Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires.

Par

TADYA PEYOVITCH.

M. O. Perron [1]) et H. Späth [2]) ont étudié à un point de vue les solutions asymptotiques d'une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + a_n(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2(t) \frac{dx}{dt} + a_1(t)\, x = f(t)$$

où $a_i(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, $\lim\limits_{t=\infty} a_i(t) = a_i$; $f(t)$ étant une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend également vers une limite finie, $\lim\limits_{t=\infty} f(t) = b$.

Dans ce Mémoire nous nous occuperons du même point de vue des solutions asymptotiques d'un système d'équations linéaires du premier ordre

$$\frac{dx_i}{dt} + a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{in}(t)\, x_n = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $a_{ik}(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, $\lim\limits_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik}$; $f_i(t)$ étant des fonctions continues de la variable

---

1) *Mathematische Zeitschrift*, B. 6 (1920) et B. 17 (1923).
2) *Mathematische Zeitschrift*, B. 30 (1929).

réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent également vers des limites finies, $\lim\limits_{t=\infty} f_i(t) = b_i$. Enfin, nons retrouvons les résultats de H. Späth concernant l'équation (1), qui peuvent être considérés comme un cas particulier de nos résultats [1]).

I. Système d'équations à coefficients constants.

Considérons d'abord avec H. Späth l'expression [2])

$$u(t) = e^{rt}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C\right], \tag{2}$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend vers zéro pour $t = \infty$ et C la constante d'intégration.

Cherchons la valeur de l'expression (2) pour $t = \infty$.

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. r est un nombre réel et positif ($r > 0$).

L'expression (2) devient

$$\lim_{t=\infty} u(t) = \lim_{t=\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C}{e^{-rt}}.$$

Puisque le dénominateur tend vers zéro, cette expression peut tendre vers une limite, si le numérateur tend vers zéro. Mais on peut disposer de la constante C de sorte que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = 0.$$

La dernière égalité peut être écrite sous la forme

1) La question des solutions asymptotiques des équations différentielles a fait l'objet de travaux de plusieurs Mathématiciens comme Poincaré, Liapounoff, Bohl, Cotton, Perron et autres

2) Cette expression est la solution générale de l'équation

$$\frac{du}{dt} - ru = \varphi(t).$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = \int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + \int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = 0$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = -\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,;$$

par conséquent, l'expression (2) devient,

$$u(t) = -e^{rt}\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,.$$

En appliquant la règle de L'Hospital, on aura

$$\lim_{t=\infty} u(t) = -\lim_{t=\infty}\frac{\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt}{e^{-rt}} = -\lim_{\infty}\frac{e^{-rt}\varphi(t)}{re^{-rt}} = 0\,,$$

c'est-à-dire *il existe une constante* $C = C_1$ *de sorte que l'expression (2) tend vers zéro.*

2. r est un nombre réel et négatif $(r < 0)$.

En appliquant la règle de Stolz à l'expression (2), car le dénominateur tend vers l'infini pour $t = \infty$, on aura

$$\lim_{t=\infty} u(t) = \lim_{t=\infty}\frac{\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C}{e^{-rt}} = \lim_{t=\infty}\frac{e^{-rt}\varphi(t)}{-re^{-rt}} = 0\,,$$

c'est-à-dire *l'expression (2) tend vers zéro, C étant arbitraire.*

On peut alors disposer de la constante C de manière que l'expression (2) prenne une valeur quelconque pour $t = t_0$. Remarquons que la constante arbitraire peut être écrite sous la forme

$$C\int_{t_0}^{t_1} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,.$$

3. $r=\varrho+\vartheta i$ est un nombre complexe à partie réelle $\varrho>0$.

On aura

$$|u(t)|=e^{\rho t}\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|$$

d'où

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|}{e^{-\rho t}}.$$

En appliquant la règle de L'Hospital, le dénominateur tendant vers zéro pour $t=\infty$, tandis que l'intégrale au numérateur converge, on aura,

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{|e^{-rt}\varphi(t)|}{\varrho e^{-\rho t}}=0\ ,$$

c'est-à-dire: *il existe une constante $C=C_1$ de sorte que l'expression (2) tend vers zéro.*

Comme au premier cas, la solution qui tend vers zéro est de la forme

$$u(t)=-e^{rt}\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt \qquad (r=\varrho+\vartheta i)\,.$$

4. $r=\varrho+\vartheta i$ est un nombre complexe à partie réelle $\varrho<0$.

On aura, comme au cas précédent,

$$|u(t)|=e^{\rho t}\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|$$

d'où

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|}{e^{-\rho t}}.$$

Puisque le dénominateur tend vers l'infini, on aura, d'après la règle de Stolz,

$$\lim_{t=\infty} |u(t)| = \lim_{t=\infty} \frac{\left| \int_{t_0}^{t} e^{-rt} \varphi(t)\, dt + C \right|}{e^{-\rho t}} = \lim_{t=\infty} \frac{|e^{-rt}\varphi(t)|}{\varrho e^{-\rho t}} = 0,$$

c'est-à-dire: *l'expression (2) tend vers zéro, C étant arbitraire.*

Comme au deuxième cas, on peut alors disposer de la constante C, qui peut être écrite sous la forme

$$C \int_{t_0}^{t_1} e^{-rt} \varphi(t)\, dt\,,$$

de sorte que l'expression (2) prend une valeur quelconque pour $t = t_0$.

5. $r = \vartheta i$ est un nombre imaginaire ou égal à zéro (*avec* $\vartheta i = 0$).

Pour que l'expression (2) tende vers zéro pour $t = \infty$, $C = C_1$ *étant une constante convenable,* il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} |u(t)| = \lim_{t=\infty} \left| e^{\vartheta i t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + C_1 \right] \right| =$$

$$= \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + C_1 \right| = 0,$$

c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt \tag{3}$$

converge (avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$). En supposant que cette intégrale converge, l'expression (2) tend vers zéro, $C = C_1$ étant une constante convenable. Si l'intégrale (3) converge, on peut écrire,

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + C_1 = \int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + \int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + C_1 = 0$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt + C_1 = -\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt$$

et *la solution, qui tend vers zéro, est de la forme*

$$u(t) = -e^{\vartheta i t} \int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi(t)\, dt$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$).

Par conséquent, si r est un nombre réel différent de zéro ou complexe à partie réelle différente de zéro, *il existe une constante $C = C_1$ de sorte que l'expression (2) tende vers zéro pour $t = \infty$. Si $r = \vartheta i$, l'expression (2) tendra vers zéro, si l'intégral (3) converge* (avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$) [1].

Cela posé, considérons un système d'équations

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{dt} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où a_{ik} sont des constantes, $f_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, lorsque t augmente indéfiniment

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Changeons les fonctions

$$(5) \qquad x_i = y_i + A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où A_i sont les solutions des équations

$$(6) \qquad a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + \ldots + a_{in} A_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations (4) deviennent

$$(7) \qquad \frac{dy_i}{dt} + a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n = f_i(t) - b_i = \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) - b_i = \lim_{t=\infty} \psi_i(t) = 0.$$

---

[1]) Dans tous les cas les solutions convergentes $\lim_{t=\infty} u(t) = 0$ de l'expression (2) admettent les dérivées qui tendent vers zéro, $\lim_{t=\infty} u'(t) = 0$.

Il est bien connu que l'on peut transformer les équations (7), par une substitution linéaire à coefficients constants et convenablement choisis

$$(8) \qquad u_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n ,$$

dont le déterminant est différent de zéro, à la forme spéciale

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} - r_1 u_1 = \varphi_1(t), \\ \dfrac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r_2 u_2 = \varphi_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dt} - c_{n1} u_1 - c_{n2} u_2 - \ldots - c_{n\,n-1} u_{n-1} - r_n u_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+r & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+r & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+r \end{vmatrix} = 0,$$

qui peuvent être rangées d'une manière quelconque; c_{ik} $(k < i)$ étant des constantes déterminées et

$$(10') \quad \varphi_i(t) = b_{i1}\psi_1(t) + b_{i2}\psi_2(t) + \ldots + b_{in}\psi_n(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers zéro [1]).

---

[1]) D'après la nature des racines de l'équation caractéristique (10), il faut distinguer deux cas:

1⁰. Le cas des racines inégales; on peut choisir les coefficients b_{ik} de manière que les équations transformées prennent la forme simple

$$(a) \qquad \frac{du_i}{dt} - r_i u_i = \varphi_i(t).$$

2⁰. Le cas des racines multiples; on peut choisir les coefficients b_{ik} de manière que les équations transformées se partagent en un certain nombre de groupes d'équations ayant une forme simple. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\frac{du_1}{dt} - r u_1 = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r u_2 = \varphi_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du_k}{dt} - c_{k1} u_1 - c_{k2} u_2 - \ldots - c_{k\,k-1} u_{k-1} - r u_k = \varphi_k(t).$$

Les intégrales générales des équations (9) sont données par les formules

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1 &= e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right],\\
u_2 &= e^{r_2 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1(t)\,dt + C_2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= e^{r_n t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}\varphi_n(t)\,dt + c_{n1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_1(t)\,dt + \ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots + c_{n\,n-1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_{n-1}(t)\,dt + C_n\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Soit, par exemple, $r = a$ une racine multiple d'ordre k, $r_1 = r_2 = \ldots$ $\ldots = r_k = a$, on aura,

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right],\\
u_2 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + C_2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_k &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_k(t)\,dt + c_{k1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + \ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots + c_{k\,k-1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_{k-1}(t)\,dt + C_k\right].
\end{aligned}
\right.
$$ [1]

[1] A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'intégrales de la forme (12).

Il est évident que les intégrales générales (11) et (12) sont de la forme (2).

Supposons d'abord que toutes les racines r_i de l'équation caractéristique (10) soient réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro. On peut alors disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que les intégrales (11) admettent un système de solutions qui tendent vers zéro, c'est-à-dire on aura, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1} \right| ,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_2(t)}{r_2} \right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left| \frac{u_1(t)}{r_2} \right| ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1} \right| = 0 ,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_2(t)}{r_2} \right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2} \right| = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il s'ensuit, d'après les transformations (8) et (5), que les équations (4) admettent un système de solutions, dont les valeurs asymptotiques A_i sont données par les équations (6) et, par conséquent, leurs dérivées tendent vers zéro,

$$\text{(13)} \qquad \lim_{t=\infty} x_i = A_i , \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Puisque dans les solutions u_i, qui tendent vers zéro, figurent encore les constantes arbitraires C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on peut, d'après l'expression [(2) 2., 4.], disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ de sorte que l'on ait, pour le même système de solutions

$$\text{(14)} \qquad x_i(t_0) = A_i \text{ [1]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) .$$

[1] Les valeurs $x_i(t_0)$ peuvent être quelconques, parce que les constantes arbitraires C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ peuvent être choisies de sorte que les solutions $x_i(t_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, d'après les transformations (8) et (5), prennent des valeurs quelconques.

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont réelles, négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident, d'après l'expression [(2), 2., 4.], que les intégrales générales des équations (4) admettent les propriétés (13). Dans ce cas, on peut déterminer les constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que les équations (4) admettent un système de solutions qui satisfont aux relations (13) et (14) avec $p = n$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (10), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro. On peut alors disposer des constantes C_i de manière que les équations (4) admettent un système de solutions, qui satisfont aux relations (13) et (14), si, d'après (12), pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, un groupe d'intégrales de la forme

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_p(t)\, dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, l), \\ &\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_k(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, l-1) \end{aligned} \right.$$

converge; pour $l = 1$ les intégrales ci-dessus deviennent, d'après (a), $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt$.

Mais dans le cas de racines égales à zéro, on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Pour que les équations (4) admettent un système de solutions asymptotiques finies A_i, données par les équations (6), il faut et il suffit, à cause de $\Delta = 0$, que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ce cas, il est facile de voir, qu'il existe un système de solutions des équations (4), qui satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i = 0\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$x_i\,(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Il faut remarquer que les intégrales (15) peuvent être écrites sous une autre forme. En supposant que les intégrales (15) convergent, pour une racine multiple d'ordre l, on peut disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ de manière que les solutions (12), pour cette racine multiple, tendent vers zéro. Mais, les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$u_1 = -e^{\vartheta_i t} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta_i t} \varphi_1(t)\, dt\,,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta_i t} \left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta_i t} \varphi_2(t)\, dt + c_{21} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta_i t} u_1(t)\, dt \right],$$

. . . .

d'où

$$u_1 = -e^{\vartheta_i t} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta_i t} \varphi_1(t)\, dt\,,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta_i t} \left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta_i t} \varphi_2(t)\, dt - c_{21} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta_i t_2} \varphi_1(t_2)\, dt_2 \right],$$

. . . .

Puisque les solutions ci-dessus tendent vers zéro, les intégrales, qui doivent être convergentes et qui remplacent les intégrales (15), sont

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta_i t} \varphi_1(t)\, dt\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta_i t_2} \varphi_1(t_2)\, dt_2\,, \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta_i t_l}\, \varphi_1(t_l)\, dt_l\,,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_2(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2} \varphi_2(t_2)\, dt_2, \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-2}}^{\infty} e^{-\vartheta i t_{l-1}} \varphi_2(t_{l-1})\, dt_{l-1},$$

. . . .

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_l(t)\, dt,$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour cette racine égale à zéro).

Il faut remarquer que les intégrales ci-dessus se réduisent, d'après (10'), aux intégrales

$$\tag{16} \begin{gathered} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \psi_k(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2} \psi_k(t_2)\, dt_2, \ldots \\ \ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta i t_l} \psi_k(t_l)\, dt_l \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i = 0$) et à chaque racine multiple d'orde l correspondront les intégrales (16), qui doivent êrte convergentes.

Par conséquent nous avons le théorème suivant:

I. Soit donné un système d'équations

$$\tag{4} \frac{dx_i}{dt} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où a_{ik} sont des constantes et $f_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui satisfont aux conditions

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont *différentes de zéro* ($\Delta \neq 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure d'ordre l, les intégrales* (16) *convergent, les équations* (4) *admettent un système de solutions, qui satisfont aux relations*

$$(13) \qquad \lim_{t=\infty} x_i = A_i\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(14) \qquad x_i\,(t_0) = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où les solutions asymptotiques A_i *sont données par les équations*

$$(6) \qquad a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + \ldots + a_{in} A_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (10), *en dehors des racines citées plus haut, possède des racines égales à zéro* ($\Delta = 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro,* $\vartheta i = 0$*), d'ordre l, les intégrales* (16) *sont convergentes, les équations* (4) *admettent alors un système de solutions asymptotiques finies, si l'on a en plus*

$$\lim_{t=\infty} f_i\,(t) = b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ce cas, il existe un système de solutions satisfaisant aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i = 0\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$x_i\,(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, les intégrales générales des équations* (4) *admettent les propriétés* (13). *Dans ce cas, il existe un système de solutions, satisfaisant aux relations* (13) *et* (14) *pour* $p = n$ [1]).

---

[1]) Les résultats, contenus dans ce théorème concernant les racines inégales de l'équation caractéristique (10), ont déjà été obtenus par moi-même d'une manière un peu différente *(Bulletin de la société des Sciences de Cluj (Roumanie), t-V, 1-re partie. 1930).*

II. Système d'équations à coefficients variables.

Considérons le système d'équations

$$(17) \quad \frac{dx_i}{dt} + a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{in}(t)\, x_n = f_i\, (t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$a_{ik}(t)$ et $f_i\,(t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies

$$(18) \quad \lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik}, \qquad \lim_{t=\infty} f_i\,(t) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ecrivons les équations (17) sous la forme

$$(19) \quad \frac{dx_i}{dt} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = f_i\,(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, x_k$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$(20) \quad \delta_{ik}(t) = a_{ik} - a_{ik}(t), \quad \lim_{t=\infty} \delta_{ik}(t) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et résolvons les équations (19) par la méthode des approximations successives.

Soit, pour, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\overline{x}_i = x_i^0$ un système de solutions bornées des équations à coefficients constants

$$(21) \quad \frac{d\overline{x}_i}{dt} + a_{i1}\overline{x}_1 + a_{i2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n = f_i\,(t),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont les valeurs asymptotiques sont bornées.

En partant du système x_i^0 de solutions des équations (21), on peut déterminer les suites des fonctions

$$x_i^1,\ x_i^2, \ldots, x_i^m, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dx_i^m}{dt} + a_{i1} x_1^m + a_{i2} x_2^m + \ldots + a_{in} x_n^m = f_i\,(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\,(t)\, x_k^{m-1}$$

ou, en posant

$$(22) \qquad y_i^0 = x_i^0, \quad y_i^1 = x_i^1 - x_i^0, \ldots, y_i^m = x_i^m - x_i^{m-1}, \ldots,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient des fonctions y_i^m $(m = 1, 2 \ldots)$ comme les solutions successives des équations

$$(23) \qquad \frac{dy_i^m}{dt} + a_{i1} y_1^m + a_{i2} y_2^m + \ldots + a_{in} y_n^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, y_k^{m-1}$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Les suites (22) donnent les séries

$$(24) \quad x_i = \lim_{m=\infty} x_i^m = y_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = \overline{x}_i + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m.$$

Si les séries ci-dessus convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, elles représentent les solutions des équations (17), qui satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i^{(k)} = \lim_{t=\infty} \overline{x}_i^{(k)} \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour cela, faisons une substitution linéaire

$$(25) \qquad u_i^m = b_{i1} y_1^m + b_{i2} y_2^m + \ldots + b_{in} y_n^m$$

et choisissons les coefficients b_{ik}, dont le déterminant est différent de zéro, de manière que les équations (23) prennent la forme

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_1^m}{dt} - r_1 u_1^m = \varphi_1(t), \\ \dfrac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - r_2 u_2^m = \varphi_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique (10), c_{ik} $(k < i)$ des constantes déterminées et

$$(27) \qquad \varphi_i(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t)\, y_k^{m-1} + b_{i2} \sum_{k=1}^{n} \delta_{2k}(t)\, y_k^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t)\, y_k^{m-1}$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Les intégrales générales des équations (26) sont données par les formules

$$
(28)\quad \begin{cases}
u_1^m = e^{r_1 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1^m\right], \\
u_2^m = e^{r_2 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Il faut résoudre les équations ci-dessus en posant successivement $m = 1, 2, \dots$

Supposons d'abord que toutes les racines r_i de l'équation caractéristique (10) soient réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro. On peut alors disposer des constantes C_i^m $(i = 1, 2, \dots, n)$ de manière à avoir, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$
\lim_{t=\infty} |u_1^m| = \lim_{t=\infty}\left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|,
$$

$$
\lim_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim_{t=\infty}\left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty}\left|\frac{u_1^m}{r_2}\right|,
$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où

$$
(29)\quad \begin{cases}
\lim\limits_{t=\infty} |u_1^m| = \lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|, \\
\lim\limits_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right|, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Mais, dans les solutions u_i^m, figurent encore p constantes arbitraires, où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. On peut alors disposer des constantes C_i^m $(i = 1, 2, \dots, p)$ et obtenir, à cause des transformations (25),

$$
y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, p).
$$

En choisissant de cette manière les constantes $C_i^m(i = 1,$

2, . . . , p), les solutions successives u_i^m, c'est-à-dire les solutions $y_i^m (i = 1, 2, \ldots, n)$ dépendront uniquement des fonctions $\varphi_i(t)$ [1]).

---

[1]) Considérons, par exemple, deux équations à deux inconnues et soit r_1 une racine réelle positive ou complexe à partie réelle positive, et r_2 une racine réelle négative ou complexe à partie réelle négative. Les solutions, qui peuvent tendre vers une limite pour $t = \infty$, sont, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$
\text{(b)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
u_1^m &= -e^{r_1 t} \int_t^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt, \\
u_2^m &= e^{r_2 t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} \varphi_2(t)\, dt + C_2^m \right]
\end{aligned}
\right.
$$

et les fonctions $y_i^m (i = 1, 2)$ sont données, d'après (25), par les formules

$$
\begin{aligned}
y_1^m &= \alpha_{11} u_1^m + \alpha_{12} u_2^m, \\
y_2^m &= \alpha_{21} u_1^m + \alpha_{22} u_2^m.
\end{aligned}
$$

Puisque la constante C_2^m est arbitraire, elle peut être déterminée pour que l'on ai

$$y_1^m(t_0) = 0 = \alpha_{11} u_1^m(t_0) + \alpha_{12} u_2^m(t_0)$$

ou, d'après (b),

$$0 = -\alpha_{11} e^{r_1 t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt + \alpha_{12} C_2^m e^{r_2 t_0},$$

c'est-à-dire, la constante C_2^m, dépend de la fonction $\varphi_1(t)$. Par conséquent, ies solutions u_i^m et, par suite, les solutions y_i^m dépendent seulement des fonctions $\varphi_i(t)$.

Remarquons encore que les constantes arbitraires C_i^m $(i = 1, 2, \ldots, p)$ peuvent être écrites sous la forme

$$C_i^m = C_i \int_{t_0}^{t_1} e^{r_i t} \varphi_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où C_i sont des constantes arbitraires et r_i les racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. Cela veut dire que l'on peut faire les majorations successives des fonctions u_i^m, c'est-à-dire des fonctions y_i^m, laissant les constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ arbitraires; enfin, elles peuvent être déterminées de sorte que l'on ait $y_i^m(t_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Posons maintenant $m=1$; on aura, d'après les inégalités supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

pour les relations (27)

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\,\delta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

où

$$(29') \qquad \delta_i(t) = |b_{i1}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{1k}(t)| + |b_{i2}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{2k}(t)| + \ldots$$
$$\ldots + |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{nk}(t)|$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \delta_i(t) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

à cause de relations (20). Il s'ensuit que les inégalités (29) pour $m=1$ deviennent

$$\lim_{t=\infty} |u_1^1| \leqslant C \lim_{t=\infty} \frac{\delta_1(t)}{|r_1|} = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2^1| \leqslant C \left[\lim_{t=\infty} \frac{\delta_2(t)}{|r_2|} + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \frac{\delta_1(t)}{|r_1 r_2|} \right] = 0$$

. . . .

d'où, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0.$$

Les transformations (25), qui peuvent être écrites sous la forme

$$(30) \qquad y_i^m = \alpha_{i1} u_1^m + \alpha_{i2} u_2^m + \ldots + \alpha_{in} u_n^m \qquad (\alpha_{ik} = \text{const.}),$$

donnent, pour $m=1$ et pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$(31) \qquad |y_i^1| \leqslant C\,\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura pour le même système de solu tions

$$\lim_{t=\infty} y_i^1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i^1(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations (31), les équations (27), pour $m = 2$, donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\varepsilon_i \delta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, les équations (28) pour $m = 2$, d'après les transformations (30), donnent, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} y_i^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i^2(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1} \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t=\infty} y_i^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour que l'on ait, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1$$

ce qui est possible à cause des relations $\lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0$, les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ [1]). Il s'ensuit, que les séries (24) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (17) qui, en admettant les conditions (18), satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i^{(k)} = \lim_{t=\infty} \overline{x}_i^{(k)} \qquad (k=0,\ 1;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

ou

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o\,(1) \qquad (k=0,\ 1;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

avec

$$x_i\,(t_0) = \overline{x}_i\,(t_0) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident que l'on a

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o\,(1)\,,\quad x_i\,(t_0) = \overline{x}_i\,(t_0) \qquad (k=0,\ 1;\ i=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (10), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro et soit, par exemple $r_1 = r_2 = \ldots$ $\ldots = r_l = \vartheta i$ une racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l. A cette racine correspond, après les transformations (25), un groupe d'équations

$$\frac{du_1^m}{dt} - \vartheta i\, u_1^m = \varphi_1\,(t)\,,$$

$$\frac{du_2^m}{dt} - c_{21}\, u_1^m - \vartheta i u_2^m = \varphi_2\,(t)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_l^m}{dt} - c_{l1}\, u_1^m - c_{l2}\, u_2^m - \ldots - c_{l\,l-1}\, u_{l-1}^m - \vartheta i u_l^m = \varphi_l\,(t)\ ^{2)},$$

dont les intégrales générales sont

---

[1]) Il faut remarquer que les premièrs dérivées des séries $\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m$ convergent uniformément, pour $t \geq t_0 > 0$, car les fonctions successives $u_i^m(t)$ et par suite, les fonctions y_i^m, qui tendent vers zéro, admettent, d'après (28), les premières dérivées qui tendent vers zéro, pour $t = \infty$.

[2]) A chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro. $\vartheta i = 0$) d'ordre l, correspondra un tel groupe d'équations.

$$
(32)\quad \begin{cases}
u_1^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt + C_1^m\right], \\
u_2^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi_2(t)\, dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} u_1^m(t)\, dt + C_2^m\right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_l^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} \varphi_l(t)\, dt + c_{l1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} u_1^m(t)\, dt + \ldots\right. \\
\qquad\qquad \left.\ldots + c_{l\,l-1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t} u_{l-1}^m(t)\, dt + C_l^m\right].
\end{cases}
$$

Posons dans les équations (32) $m = 1$ et supposons que les *intégrales*

$$
(33)\quad \begin{cases}
\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_p(t)\, dt & (p = 1, 2, \ldots, l) \\
\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_k^1(t)\, dt & (k = 1, 2, \ldots l-1)
\end{cases}
$$

convergent. Ou peut alors disposer des constantes $C_i^1\,(i = 1, 2, \ldots, l)$ de manière que les solutions $u_i^1\,(i = 1, 2, \ldots, l)$ tendent vers zéro. Les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$
u_1^1 = -e^{\vartheta i t}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt,
$$

$$
u_2^1 = -e^{\vartheta i t}\left[\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_2(t)\, dt + c_{21}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_1^1(t)\, dt\right],
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

d'oú

$$|u_1^1| = \left|\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt\right| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_1(t)|\, dt,$$

$$|u_2^1| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} |u_1^1(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} |\varphi_1(t_2)|\, dt_2,$$

. . . .

. . . .

Puisque les équations (27) pour $m = 1$, à cause de relations supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\,\delta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$(34) \quad \begin{cases} |u_1^1| \leqslant C \displaystyle\int_t^{\infty} \delta_1(t)\, dt, \\ |u_2^1| \leqslant C \left[\displaystyle\int_t^{\infty} \delta_2(t)\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta_1(t_2)\, dt_2\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les intégrales

$$
(35)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\int\limits_{t_0}^{\infty} \delta_1(t)\, dt, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\infty} \delta_1(t_2)\, dt_2, \ldots \\
\qquad \ldots, \int\limits_{t_0}^{\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{l-1}}^{\infty} \delta_1(t_l)\, dt_l, \\
\int\limits_{t_0}^{\infty} \delta_2(t)\, dt, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\infty} \delta_2(t_2)\, dt_2, \ldots \\
\qquad \ldots, \int\limits_{t_0}^{\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{l-2}}^{\infty} \delta_2(t_{l-1})\, dt_{l-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\int\limits_{t_0}^{\infty} \delta_l(t)\, dt
\end{array}
\right.
$$

convergent [1]), ce qui entraîne la convergence des intégrales (33), les inégalités (34) peuvent être écrites sous la forme

$$| u_i^1 | \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0.$$

Il faut remarquer que les intégrales (35) se réduisent, d'après (29'), aux intégrales

---

1) Pour $l = 1$, les intégrales ci-dessus se ramènent à l'intégrale

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \delta_1(t)\, dt,$$

c'est-à-dire, d'après (35'), à l'intégrale

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} | \delta_{pk}(t) |\, dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

$$(35') \qquad \int_{t_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |\,\delta_{pk}(t)\,|\, dt, \qquad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |\,\delta_{pk}(t_2)\,|\, dt_2, \; \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \; \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |\,\delta_{pk}(t_l)\,|\, dt_l$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i = 0$) et, à chaque racine multiple d'ordre l, correspondront les intégrales (35′), qui doivent être convergentes.

Les transformations (30), pour $m = 1$, donnent avec les autres fonctions $u_i^1 (i = l+1, \ldots, n)$,

$$|\,y_i^1\,| \leqslant C\varepsilon_i\,(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0\,, \qquad \varepsilon_i = \max\, \varepsilon_i(t)\,.$$

Connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations ci-dessus, on aura, par le même raisonnement comme plus haut,

$$|\,y_i^2\,| \leqslant C\varepsilon_i\,\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

En continuant, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|\,y_i^m\,| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1}\,\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad \begin{matrix}(m = 1, 2, \ldots) \\ (i = 1, 2, \ldots, n)\end{matrix}$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0\,, \qquad \varepsilon_i = \max\, \varepsilon_i(t)\,.$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour avoir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max\, \varepsilon_i(t) < 1\,,$$

les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$.

Par conséquent, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les intégrales (35′) convergent, les séries (24) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (17), qui, sous les conditions (18), satisfont aux relations

$$x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

II. Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\bar{x}_i = x_i^0$ un système de solutions bornées des équations (21).

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, à un tel système de solutions $\bar{x} = x_i^0$ correspond un système de solutions des équations* (17), *données par des séries* (24), *et qui satisfont, sous les conditions* (18), *aux relations*

$$x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, avec

$$x_i(t_0) = \bar{x}_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (10), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines imaginaires pures et égales á zéro, les équations* (17) *admettent les mêmes propriétés, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les intégrales* (35′) *sont convergentes.*

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura*

$$x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1), \quad x_i(t_0) = \bar{x}_i(t_0) \qquad (k = 0, 1; \; i = 1, 2, \ldots, n).$$

III. Equation d'ordre n à coefficients constants.

Soit donnée une équation différentielle d'ordre n

$$(36) \qquad x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x' + a_1 x = f(t)$$

a_i étant des constantes et $f(t)$ une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend vers une limite finie

$$\lim_{t=\infty} f(t) = b\,.$$

Les transformations

$$(37)\qquad \begin{cases} x = x_1\,, \\ x' = x_2\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases},$$

réduisent l'équation (36) à un système d'équations

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - x_2 = 0\,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} - x_3 = 0\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\,, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} - x_n = 0\,, \\ \dfrac{dx_n}{dt} + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = f(t)\,. \end{cases}$$

En posant

$$(39)\qquad x_i = y_i + A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations (38) deviennent

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = 0\,, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_3 = 0\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\,, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt} - y_n = 0\,, \\ \dfrac{dy_n}{dt} + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = f(t) - b = \psi(t) \end{cases}$$

où

$$\lim_{t=\infty} f(t) - b = \lim_{t=\infty} \psi(t) = 0 .$$

$$A_1 = \frac{b}{a_1}, \quad A_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n). \tag{41}$$

Une substitution linéaire à coefficients constants et convenablement choisis

$$u_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n , \tag{42}$$

dont le déterminant est différent de zéro, réduit les équations (40) à une forme spéciale

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dt} - r_1 u_1 = \varphi_1(t), \\ \dfrac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r_2 u_2 = \varphi_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dt} - c_{n1} u_1 - c_{n2} u_2 - \ldots - c_{n\,n-1} u_{n-1} - r_n u_n = \varphi_n(t)\ ^{1)} \end{array}\right. \tag{43}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique

$$\left|\begin{array}{cccccc} r & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & r + a_n \end{array}\right| = r^n + a_n r^{n-1} + \ldots + a_1 = 0, \tag{44}$$

---

1) Dans les cas des racines inégales les équations transformées peuvent être de la forme

$$\frac{du_i}{dt} - r_i u_i = \varphi_i(t). \tag{c}$$

Dans le cas des racines multiples, à chaque racine multiple d'ordre k correspondra un groupe d'équations de la forme

$$\frac{du_1}{dt} - r u_1 = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r u_2 = \varphi_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du_k}{dt} - c_{k1} u_1 - \ldots - c_{k\,k-1} u_{k-1} - r u_k = \varphi_k(t)$$

qui peuvent être rangées d'une manière quelconque; c_{ik} $(k < i)$ étant les constantes déterminées et

$$\varphi_i(t) = b_{in}\psi(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{44'}$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers zéro.

Les intégrales générales des équations (43) sont

$$\tag{45} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right], \\ u_2 &= e^{r_2 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1(t)\,dt + C_2\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= e^{r_n t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}\varphi_n(t)\,dt + c_{n1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_1(t)\,dt + \ldots\right. \\ &\qquad \left.\ldots + c_{n\,n-1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_{n-1}(t)\,dt + C_n\right] \end{aligned} \right.$$

avec

$$\tag{46} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right], \\ u_2 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + C_2\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_k &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_k(t)\,dt + c_{k1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + \ldots\right. \\ &\qquad \left.\ldots + c_{k\,k-1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_{k-1}(t)\,dt + C_k\right] \end{aligned} \right.$$

pour $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = a$ une racine multiple d'ordre k [1]).

Comme on le voit, les intégrales générales (45) et (46) sont de la forme (2).

Supposons d'abord que toutes les racines de l'équation caractéristique (44) soient réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, il existe, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.], un système de solutions des intégrales (45), qui tendent vers zéro

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqq \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left|\frac{u_1(t)}{r_2}\right|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right| = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqq \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right| = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il s'ensuit, d'après les transformations (42) et (39), que les équations (38) admettent un système de solutions satisfaisant, vu les équations (41), aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_1 = A_1 = \frac{b}{a_1}, \quad \lim_{t=\infty} x_i = A_i = 0 \qquad (i=2, \ldots, n),$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$x_1(t_0) = A_1 = \frac{b}{a_1}, \quad x_i(t_0) = A_i = 0^{2)} \qquad (i=2, \ldots, p),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Par conséquent, l'équation (36), d'après les transformations (37), admet une solution, qui satisfait aux relations

---

[1]) A chaque racine multiple d'ordre k correspondra un groupe d'intégrales de la forme (46).

[2]) Les valeurs $x_i(t_0)$ peuvent être d'ailleurs quelconques, car dans les solutions u_i, qui tendent vers zéro, figurent p constantes arbitraires

$$(47) \qquad \lim_{t=\infty} x(t) = \frac{b}{a_1}, \quad \lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(48) \qquad x(t_0) = \frac{b}{a_1}, \quad x^{(i)}(t_0) = A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident que l'intégrale générale de l'équation (36) admet les propriétés (47). Dans ce cas, il existe une solution de l'équation (36) satisfaisant aux relations (47) et (48) pour $p = n$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (44), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro. Il existe alors une solutions de l'équation (36), qui satisfait aux relations (47) et (48), si, d'après (46), pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, un groupe d'intégrales de la forme

$$(49) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_p(t)\, dt & (p = 1, 2, \ldots, l), \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_k(t)\, dt & (k = 1, 2, \ldots, l-1) \end{cases}$$

converge; pour $l = 1$, les intégrales ci-dessus deviennent, d'après (c), $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt$.

Mais dans le cas des racines égales à zéro, on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_1 = 0\,.$$

Pour que l'équation (36) admette une solution asymptotique finie, il faut et il suffit, à cause de $a_1 = 0$, que l'on ait $b = 0$. Dans ce cas il existe une solution qui satisfait aux relations

$$\lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Remarquons que les intégrales (49) peuvent être écrites sous une autre forme. En supposant que les intégrales (49) convergent, pour une racine multiple d'ordre l, on peut alors disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ de sorte que les solutions (46), pour cette racine multiple, tendent vers zéro. Mais, les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$u_1 = -e^{\vartheta i t}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta i t}\left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_1(t)\,dt\right],$$

. . . .

d'où, à cause des relations

$$\varphi_i(t) = b_{in}\psi(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$u_1 = -b_{1n}\,e^{\vartheta i t}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\psi(t)\,dt,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta i t}\left[b_{2n}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\psi(t)\,dt - c_{21}\,b_{1n}\int_t^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2}\psi(t_2)\,dt_2\right],$$

. . . .

Puisque les solutions ci-dessus tendent vers zéro, les intégrales, qui doivent être convergentes et qui remplacent les intégrales (49), sont

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\psi(t)\,dt,\quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2}\psi(t_2)\,dt_2\ldots \tag{50}$$

$$\ldots,\int_{t_0}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} dt_2\ldots\int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta i t_l}\psi(t_l)\,dt_l,$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour cette racine égale à zéro).

Il est facile de voir, d'après (44'), qu'à chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, correspondront les intégrales (50), qui doivent être convergentes.

Comme on le voit, nous retrouvons les résultats obtenus par M. O. Perron et H. Späth.

On a donc le théorème suivant:

III. Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont différentes de zéro* ($\Delta = a_1 \neq 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure d'ordre l, les intégrales* (50) *convergent, l'équation* (36) *admet une solution satisfaisant aux relations*

$$(47) \qquad \lim_{t=\infty} x(t) = \frac{b}{a_1}, \qquad \lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(48) \qquad x(t_0) = \frac{b}{a_1}, \qquad x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

où p est ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (44), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines égales à zéro* ($\Delta = a_1 = 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro,* $\vartheta i = 0$) *d'ordre l, les intégrales* (50) *convergent, l'équation* (36) *admet une solution asymptotique finie, si l'on a* $b = 0$. *Dans ce cas, il existe une solution de l'équation* (36), *qui satisfait aux relations*

$$\lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, l'intégrale générale de l'équation* (36) *satisfait aux relations* (47). *Dans ce cas, il existe une solution qui satisfait aux relations* (47) *et* (48) *pour* $p = n$.

IV. Equation d'ordre n à coefficients variables.

Soit donnée une équation différentielle d'ordre n

$$x^{(n)}+a_n(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_2(t)\,x'+a_1x=f(t), \tag{51}$$

$a_i\,(t)$ et $f(t)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t\geqslant t_0\geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies

$$\lim_{t=\infty} a_i\,(t)=a_i\,, \qquad \lim_{t=\infty} f(t)=b \qquad (i=1,2,\ldots,n)\,. \tag{52}$$

Les substitutions (37) transforment l'équation (51) en un système d'équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}-x_2=0\,,\\
&\frac{dx_2}{dt}-x_3=0\,,\\
&\ldots\ldots,\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt}-x_n=0\,,\\
&\frac{dx_n}{dt}+a_1(t)\,x_1+a_2(t)\,x_2+\ldots+a_n\,(t)\,x_n=f(t).
\end{aligned}\right. \tag{53}$$

Ecrivons les équations (53) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}-x_2=0\,,\\
&\frac{dx_2}{dt}-x_3=0\,,\\
&\ldots\ldots,\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt}-x_n=0\,,\\
&\frac{dx_n}{dt}+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_n\,x_n=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,(t)\,x_k
\end{aligned}\right. \tag{54}$$

avec

$$\delta_k\,(t)=a_k-a_k\,(t)\,,\quad \lim_{t=\infty}\delta_k\,(t)=0 \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{55}$$

et appliquons la méthode des approximations successives.

Soit donnée une équation à coefficients constants

(56) $$\bar{x}^{(n)} + a_n \bar{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2 \bar{x}' + a_1 \bar{x} = f(t) ,$$

qui, d'après les transformations (37), peut être écrite sous la forme d'un système d'équations

(57) $$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_1}{dt} - \bar{x}_2 = 0 , \\ \dfrac{d\bar{x}_2}{dt} - \bar{x}_3 = 0 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \\ \dfrac{d\bar{x}_{n-1}}{dt} - \bar{x}_n = 0 , \\ \dfrac{d\bar{x}_n}{dt} + a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \ldots + a_n \bar{x}_n = f(t) \end{cases}$$

et soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\bar{x}_i = x_i^0$ un système de solutions bornées des équations (57). En partant du système x_i^0 de solutions des équations (57), on peut déterminer les suites de fonctions

$$x_i^1, \; x_i^2, \; \ldots , \; x_i^m, \; \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots , n)$$

comme les solutions successives des équations

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1^m}{dt} - x_2^m = 0 , \\ &\frac{dx_2^m}{dt} - x_3^m = 0 , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \\ &\frac{dx_{n-1}^m}{dt} - x_n^m = 0 , \\ &\frac{dx_n^m}{dt} + a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \ldots + a_n x_n^m = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t) \, x_k^{m-1} \end{aligned}$$

ou, en posant

(58) $$y_i^0 = x_i^0, \quad y_i^1 = x_i^1 - x_i^0, \ldots , y_i^m = x_i^m - x_i^{m-1}, \ldots , \qquad (i = 1, 2, \ldots , n),$$

on obtient des fonctions $y_i^m (m = 1, 2 , \ldots)$ comme les solutions successives des équations

$$(59)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1^m}{dt} - y_2^m = 0\,, \\ \dfrac{dy_2^m}{dt} - y_3^m = 0\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \\ \dfrac{dy_{n-1}^m}{dt} - y_n^m = 0\,, \\ \dfrac{dy_n^m}{dt} + a_1 y_1^m + a_2 y_2^m + \ldots + a_n y_n^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t) y_k^{m-1}. \end{cases}$$

Les suites (58) donnent les séries

$$(60)\qquad x_i = \lim_{m=\infty} x_i^m = y_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = \bar{x}_i + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Si les séries ci-dessus convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, elles représentent les solutions des équations (53), qui satisfont aux relations

$$x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0,\, 1;\quad i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

c'est-à-dire, d'après les transformations (37), l'équation (51) admet une solution, qui satisfait aux relations

$$x^{(i)} = \bar{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Pour cela faisons une substitution linéaire

$$(61)\qquad u_i^m = b_{i1} y_1^m + b_{i2} y_2^m + \ldots + b_{in} y_n^m$$

et choisissons les coefficients b_{ik}, dont le déterminant est différent de zéro, de manière que les équations (59) prennent la forme

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1^m}{dt} - r_1 u_1^m = \varphi_1(t)\,, \\ \dfrac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - r_2 u_2^m = \varphi_2(t)\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique (44), c_{ik} $(k<i)$ des constantes déterminées et $\varphi_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$

$$\varphi_i(t) = b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t)\, y_k^{m-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{63}$$

Les intégrales générales des équations (62) sont données par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} u_1^m = e^{r_1 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt + C_1^m\right], \\ u_2^m = e^{r_2 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} \varphi_2(t)\, dt + c_{21}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} u_1^m(t)\, dt + C_2^m\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{64}$$

Il faut résoudre les équations ci-dessus en posant successivement $m=1, 2, \ldots$

Supposons d'abord que toutes les racines de l'équation caractéristique (44) soient réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, on aura, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\lim_{t=\infty} |u_1^m| = \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left|\frac{u_1^m}{r_2}\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t=\infty} |u_1^m| = \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|, \\ \lim\limits_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{65}$$

Mais dans les solutions u_i^m figurent encore p constantes arbitraires où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. On peut alors disposer des constantes C_i^m $(i=1, 2, \ldots, p)$ de sorte que l'on ait, à cause des transformations (61),

$$y_i^m(t_0)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, p).$$

En choisissant de cette manière les constantes C_i^m $(i-1, 2, \ldots, p)$, les solutions successives u_i^m, c'est-à-dire les solutions y_i^m ne dépendent que des fonctions $\varphi_i\,(t)$.

Posons maintenant $m=1$; on aura, d'après les inégalités supposées

$$|y_k^0|=|x_k^0|\leqslant C \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

pour des relations (63)

$$(65') \qquad |\varphi_i\,(t)|\leqslant C\,|b_{in}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_k\,(t)|=C\,|b_{in}|\,\delta\,(t)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}|\delta_k\,(t)|=\lim_{t=\infty}\delta\,(t)=0$$

à cause des relations (55). Il s'ensuit que les inégalités (65), pour $m=1$, deviennent

$$\lim_{t=\infty}|u_1^1|\leqslant C\left|\frac{b_{1n}}{r_1}\right|\lim_{t=\infty}\delta\,(t)=0\,,$$

$$\lim_{t=\infty}|u_2^1|\leqslant C\left[\left|\frac{b_{2n}}{r_2}\right|\lim_{t=\infty}\delta(t)+\left|\frac{c_{21}\,b_{1n}}{r_1 r_2}\right|\lim_{t=\infty}\delta\,(t)\right]=0\,,$$

. . . .

d'où, pour $t\geqslant t_0\geqslant 0$,

$$|u_i^1|\leqslant C\eta_i\,(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\eta_i\,(t)=0\,.$$

Les transformations (61), pour $m=1$, donnent

$$(66) \qquad |y_i^1|\leqslant C\varepsilon_i\,(t)\leqslant C\varepsilon_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura pour le même système de solutions

$$\lim_{t=\infty} y_i^1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i^1(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations (66), les équations (63), pour $m = 2$, donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\varepsilon_i \, |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_k(t)| = C\varepsilon_i \, |b_{in}| \, \delta(t).$$

Cela posé, les équations (64), pour $m = 2$, donnent, comme précédemment, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} y_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$y_i^2(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1} \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t=\infty} y_i^m = 0 \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, n)\\(m = 1, 2, \ldots,)\end{matrix}$$

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour avoir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1$$

ce qui est possible à cause de relations $\lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0$, les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$. Il s'ensuit que les séries (60) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (53), qui, sous les conditions (52), satisfont aux relations, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0,\ 1;\ \ i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1), \quad x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (k = 0,\ 1;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisque les équations (51) et (56) correspondent respectivement aux systèmes d'équations (53) et (57), l'équation (51) admet une solution, qui, d'après les transformations (37), satisfait aux relations

$$x^{(i)} = \overline{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = \overline{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

avec $p = n$, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (44), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro et soit, par exemple $r_1 = r_2 = \ldots = r_l = \vartheta i$ une racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l. A cette racine correspond, après les transformations (61), un groupe d'équations

$$\frac{du_1^m}{dt} - \vartheta i u_1^m = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - \vartheta i u_2^m = \varphi_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_l^m}{dt} - c_{l1} u_1^m - \ldots - c_{l\,l-1} u_{l-1}^m - \vartheta i u_l^m = \varphi_l(t)\ ^{1)},$$

dont les intégrales générales sont

---

1) A chaque racine imaginaire pure (où égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l correspondra un tel groupe d'équations.

$$u_1^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt + C_1^m\right],$$

$$u_2^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right],$$

. . . .

$$u_l^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_l(t)\,dt + c_{l1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + \dots\right.$$

$$\left.\dots + c_{l\,l-1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_{l-1}^m(t)\,dt + C_l^m\right].$$

Posons dans les équations ci-dessus $m = 1$ et supposons que les intégrales

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{ll} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_p(t)\,dt & (p = 1, 2, \dots, l) \\ \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_k^1(t)\,dt & (k = 1, 2, \dots l-1) \end{array}\right.$$

convergent. Il existe alors un système de solutions u_i^1 ($i = 1, 2, \dots, l$), qui tendent vers zéro. D'après l'expression [(2), 5.], les solutions, qui tendent vers zéro, sont

$$u_1^1 = -e^{\vartheta i t}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt,$$

$$u_2^1 = -e^{\vartheta i t}\left[\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_1^1(t)\,dt\right],$$

. . . .

d'oú

$$|u_1^1| = \left| \int_t^\infty e^{-\vartheta it} \varphi_1(t)\, dt \right| \leqslant \int_t^\infty |\varphi_1(t)|\, dt,$$

$$|u_2^1| \leqslant \int_t^\infty |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^\infty |u_1^1(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^\infty |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty |\varphi_1(t_2)|\, dt_2,$$

. . . .

Puisque les équations (63) pour $m = 1$, à cause de relations supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C$$

donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\, |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_k(t)| = C\, |b_{in}|\, \delta(t),$$

on aura

$$(68) \quad \begin{cases} |u_1^1| \leqslant C\, |b_{1n}| \displaystyle\int_t^\infty \delta(t)\, dt, \\ |u_2^1| \leqslant C \left[|b_{2n}| \displaystyle\int_t^\infty \delta(t)\, dt + |c_{21} b_{1n}| \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \delta(t_2)\, dt_2 \right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si les intégrales

$$(69) \quad \int_{t_0}^\infty \delta(t)\, dt, \qquad \int_{t_0}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \delta(t_2)\, dt_2, \dots$$

$$\dots, \int_{t_0}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \int_{t_{l-1}}^\infty \delta(t_l)\, dt_l,$$

convergent, ce qui entraîne la convergence des intégrales (67), les inégalités (68) peuvent être écrites sous la forme

$$|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, l)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0.$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i = 0$) et, à chaque racine imaginaire pure d'ordre l correspondent, d'après (65′), les intégrales (69).

Les transformations (61), pour $m=1$, donnent avec les autres fonctions $u_i^1 (i = l+1, \ldots, n)$,

$$|y_i^1| \leqslant C\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

En connaissant des fonctions y_i^1 qui satisfont aux relations ci-dessus, on aura, par le même raisonnement

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i\, \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1}\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad \begin{pmatrix} m=1, 2, \ldots \\ i=1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour obtenir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1,$$

les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$.

Par conséquent, si les intégrales (69) convergent pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les séries (60) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solution sdes équations (53), qui, sous les conditions (52), satisfont aux relations

$$x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \; i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire, d'après les transformations (37), l'équation (51) admet une solution, qui satisfait aux relations

$$x^{(i)} = \bar{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Nous retrouvons donc les résultats de M. O. Perron et H. Späth.

On aura donc le théorème suivant:

IV. Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\bar{x} = x^0$ *une solution bornée de l'équation* (56), *dont les* $n-1$ *premières dérivées sont bornées.*

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, à une telle solution* $\bar{x} = x^0$ *correspond une solution de l'équation* (51), *donnée par la série* (60) *et qui satisfait, sous les conditions* (52), *aux relations*

$$x^{(i)} = \bar{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 *étant assez grand, avec*

$$x^{(i)}(t_0) = \bar{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (44), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines imaginaires pures et égales á zéro, l'équation* (51) *admet la même propriété, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro,* $\vartheta i = 0$) *d'ordre l, les intégrales* (69) *sont convergentes.*

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura*

$$x^{(i)} = \bar{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = \bar{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$