Sur une condition nécessaire de rotation en bloc d'un système continu ayant des parties fluides.

Par

WENCESLAS JARDETZKY.

On a souvent envisagé dans les recherches sur les figures des corps célèstes ainsi que dans la théorie de leurs mouvements une condition nécessaire de rotation en bloc des divers systèmes.

N. Joukowsky [1]) a démontré que, si un corps solide a des cavités remplies d'un liquide visqueux, le mouvement du système tend vers la rotation en bloc autour d'un des axes principaux d'inertie. Ce résultat a été généralisé par W. Stekloff [2]), qui a énoncé le théorème suivant: tout mouvement d'un système, soumis aux forces extérieures, dont le moment résultant par rapport au point fixe est nul, et composé d'un corps solide recouvert par un liquide visqueux et ayant un certain nombre de cavités quelconques, remplies par des liquides visqueux, tend à un mouvement limite, dans lequel l'un des axes principaux d'inertie coïncide avec la direction fixe du moment résultant des quantités du mouvement et le système tourne uniformément autour de cet axe comme un seul corps solide. P. Appell [3]) a

---

1) *N. Joukowsky.* Sur le mouvement d'un corps solide qui a des cavités remplies par un liquide homogène (en russe). Journal de la société phys.-chim. St.-Pétersbourg. T. XVII. I. p. 81 1885.

2) *W. Stekloff.* Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes p. 229. Annales de Toulouse. III série. T. I. Année 1909.

3) *P. Appell.* Traité de méc. rat T. IV. p. 42. 1921; C. R. 179 p. 119. 1924; C. R. 179 p. 795. 1924; Acta Mathematica T. 47. p. 45. 1926. Voir aussi: *H. Poincaré.* Figures d'équilibre. p. 28 1903. *Lejeune-Dirichlet.* Crelle Journal, B. 58. p. 215.

étudié la condition nécessaire de rotation d'ensemble d'une masse fluide (homogène ou hétérogène). Il suppose: 1° que les forces agissantes sont les attractions des particules d'après la loi de Newton et des pressions, 2° que la pression sur la surface libre est constante ou fonction du temps. Dans ce cas le mouvement d'ensemble sera possible, si l'axe de rotation uniforme est fixe dans l'espace et se confond avec un axe principal d'inertie. On peut démontrer [4]) que la même condition est nécessaire dans le cas d'équilibre d'une masse fluide avec des corps flottants.

L'étude d'équilibre relatif dans les divers cas suivants:

1° un solide rempli d'un liquide,

2° un solide recouvert par un liquide,

3° un fluide libre,

4° un liquide avec des corps flottants,

nous conduit à une proposition générale:

Soit donné un système matériel continu (M) ayant des parties fluides et isotropes, isolé dans l'espace et soumis aux forces, qui dérivent d'un potentiel. Ce système pourra se mouvoir comme un corps solide si ce mouvement se réduit à une rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie.

Le système (M) a des parties déformables. Donc, on doit satisfaire à l'équation du mouvement d'un milieu déformable:

$$\vec{w} = \vec{F} + \frac{1}{\varrho} \nabla \Phi , \tag{1}$$

où ϱ est la densité, $\vec{w}$ — l'accélération d'un point. $\vec{F}$ la résultante des attractions rapportée à l'unité de masse, le vecteur $\nabla\Phi$ est la divergence du tenseur

$$\Phi \left\{ \begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix} \right.$$

En vertu des hypothèses faites sur le système, on a

$$\vec{F} = \nabla U ,$$

[4]) *W. Jardetzky.* Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide avec des corps flottants. Acta Astronomica. Sér. a. Vol. 2. p. 83. Cracovie. 1931.

en outre pour les parties fluides, le tenseur Φ se réduit à un scalaire $-p$, multiplié par le tenseur-unité. Le frottement n'intervient pas dans le cas du mouvement d'ensemble des fluides visqueux. La densité étant une fonction de la pression p, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\varrho}\nabla\Phi = -\frac{1}{\varrho}\nabla p = -\nabla\psi(p),$$

où

$$\psi(p) = \int\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

En posant encore

$$Q = U - \psi(p)$$

$$\dot{v} = \vec{w},$$

où $\vec{v}$ est la vitesse d'un point, nous aurons l'équation fondamentale de l'hydrodynamique

$$\dot{v} = \nabla Q \tag{2}$$

qui remplace maintenant l'équation (1).

Dans le cas du mouvement d'ensemble du milieu continu envisagé on doit satisfaire à cette équation.

Soient: $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire et $\vec{r}$ le vecteur qui donne la position du point considéré par rapport au centre d'inertie. Le système se meut comme un corps solide. On a

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} r] = \dot{r}$$

et

$$\dot{v} = [\dot{\vec{\Omega}} r] + [\vec{\Omega}\vec{v}].$$

Prenons le rotationnel du vecteur $\dot{v}$. De l'équation (2) on tire

$$\text{rot}\,\dot{v} = \text{rot grad}\,Q = 0,$$

ou

$$\text{rot}\,[\dot{\vec{\Omega}}\vec{r}] + \text{rot}\,[\vec{\Omega}\vec{v}] = 0.$$

Mais un calcul simple montre que

$$\text{rot}[\vec{\Omega}\vec{v}] = \text{rot}\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\vec{r}]] = 0,$$

car $\vec{\Omega}$ n'est pas une fonction des coordonnées.

Il reste:

$$\operatorname{rot}\,[\dot{\Omega}\vec{r}] = 0\,, \tag{3}$$

D'après la formule connue de la théorie des vecteurs

$$\operatorname{rot}\,[\dot{\Omega}\vec{r}] = 2\dot{\Omega}\,,$$

et on conclut, que la vitesse angulaire n'est pas une fonction du temps. Les équations d'Euler pour les solides montrent donc que le mouvement d'ensemble du système envisagé est une rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie.

Il est évident que la condition dont nous avons parlé est seulement nécessaire. La surface libre d'une masse fluide, par exemple, doit être équipotentielle pour que la rotation en bloc soit possible.

Remarquons, enfin, que la même condition est satisfaite dans le cas du mouvement permanent d'un fluide autour d'un **axe fixe,** la vitesse angulaire étant la fonction de la distance du point à l'axe de rotation.