de vue, c'est un espace symétrique [2]). Cela signifie qu'on peut attacher à chaque point M de (Q) une transformation ponctuelle involutive σ_M (symétrie par rapport à M) jouissant des trois propriétés suivantes:

1°. *Le point M est un point invariant isolé pour* σ_M;

2°. *La transformation* σ_M *transforme entre elles les transformations de* G;

3°. *La transformation* σ_M *est invariante par chacune des transformations de* G *qui laissent fixe le point* M.

Il suffit en effet de prendre pour σ_M l'homographie involutive qui a pour axes la droite réelle Δ joignant le point M au point imaginaire conjugué $\overline{M}$, et la variété plane Π polaire de Δ par rapport à (Q). Le transformé d'un point P par σ_M s'obtient alors en menant par P la droite qui s'appuie sur Δ et Π et prenant le conjugué harmonique de P par rapport aux deux points où cette droite coupe Δ et Π.

La symétrie par rapport au point-origine est donnée par

$$x'_1 = -x_1, \ldots, x'_n = -x_n, \quad x'_{n+1} = x_{n+1}, \quad x'_{n+2} = x_{n+2};$$

elle fait partie du groupe des rotations (5), avec la valeur π de l'angle θ.

---

[2]) Voir *E. Cartan*, Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 74—76).

II. Les nombres de Betti de la quadrique complexe.

4. J'ai démontré [3]) que dans un espace symétrique clos de groupe fondamental G, le nombre de Betti d'un ordre donné h est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré h: l'élément différentiel d'un tel invariant est une forme différentielle extérieure invariante par G. Elle est complètement déterminée par la valeur qu'elle prend quand, dans ses coefficients, on donne aux coordonnées x_k les valeurs qu'elles ont au point-origine: on obtient alors une forme extérieure invariante par le groupe des rotations.

Comme le groupe des rotations contient ici la symétrie par rapport au point-origine et que cette symétrie change de signe les variables X_k et $\overline{X}_k$, il ne peut exister aucun invariant intégral d'ordre impair.

Théorème I. *Les nombres de Betti d'ordre impair de la quadrique complexe sont tous nuls.*

D'une manière plus précise, le groupe des rotations comprenant la transformation

$$X'_k = e^{i\theta} X_k, \qquad \overline{X}'_k = e^{-i\theta} \overline{X}_k,$$

toute forme extérieure invariante doit contenir dans chacun de ses termes autant de variables X_k que de variables $\overline{X}_k$, ce qui entraîne la parité du degré.

5. Le groupe des rotations étant un groupe linéaire portant sur les n variables *complexes* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, les nombres de Betti d'ordre pair sont tous positifs [4]). La recherche des formes extérieures de degré $2h$ invariantes par g revient à la détermination des groupes linéaires *irréductibles* dans lesquels se décompose éventuellement le groupe linéaire qui indique comment le groupe orthogonal transforme entre elles les coordonnées plückeriennes

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_h} = [X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h}]$$

d'un élément plan à h dimensions complexes issu du point-origine. Chacun de ces groupes irréductibles, portant par exemple

[3]) *E. Cartan,* Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (Annales Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 110—125).

[4]) Cfr. les N^{os} 30—31 du mémoire cité [3]), p. 203—204.

sur des variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, combinaisons linéaires des $p_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, laisse invariante une forme d'Hermite définie positive, qu'on peut supposer être $u_1 \bar{u}_1 + \bar{u}_2 u_2 + \ldots + u_\nu \bar{u}_\nu$, et il suffit alors de remplacer les u_h par leurs valeurs et de regarder les produits $u_k \bar{u}_h$ comme des produits *extérieurs* pour avoir une des formes extérieures invariantes cherchées.

Ici les choses sont extrêmement simples. Pour $h \neq \frac{n}{2}$ le groupe orthogonal opérant sur les $p_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ est irréductible, d'où le théorème:

Théorème II. *Le nombre de Betti d'ordre $2h \neq n$ de la quadrique complexe est égal à 1.*

Si n est pair, le groupe orthogonal opérant sur les $p_{i_1 i_2 \ldots i_{\frac{n}{2}}}$ est *réductible*. Les quantités

$$q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} = p_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} + \varepsilon p_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n},$$

où $(i_1, i_2 \ldots i_n)$ désigne une permutation *paire* des indices $1, 2, \ldots, n$, et où $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$, sont au nombre de $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}$ indépendantes: on a en effet

$$q_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n} = p_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n} + (-1)^{\frac{n}{2}} \varepsilon p_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon} q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}}.$$

Le groupe orthogonal se décompose ainsi en deux groupes irréductibles non équivalents, l'un portant sur les variables $q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}}$, l'autre sur des variables analogues provenant du changement de ε en $-\varepsilon$, d'où le

Théorème III. *Le nombre de Betti d'ordre n (n pair) est égal à 2.*

6. La forme extérieure de degré 2 invariante par g est manifestement

$$[X_1 \bar{X}_1] + [X_2 \bar{X}_2] + \ldots + [X_n \bar{X}_n]; \tag{7}$$

en l'élevant à la puissance $h \neq \frac{n}{2}$, on a la forme extérieure invariante de degré $2h$.

Si $h = \frac{n}{2}$, on obtient, outre la forme précédente élevée à la puissance h, la forme

$$\sum \left[(X_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} + \varepsilon X_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n}) (\overline{X}_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} + \overline{\varepsilon}\, \overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n}) - \right.$$
$$\left. - (X_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} - \varepsilon X_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n}) (\overline{X}_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} - \overline{\varepsilon}\, \overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n}) \right].$$

A un facteur constant près, c'est la forme

$$\sum [X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_{\frac{n}{2}}} \overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1}} \ldots \overline{X}_{i_n}], \tag{8}$$

la somme étant étendue à tous les couples de combinaisons $(i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}})$, $(i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n)$ tels que la permutation $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ soit paire. On peut encore l'obtenir en remplaçant dans $[X_1\, X_2 \ldots X_n]$, de toutes les manières possibles, $\frac{n}{2}$ des facteurs par leurs complexes conjugués et faisant la somme de tous les produits ainsi obtenus.

Les invariants intégraux correspondant aux formes (7) et (8), considérés au point-origine, se déduisent de ces formes en y remplaçant X_k par dx_k ; nous verrons plus loin leur expression complète.

7. Les résultats qui viennent d'être obtenus sur les nombres de Betti de (Q) sont en accord avec un théorème important de S. Lefschetz [5]) qui, de son côté, si on admettait le théorème I, permettrait de les retrouver. Ce théorème donne le nombre *algébrique* des points invariants par une transformation biunivoque d'un espace clos à un nombre pair $2n$ de dimensions, lorsque cette transformation peut se relier d'une manière continue à la transformation identique. Dans le cas particulier où l'espace est *analytique complexe*, la position d'un point étant définie par n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et où la transformation est *analytique* par rapport aux x_k, *le nombre des points invariants, supposés isolés, est égal à la différence entre la somme des nombres de Betti d'ordre pair et la somme des nombres de Betti*

[5]) *S. Lefschetz*, Complexes and Manifolds (Trans. Math. Am. Soc., 28, 1926, p. 1—49); On Transformations of closed Sets (Annals of Math., 31, 1930, p. 271—280).

d'ordre impair. Ici, d'après le théorème I, il n'y a à considérer que la somme des nombres de Betti d'ordre pair qui, en tenant compte des nombres de Betti d'ordre zéro et d'ordre n, égaux chacun à 1, est égale à $n+1$ pour n impair et $n+2$ pour n pair.

Or considérons une transformation arbitraire du groupe G, réductible, comme on sait, à

$$\left.\begin{aligned} x'_{2k-1} &= x_{2k-1} \cos \alpha_k - x_{2k} \sin \alpha_k \,, \\ x'_{2k} &= x_{2k-1} \sin \alpha_k + x_{2k} \cos \alpha_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Si n est impair, on a $x'_{n+1} = x_{n+1}$ et les points invariants sont ceux dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $x_{2k-1} = 1$, $x_{2k} = \pm i$: ils sont effectivement au nombre de $n+1$; si n est pair, ce nombre s'élève à $n+2$.

Si, admettant le théorème I et s'appuyant sur la propriété des nombres de Betti d'ordre pair d'être tous positifs, on utilisait le théorème de Lefschetz, on retrouverait immédiatemet les résultats des théorèmes II et III: le seul nombre de Betti égal à 2 ne peut être en effet que le nombre d'ordre moyen n.

III. La base des homologies de la quadrique complexe.

8. Etant données, dans un espace clos *orienté* à ν dimensions réelles, deux variétés fermées orientées V et W, à h et $\nu-h$ dimensions, on définit en *Analysis situs* [6]) le nombre (algébrique) des points d'intersection de ces deux variétés, qu'on désigne par le symbole $V.\ W$. Il ne change pas quand on remplace V et W par des variétés *homologues* (avec division) V' et W'.

On démontre d'autre part que si p est la valeur commune des nombres de Betti d'ordres h et $\nu-h$, on peut trouver p variétés fermées orientées à h dimensions $V_1, \ldots, V_p$, et p variétés fermées orientées à $\nu-h$ dimensions $W_1, \ldots, W_p$ de telle sorte que le déterminant des nombres $V_i\ .\ W_j$ soit égal à ± 1. Ces variétés constituent, les p premières une base pour les homologies d'ordre h, les p dernières une base pour les homolo-

[6]) Voir, par exemple, *G. de Rham*, Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (J. Math. pures et appl., 10, 1931, p. 138 et suivantes).

gies d'ordre $\nu - h$. Toute variété fermée orientée V á h dimensions est homologue (avec division) à une somme de multiples entiers, positifs, nuls ou négatifs, de $V_1, V_2, \ldots, V_p$:

$$V \sim m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots + m_p V_p:$$

cela signifie en particulier que si W est une variété fermée orientée quelconque à $\nu - h$ dimensions, on a

$$V . W = m_1 V_1 . W + m_2 V_2 . W + \ldots + m_p V_p . W.$$

Si donc on trouve $2q$ variétés fermées orientées V'_i et W'_j à h et $\nu - h$ dimensions, telles que le déterminant $| V'_i . W'_j |$ ne soit pas nul, c'est que le nombre de Betti d'ordre h est au moins égal à q.

9. Un cas important est celui où l'espace est analytique complexe et où les variétés V et W sont elles-mêmes définies par des relations analytiques entre les coordonnées complexes. L'espace, ainsi que chacune des variétés analytiques fermées qu'il contient, admet alors une *orientation naturelle,* indépendante de toute transformation *analytique* effectuée sur les coordonnées. Cette orientation sera définie par exemple en regardant comme direct en un point le $(2n)$ — èdre obtenu en construisant les $2n$ vecteurs

$$\vec{e}_1, \vec{\eta}_1, \vec{e}_2, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{\eta}_n,$$

les vecteurs $\vec{e}_k$ et $\vec{\eta}_k$ étant tangents respectivement aux lignes obtenues en faisant varier la seule coordonnée x_k et en lui donnant respectivement un accroissement réel et positif et un accroissement purement imaginaire positif.

On démontre [7]) que *si deux variétés analytiques fermées à 2h et 2n—2h dimensions réelles sont orientées naturellement et n'ont que des points d'intersection isolés, tous ces points doivent être comptés positivement dans l'intersection.*

C'est ce qui se passera, à l'intérieur de la quadrique complexe orientée naturellement, pour deux variétés *algébriques* à h et $n - h$ dimensions complexes plongées dans (Q).

10. Ces théorèmes rappelés, il est très facile de trouver, pour les homologies de (Q), une base formée de variétés *algébriques.*

---

[7]) Voir *L. van der Waerden,* Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie (Math. Ann., 102, 1929, p. 337—362).

Soit $h < \frac{n}{2}$; nous prendrons pour base des homologies d'ordre $2h$ une variété plane à h dimensions complexes $A^{(2h)}$ située tout entière dans (Q); nous prendrons pour base des homologies d'ordre $2n-2h$ la section $A^{(2n-2h)}$ de (Q) par une variété plane à $n-h+1$ dimensions complexes. Si ces variétés algébriques sont orientées naturellement, on aura en effet

$$A^{(2h)}.\, A^{(2n-2h)} = 1\,.$$

Le problème est ainsi complètement résolu pour n impair.

Soit maintenant n pair et $h = \frac{n}{2}$. On sait que (Q) admet alors deux familles continues distinctes de variétés planes génératrices à $\frac{n}{2}$ dimensions complexes. Posons pour un instant

$$x_1 + ix_2 = u_1\,,\quad x_3 + ix_4 = u_2, \ldots, x_{n+1} + ix_{n+2} = u_{\frac{n+2}{2}}\,,$$

$$x_1 - ix_2 = v_1\,,\quad x_3 - ix_4 = v_2, \ldots, x_{n+1} - ix_{n+2} = v_{\frac{n+2}{2}}\,,$$

de sorte que l'équation de (Q) se réduise à

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_{\frac{n+2}{2}} v_{\frac{n+2}{2}} = 0\,.$$

Désignons respectivement par $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ et $C^{(n)}$ les variétés

$$u_1 = 0\,,\quad u_2 = 0\,, \ldots, u_{\frac{n}{2}} = 0\,,\quad u_{\frac{n+2}{2}} = 0;$$

$$u_1 = 0\,,\quad u_2 = 0\,, \ldots, u_{\frac{n}{2}} = 0\,,\quad v_{\frac{n+2}{2}} = 0;$$

$$v_1 = 0\,,\quad v_2 = 0\,, \ldots, v_{\frac{n}{2}} = 0\,,\quad v_{\frac{n+2}{2}} = 0\,.$$

On a manifestement

$$A^{(n)}.\, C^{(n)} = 0\,,\quad B^{(n)}.\, C^{(n)} = 1\,,$$

égalités qui prouvent que $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ ne sont pas homologues. Or on démontre facilement que la variété qui se déduit de $A^{(n)}$ en remplaçant un nombre pair d'équations $u_k = 0$ par les équations correspondantes $v_k = 0$ appartient à la même famille continue que $A^{(n)}$. Si donc $\frac{n}{2}$ est pair, $C^{(n)}$ est homologue à $B^{(n)}$ et l'on a

$$A^{(n)}.\,B^{(n)} = 0\,, \quad A^{(n)}.\,A^{(n)} = B^{(n)}.\,B^{(n)} = 1\,.$$

Si au contraire n est impair, $C^{(n)}$ est homologue à $A^{(n)}$ et l'on a

$$A^{(n)}.\,B^{(n)} = 1\,, \quad A^{(n)}.\,A^{(n)} = B^{(n)}.\,B^{(n)} = 0\,.$$

Dans les deux cas, $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ constituent une base pour les homologies d'ordre n, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A^{(n)}.\,A^{(n)} & A^{(n)}.\,B^{(n)} \\ B^{(n)}.\,A^{(n)} & B^{(n)}.\,B^{(n)} \end{vmatrix}$$

étant égal à $(-1)^{\frac{n}{2}}$.

En revenant aux notations initiales, *nous pouvons prendre pour bases $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ des homologies d'ordre n les variétés planes*

$$(9)\quad \begin{cases} A^{(n)}\colon \quad x_1 + ix_2 = \ldots = x_{n-3} + ix_{n-2} = x_{n-1} + ix_n = \\ \qquad\qquad\qquad = x_{n+1} + ix_{n+2} = 0\,, \\ B^{(n)}\colon \quad x_1 - ix_2 = \ldots = x_{n-3} - ix_{n-2} = x_{n-1} + (-1)^{\frac{n}{2}}\, ix_n = \\ \qquad\qquad\qquad = x_{n+1} + ix_{n+2} = 0\,. \end{cases}$$

10. Toute variété algébrique V à h dimensions complexes plongée dans la quadrique (Q) satisfait à une homologie [8])

$$V \backsim mA^{(2h)} \qquad (2h \neq n);$$

l'entier *positif* m, *ordre* de la variété, est égal au nombre des points communs à V et $A^{(2n-2h)}$. Si $h = \frac{n}{2}$, on a

$$V \backsim mA^{(n)} + \mu B^{(n)};$$

la variété a *deux ordres* m et μ; si $\frac{n}{2}$ est pair, on a

$$m = V\,.\,A^{(n)}, \quad \mu = V\,.\,B^{(n)};$$

si $\frac{n}{2}$ est impair, on a

$$m = V\,.\,B^{(n)}, \quad \mu = V\,.\,A^{(n)}.$$

Si V et W sont deux variétés algébriques respectivement

---

[8]) Nous supposerons dans tout ce qui suit que toutes les variétés algébriques considérées sont orientées naturellement.

à h et $n-h$ dimensions complexes $\left(h \neq \frac{n}{2}\right)$, d'ordres respectifs m et m', le nombre de leurs points communs est mm', en vertu de l'égalité

$$V \,.\, W = mA^{(2h)} \,.\, m'A^{(2n-2h)} = mm' \,.$$

Si $h = \frac{n}{2}$, et si les ordres de V sont m et μ, si ceux de W sont m' et μ', on a

$$V \,.\, W = mm' + \mu\mu' \qquad \text{si } \frac{n}{2} \text{ est pair},$$

$$V \,.\, W = m\mu' + \mu m' \qquad \text{si } \frac{n}{2} \text{ est impair}.$$

11. On peut enfin considérer l'intersection de deux variétés fermées orientées telles que la somme de leurs dimensions $2h$ et $2k$ dépasse $2n$: on la définit en *Analysis situs* comme une variété fermée orientée à $2h+2k-2n$ dimensions. Si l'on a

$$V \backsim mA^{(2h)}, \quad W \backsim m'A^{(2k)},$$

on a

$$V \,.\, W \backsim mm'A^{(2h)} \,.\, A^{(2k)} \,.$$

Les variétés d'intersection des variétés algébriques de base se trouvent immédiatement. On a, en supposant d'abord $h+k \neq \frac{3n}{2}$,

(10) $$A^{(2h)} \,.\, A^{(2k)} \backsim A^{(2h+2k-2n)},$$

sauf si $h > \frac{n}{2}$, $k > \frac{n}{2}$, $h+k < \frac{3n}{2}$, auquel cas on a

(11) $$A^{(2h)} \,.\, A^{(2k)} \backsim 2A^{(2h+2k-2n)} \,.$$

On démontre cette dernière homologie en prouvant que la variété $A^{(4n-2h-2k)}$ coupe en deux points la variété commune à $A^{(2h)}$ et $A^{(2k)}$: il faut en effet chercher les points de (Q) qui sont communs à trois variétés planes à $h+1$, $k+1$ et $2n-h-k+1$ dimensions complexes, c'est à dire qui sont sur une droite donnée.

Si n est pair, on démontre facilement les formules

$$
(12) \quad \begin{cases} A^{(2h)} . A^{(2n-2h)} \sim A^{(n)} + B^{(n)} & \left(h > \frac{n}{2}\right), \\ A^{(n)} . A^{(2h)} \sim B^{(n)} . A^{(2h)} \sim A^{(2h-n)} & \left(h > \frac{n}{2}\right). \end{cases}
$$

Toutes ces formules permettent de calculer l'ordre ou les ordres de l'intersection de deux variétés algébriques plongées dans la quadrique, quand on connaît les ordres de ces variétés.

IV. Applications des théorèmes de G. de Rham.

12. On doit à G. de Rham [9]) des théorèmes remarquables dont nous allons indiquer l'énoncé.

Dans un espace clos orienté à ν *dimensions, on peut associer à chaque variété fermée orientée* V *à* $\nu - h$ *dimensions une intégrale de différentielle exacte* $\int \omega$ *de dégré* h, *de telle sorte que cette intégrale étendue à une variété fermée orientée quelconque* W *à* h *dimensions soit égale à* $V . W$. *De plus, si la somme des dimensions* $\nu - h$, $\nu - k$ *de deux variétés fermées orientées* V *et* V_1 *est supérieure à* ν, *le produit extérieur* $[\omega_1 \, \omega]$ *des éléments d'intégrale associés à* V *et* V_1 *est l'élement de l'intégrale* $\int \omega_1 \omega$ *associée à la variété d'intersection* $V . V_1$.

A l'espace total est associée la forme de degré 0 qui se réduit à la constante 1; à la variété à 0 dimension constituée par un point est associée une intégrale $\int \omega$ de degré n qui, étendue à tout l'espace orienté, a pour valeur 1.

Ici nous pouvons prendre pour les intégrales associées aux différentes variétés de base des homologies les invariants intégraux dont nous avons signalé l'existence, chacun d'eux étant multiplié par un facteur constant convenable.

Prenons d'abord $h = 2$; nous avons un invariant intégral dont l'élément différentiel se réduit, au point-origine, à

$$
dx_1 d\bar{x}_1 + dx_2 d\bar{x}_2 + \ldots + dx_n \, d\bar{x}_n .
$$

Cet élément differentiel est

$$
\omega = dx_1 d\bar{x}_1 + dx_2 d\bar{x}_2 + \ldots + dx_{n+2} d\bar{x}_{n+2} .
$$

---

[9]) Voir le mémoire cité [6]), Chap. III, p. 165—190.

Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer

1°. qu'il est effectivement invariant par toute transformation de G;

2°. qu'il ne change pas quand on multiplie les coordonnées normales par un même facteur $e^{i\theta}$, constant ou variable [10]).

En posant $x_k = \xi_k + i\eta_k$, on a, à un facteur constant près,

$$\omega = d\xi_1 d\eta_1 + d\xi_2 d\eta_2 + \ldots + d\xi_{n+2} d\eta_{n+2}.$$

Calculons la valeur de l'intégrale $\int\omega$ étendue à la droite $A^{(2)}$ d'équations

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = x_5 = x_6 = \ldots = x_{n+2} = 0.$$

Si l'on suppose, ce qui est permis, x_3 réel et positif, on aura

$$\xi_2 = -\eta_1, \quad \eta_2 = \xi_1, \quad \xi_4 = 0, \quad \eta_4 = \xi_3, \quad \xi_5 = \eta_5 = \ldots = 0,$$

avec

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_3^2 = 1.$$

Tout point de $A^{(2)}$ sera défini biunivoquement par les coordonnées rectangulaires ξ_1, η_1 d'un point intérieur au cercle-unité.

On a d'autre part

$$\omega = 2d\xi_1\, d\eta_1,$$

d'où

$$\int\omega = 2\pi.$$

Nous prendrons donc comme invariant intégral associé à $A^{(2n-2)}$ *l'intégrale*

$$\begin{aligned}\int\Omega &= \frac{1}{2\pi}\int d\xi_1 d\eta_1 + d\xi_2 d\eta_2 + \ldots + d\xi_{n+2} d\eta_{n+2} = \\ &= \frac{i}{4\pi}\int dx_1 d\bar{x}_1 + \ldots + dx_{n+2} d\bar{x}_{n+2}.\end{aligned} \tag{13}$$

Il en résulte immédiatement, d'après les relations (10) et (11), que *l'invariant intégral associé à* $A^{(2n-2h)}$, *pour* $h \neq \frac{n}{2}$, *est* $\int\Omega^h$ *si* $h < \frac{n}{2}$, *et* $\frac{1}{2}\int\Omega^h$ *si* $h > \frac{n}{2}$.

---

[10]) Voir, par exemple, *E. Cartan*, loc. cit. [3]), № 214, p. 287—288.

Pour $h=\frac{n}{2}$ la formule (12) montre que *l'invariant intégral* $\int \Omega^{\frac{n}{2}}$ *est associé à la variété* $A^{(n)}+B^{(n)}$.

13. Il nous reste à déterminer l'invariant intégral associé à $A^{(n)}-B^{(n)}$. Partons pour cela de la forme (8). Considérons la forme différentielle

$$\varpi=\sum (x_{i_{n+1}}\bar{x}_{i_{n+2}}-x_{i_{n+2}}\bar{x}_{i_{n+1}})\,\{dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_n}\},$$

la somme étant étendue à tous les couples de combinaisons $(i_1\, i_2 \dots i_n)$, $(i_{n+1}\, i_{n+2})$, tels que la permutation $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ soit paire; on a désigné par le symbole $\{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \dots dx_{i_n}\}$ la somme de tous les produits extérieurs obtenus en remplaçant $\frac{n}{2}$ des différentielles par leurs conjuguées. Au point-origine, la forme ϖ se réduit, à un facteur près, à la forme (8). Il est facile de voir:

1° qu'elle est invariante par toute transformation de G;

2° qu'elle ne change pas si on multiplie toutes les coordonnées, supposées normales, par un même facteur $e^{i\theta}$.

L'intégrale $\int\varpi$ est donc associée à une variété fermée orientée d'ordre n. Etendue à $A^{(n)}$ et à $B^{(n)}$, elle a des valeurs égales et opposées, car d'après (9) on passe de l'une des intégrales à l'autre en donnant à $x_1, x_3, \dots, x_{n+1}$ les mêmes valeurs, mais en changeant de signe un nombre impair de coordonnées $x_2, x_4, \dots$, à savoir $x_2, x_4, \dots, x_{n-2}$ pour $\frac{n}{2}$ pair, et $x_2, x_4, \dots, x_n$ pour $\frac{n}{2}$ impair. Il résulte de là que l'intégrale $\int\varpi$ est associée à un multiple de $A^{(n)}-B^{(n)}$.

Pour avoir l'invariant intégral $\int\Pi$ associé à $A^{(n)}-B^{(n)}$, il faut multiplier ϖ par un facteur tel que l'intégrale obtenue étendue à $A^{(n)}$ soit égale à

$$A^{(n)}.\,(A^{(n)}-B^{(n)})=(-1)^{\frac{n}{2}};$$

autrement dit il faut que l'intégrale $\int\Pi$ et l'intégrale $\int(-1)^{\frac{n}{2}}\Omega^{\frac{n}{2}}$ aient la même valeur, étendues à $A^{(n)}$.

Si nous nous reportons au voisinage d'un point de (Q), par exemple au voisinage du point-origine, nous avons

$$\Omega = \frac{i}{2\pi}\left[dx_1 d\bar{x}_1 + dx_3 d\bar{x}_3 + \ldots + dx_{n-1} d\bar{x}_{n-1}\right],$$

$$\Omega^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, dx_1 d\bar{x}_1 dx_3 d\bar{x}_3 \ldots dx_{n-1} d\bar{x}_{n-1}\,.$$

D'autre part on a, dans les mêmes conditions,

$$\begin{aligned}\varpi = -2i\,\{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\} &= -2i\,(dx_1\, d\bar{x}_2 + d\bar{x}_1\, dx_2)\,(dx_3 d\bar{x}_4 + \\ &\qquad + d\bar{x}_3\, dx_4) \ldots \\ &= (-2i)^{\frac{n}{2}+1} dx_1 d\bar{x}_1\, dx_3\, d\bar{x}_3 \ldots dx_{n-1}\, d\bar{x}_{n-1}\,.\end{aligned}$$

Nous prendrons donc

$$(14) \qquad \Pi = \frac{i}{2} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum \left(x_{i_{n+1}} \bar{x}_{i_{n+2}} - x_{i_{n+2}} \bar{x}_{i_{n+1}}\right) \{dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_n}\},$$

et $\int \Pi$ *est l'invariant intégral associé à* $A^{(n)} - B^{(n)}$.

14. Nous allons déduire des résultats précédents des conséquences curieuses. D'après ce qui a été vu au n^0 12, l'invariant intégral associé á $A^{(n)}$ est $\frac{1}{2}\int \Omega^n$, de sorte que l'intégrale $\int \Omega^n$, étendue à toute la quadrique orientée, est égale à 2. Nous pouvons supposer que la coordonnée normale x_{n+2} d'un point de (Q) est réelle et positive, de sorte que les relations (3) conduisent aux formules

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n+1}^2 \leqslant 1\,,$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{n+1}^2 = 1\,,$$

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_{n+1} \eta_{n+1} = 0\,:$$

il y a une correspondance biunivoque entre les points de (Q) et les couples de points réels (ξ), (η) de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, le point (η) décrivant la surface de l'hypersphère de rayon 1 et le point (ξ) l'intérieur de cette hypersphère, de telle sorte que ces deux points soient constamment vus de l'origine sous un angle droit. Par une transformation de G, les points (ξ) et (η) subissent une même rotation, et d'autre part l'élément d'intégrale Ω^n est invariant: on peut donc, pour calculer l'intégrale, se placer au voisinage du point particulier $(\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0\,, \ \ \eta_{n+1} = 1)$ de l'hypersphère; comme on a alors $\xi_{n+1} = 0$, et

$$\Omega^n = \frac{n!}{(2\pi)^n}\, d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \ldots d\xi_n\, d\eta_n\,,$$

on obtient le produit par $\frac{n!}{(2\pi)^n}$ du volume V_n de hypersphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions, hyperspère décrite par le point (ξ), par l'élément de surface de l'hypersphère de l'espace à $(n+1)$ dimensions. Comme la surface totale de cette hypersphère est égale à $(n+1)\ V_{n+1}$, on a

$$\int \Omega^n = \frac{(n+1)!}{(2\pi)^n}\, V_n\, V_{n+1} = 2\,,$$

d'où

$$V_n\, V_{n+1} = \frac{2\,(2\pi)^n}{(n+1)!}\,.$$

Cette formule permet de calculer V_n de proche en proche en partant des valeurs $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$; en se servant de la relation évidente

$$\frac{V_{n+1}}{V_{n-1}} = \frac{2\pi}{n+1}\,,$$

on retrouve les formules connues

$$V_{2p+1} = \frac{2\,(2\pi)^p}{3\,.\,5 \ldots (2p+1)}\,, \qquad V_{2p} = \frac{(2\pi)^p}{2\,.\,4 \ldots 2p} = \frac{\pi^p}{p!}\,. \tag{15}$$

15. Comme autre application, considérons une quadrique *réelle* non dégénérée Σ à n dimensions: c'est une variété fermée plongée dans la quadrique complexe (Q) correspondante. Si n est impair, cette quadrique réelle, *dans le cas où elle est orientable* , est homologue à zéro; elle n'est du reste orientable que si la premier membre de son équation est réductible à une somme de $n+1$ carrés positifs et 1 carré négatif.

Si n est pair, la quadrique réelle est toujours orientable parce que, plongée dans l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions, *qui est orientable*, elle est *bilatère*, puisqu'elle partage cet espace en deux régions distinctes.

Comme la quadrique réelle peut, au besoin par une homographie, être obtenue en donnant à un certain nombre des coordonnées normales x_k des valeurs réelles et aux autres des valeurs purement imaginaires, la forme Ω est identiquement nulle sur cette quadrique; l'intégrale $\int \Omega^{\frac{n}{2}}$ étendue à la quadrique réelle est donc nulle, autrement dit on a

$$A^{(n)}.\Sigma + B^{(n)}.\Sigma = 0,$$

d'où

$$\Sigma \backsim m\,(A^{(n)} - B^{(n)})\,.$$

On a la valeur de m en cherchant les points communs à $A^{(n)}$ et Σ. Prenons l'équation de Σ sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{r+1}^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_{s+1}^2 = 0 \quad (r+s=n)\,,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ sont réels et où l'on a posé

$$x_{r+k+1} = iy_k\,.$$

Comme les équations de $A^{(n)}$ sont

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \ldots = x_{n+1} + ix_{n+2} = 0\,,$$

on voit que si r et s sont impairs, les deux variétés n'ont aucun point commun; si au contraire r et s sont pairs, elles ont un point commun et un seul.

Théorème. — *Toute quadrique réelle obtenue en annulant une forme quadratique réductible à un nombre pair de carrés positifs et à un nombre pair de carrés négatifs est homologue à zéro à l'intérieur de la quadrique complexe correspondante. Si la forme quadratique est réductible à un nombre impair de carrés positifs et à un nombre impair de carrés négatifs, la quadrique réelle est, à l'intérieur de la quadrique complexe correspondante, homologue à la différence de deux variétés planes génératrices de systémes différents de cette quadrique complexe.*

16. Plaçons-nous dans le dernier cas et prenons l'équation de Σ sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2p}^2 - y_1^2 - \ldots - y_{2q}^2 + x_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 = 0$$

$$(p+q=\frac{n}{2}, \quad p \geqq q).$$

On a, en coordonnées normales,

$$(16) \qquad \begin{aligned} x_1^2+\ldots+x_{2p}^2+x_{n+1}^2 &= 1, \\ y_1^2+\ldots+y_{2q}^2+y_{n+2}^2 &= 1; \end{aligned}$$

il y a donc une correspondance entre les points de Σ et les couples de points des surfaces de deux hypersphères de rayon 1 dans les espaces à $2p+1$ et $2q+1$ dimensions; mais il faut remarquer qu'un point de Σ correspond à deux couples de points diamétralement opposés des deux hypersurfaces.

Plaçons-nous au point $(x_1 = \ldots = x_{2p} = 0, \ x_{n+1} = 1; \ y_1 = \ldots = y_{2q} = 0, \ y_{n+2} = 1)$. Nous orienterons Σ en convenant de regarder comme positif l'élément d'intégrale $dx_1 \ldots dx_{2p} dy_1 \ldots \ldots dy_{2q}$ au voisinage de ce point. Les procédés de *l'Analysis situs* montrent qu'on a alors

$$\Sigma \backsim (-1)^{\frac{n}{2}}(A^{(n)}-B^{(n)}).$$

Cette formule montre que l'intégrale $\int \Pi$ étendue à Σ est égale à 2; si donc on l'étend à tous les systèmes de valeurs satisfaisant aux relations (16), on doit trouver 4. Or au voisinage du point $(0, \ldots, 0, 1)$ de la première hypersphère et du point $(0, \ldots, 0, 1)$ de la seconde, on a, d'après (14),

$$\Pi = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \{ dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \};$$

en remplaçant $dx_{2p+1}, \ldots, dx_n$ par $i dy_1, \ldots, i dy_{2q}$, nous trouvons

$$\{ dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \} = (-1)^q \, [C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^1 \, C_{2p}^{p-q+1} + C_{2q}^2 \, C_{2p}^{p-q+2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{2p}^{p+q}] \, [dx_1 \ldots dx_{2p} \, dy_1 \ldots dy_{2q}].$$

On a donc, en remarquant que les surfaces des deux hypersphères sont $(2p+1)\, V_{2p+1}$ et $(2q+1)\, V_{2q+1}$, la formule

$$(-1)^q \frac{(p+q)!}{(4\pi)^{p+q}} \, [C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^1 \, C_{2p}^{p-q+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{2p}^{p+q}] \, (2p+1)\, V_{2p+1} \, (2q+1)\, V_{2q+1} = 4.$$

Appliquons maintenant la première formule (15); nous en déduisons

$$(17)\qquad \begin{aligned} &C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^{1}\, C_{2p}^{p-q+1} + \ldots + C_{2p}^{p+q} = \\ &= (-1)^q\, 2^{p+q}\, \frac{1.3\ldots(2p-1)\times 1.3\ldots(2q-1)}{(p+q)!}\,. \end{aligned}$$

Cette formule arithmétique, où on a supposé $p \geqslant q$, peut se vérifier de la manière suivante. Le premier membre est le coefficient de t^{p+q} dans le développement du polynome $(t+1)^{2p}$ $(t-1)^{2q}$, ou encore le résidu relatif au pôle $t=0$ de la fonction $\frac{(t+1)^{2p}(t-1)^{2q}}{t^{p+q+1}}$. En calculant ce résidu au moyen d'une intégrale étendue au cercle de rayon 1 de centre $t=0$, on trouve qu'il est égal à

$$(-1)^q\, 2^{p+q}\, \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, \sin^{2q}\theta\, d\theta\,.$$

On en déduit donc, par comparaison avec (17), la formule connue

$$(18)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, \sin^{2q}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\, \frac{1.3\ldots(2p-1)\times 1.3\ldots(2q-1)}{2.4\ldots(2p+2q)}\,.$$

V. Remarques finales.

17. Le cas $n=6$ est particulièrement intéressant, car il y a correspondance biunivoque entre les points de (Q) et les droites complexes de l'espace à trois dimensions. La variété $A^{(2)}$ correspond au faisceau plan de droites, la variété $A^{(6)}$ au complexe linéaire, les variétés $A^{(4)}$ et $B^{(4)}$ aux congruences des droites issues d'un point fixe et des droites situés dans un plan fixe.

On peut encore remarquer que la quadrique complexe (Q) est homéomorphe à la variété des droites orientées *réelles* de l'espace projectif à $n+1$ dimensions. En effet si l'on regarde dans l'équation (1) les x_k comme des coordonnées réelles, tout point M de (Q) est imaginaire et détermine univoquement la droite réelle Δ qui le joint à son conjugué; on *oriente* la droite Δ en choisissant celui des deux points imaginaires où elle coupe

(Q). Les variétés $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$, pour n pair, correspondent aux deux espèces de *congrue:ıces paratactiques* orientdes de l'espace elliptique à un nombre impair de dimensions. Aux variétés algébriques de (Q) correspondent des classes spéciales de variétés réglées algébriques.

On peut enfin remarquer que la quadrique complexe de l'espace à quatre dimensions est homéomorphe à la variété des *cycles* réels de l'espase conforme à trois dimensions.