# Sur les séries de fractions rationnelles.

Par

PAUL MONTEL.

1. Considérons une suite de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots, \tag{1}$$

holomorphes dans un domaine $(D)$ du plan de la variable complexe $z$. Comme on sait, il revient au même de considérer la convergence d'une suite ou celle d'une série; pour étudier cette convergence, ou peut supposer que les fonctions de la suite soient des polynomes puisque chaque fonction $f_n(z)$ peut être remplacée par un polynome qui en différe en module de moins de $\frac{1}{n}$ lorsque $z$ appartient au domaine $(D)$.

On dit que la suite (1) converge uniformément en un point du domaine, lorsque la convergence est uniforme dans un cercle ayant ce point pour centre: l'ensemble des points de convergence uniforme est un ensemble ouvert. En un point $z_0$ où la suite ne converge pas uniformément, ou bien la suite n'est pas convergente dans un cercle arbitraire de centre $z_0$, ou bien la convergence n'est pas uniforme dans ce cercle. L'ensemble $E$ des points $z_0$ est un ensemble fermé.

Supposons que la suite (1) converge en chaque point du domaine $(D)$ vers une valeur limite finie. Dans ce cas, l'ensemble $E$ est non dense dans ce domaine. En d'autres termes, comme l'a démontré M. Osgood [1]), dans tout domaine intérieur à $(D)$,

[1]) Annals of Mathematics, 2e s., t. III, n° 1.

il en existe un autre dans lequel la suite converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$ qui est nécessairement holomorphe dans ce domaine partiel. Ces domaines partiels peuvent être en infinité dénombrable; la fonction limite $f(z)$ peut coïncider dans chacun d'eux avec des fonctions holomorphes toutes différentes et ce cas peut se présenter même lorsque la fonction limite est une fonction continue [2]).

Les points frontières des domaines de convergence uniforme forment l'ensemble $E$ des points de convergence non uniforme. Cet ensemble est parfait, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine [3]). Les points de l'ensemble $E$ sont les points irréguliers de la famille des fonctions $f_n(z)$, c'est-à-dire les points du domaine en lesquels la famille n'est pas normale. Autour de chaque point $z_0$, les fonctions $f_n(z)$, prennent dans leur ensemble une infinité de fois chaque valeur sauf une valeur au plus.

Sur l'ensemble $E$, la fonction $f(z)$ est une fonction de première classe de Baire: elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. On a récemment caractérisé les ensembles $E$ et les fonctions $f(z)$ tels qu'il existe une suite de fonctions holomorphes convergeant vers $f(z)$ et admettant les points de l'ensemble $E$ comme points de convergence non uniforme [4]).

2. Une fonction continue arbitraire de $z$ ne peut donc être representée comme limite d'une suite de polynomes en $z$. Il est nécessaire, dans le cas général, d'introduire une série double de polynomes [5]). Mais un polynome ou une fonction holomorphe de $z$ sont des fonctions qui admettent un valeur exceptionnelle: la valeur infinie. Ne pourrait-on obtenir une représentation de toute fonction continue de $z$ comme limite d'une suite de fonctions n'ayant aucune valeur exceptionnelle c'est-à-dire de fonctions méromorphes ou rationnelles? Nous allons voir qu'il n'en est rien et que les suites convergentes de fonctions méromorphes possèdent aussi la propriété de converger uniformément en des

[2]) *P Montel,* Sur les séries de fonctions analytiques (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e s., t XXX, 1906).

[3]) *P. Montel,* Sur les suites infinies de fonctions (Annales Sc. de l'Ecole Normale supérieure, 3e s., t. XXIV, 1907).

[4]) *Lavrentieff,* Sur un problème de M. Montel (Comptes-Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, 1927). — *Hartogs* et *Rosenthal,* Ueber Folgen analytischer Funktionen (Math. Annalen, 1928).

[5]) *H. Lebesgue.* Sur la représentation analytique des fonctions continues (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1903, p. 82).

points dont l'ensemble est partout dense, en sorte que la fonction limite est formée par la réunion de fonctions analytiques.

Il est nécessaire au préalable de rappeler les définitions relatives à la convergence des suites de fonctions méromorphes. On dit que la convergence est uniforme en un point où une suite $f_n(z)$ de telles fonctions a une valeur limite finie $f(z)$, si, dans un cercle ayant ce point pour centre, la différence $f(z)-f_n(z)$ a un module inférieur à tout nombre donné $\varepsilon$, lorsque $n$ est assez grand. En un point où la valeur limite et infinie, on remplace $f(z)$ et $f_n(z)$ par $\frac{1}{f(z)}$ et $\frac{1}{f_n(z)}$. La fonction limite $f(z)$ est méromorphe autour d'un point de convergence uniforme.

On obtient des définitions plus symétriques en représentant les valeurs complexes $Z$ au moyen d'une projection stéréographique du plan complexe sur une sphère de Riemann, à partir d'un point de cette sphère qui correspond au point à l'infini du plan. A la valeur $Z$ correspond le point $P$ de la sphère qui en est l'image; à la distance des deux points $Z$ et $Z'$ du plan, on fait correspondre la distance sphérique des images $P$ et $P'$ de ces points, c'est-à-dire la longueur du plus petit arc de grand cercle qui les joint, distance que l'on représente par la notation $[Z, Z']$. Les fonctions méromorphes deviennent ainsi des fonctions continues sur la sphère ou sphériquement continues. Une suite $f_n(z)$ de fonctions méromorphes converge vers la limite $f(z)$ si la distance sphérique $[f(z), f_n(z)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; la convergence est uniforme autour d'un point si cette distance tend uniformément vers zéro autour de ce point; elle est uniforme dans un domaine si chaque point du domaine est un point de convergence uniforme. Enfin, toute suite convergente de fonctions méromorphes dans un domaine $(D)$ peut être remplacée par une suite de fractions rationnelles ayant la même limite.

Ou peut démontrer la proposition suivante: *Si une suite de fonctions $f_n(z)$ méromorphes dans un domaine $(D)$ converge dans ce domaine, l'ensemble des points de convergence non uniforme est non dense dans le domaine $(D)$* [6].

[6] *P. Montel,* Sur les séries de fonctions méromorphes (Comptes-rendus des séances de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 183, p. 1323, 1926). — Ce théorème a été retrouvé par M. Caratheodory par une voie différente (Bull. of the American Mathematical Society, 1928).

En d'autres termes, dans tout domaine intérieur à $(D)$, se trouve un domaine dans lequel la suite converge uniformément. Pour le démontrer, nous établirons que, étant donné un nombre $\varepsilon$ positif arbitraire, il existe, dans tout domaine $(D_0)$ intérieur à $(D)$, un domaine en chacun des points duquel l'inégalité

$$[f_n(z), f_{n'}(z)] \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

est vérifiée quels que soient les entiers $n$ et $n'$ supérieurs à $n_0$.

En effet, ou bien cette inégalité est vérifiée dans $(D_0)$ quels que soient $n$ et $n'$ supérieurs à un entier $n_0$; ou bien, il existe une infinité de couples d'entiers pour lesquels l'inégalité n'est pas vérifiée quel que soit $z$. Soient donc $n_1$ et $n_1'$ $(n_1 < n_1')$ deux entiers tels que, au point $z_1$, on ait

$$[f_n(z_1), f_{n_1'}(z_1)] > \varepsilon .$$

Les fonctions $f_{n_1}(z)$, $f_{n_1'}(z)$ sont sphériquement continues; il en est de même de leur distance sphérique. On peut donc trouver un domaine $(D_1)$, intérieur à $(D_0)$, en chacun des points duquel on ait

$$[f_{n_1}(z), f_{n_1'}(z)] > \varepsilon .$$

Ou bien l'inégalité (2) est vérifiée dans $(D_1)$, à partir d'un certain rang; ou bien il existe deux entiers $n_2$ et $n_2'$, vérifiant les inégalités

$$n_1' < n_2 < n_2',$$

et un point $z_2$ intérieur à $(D_1)$, tel que

$$[f_{n_2}(z_2), f_{n_2'}(z_2)] > \varepsilon .$$

On en déduit l'existence d'un domaine $(D_2)$, intérieur à $(D_1)$, pour lequel on a

$$[f_{n_2}(z), f_{n_2'}(z)] > \varepsilon .$$

Et ainsi de suite. Si l'opération se poursuit indéfiniment, on obtient une suite d'indices croissant indéfiniment tels, que

$$[f_{n_p}(z), f_{n'_p}(z)] > \varepsilon$$

dans le domaine $(D_p)$. Soit $z_0$ un point commun aux domaines emboîtés $(D_p)$; comme la suite converge en $z_0$, on a

$$[f_n(z_0), f_{n'}(z_0)] \leqslant \varepsilon$$

pour $n$ et n' supérieurs à un entier $n_0$. Si l'on prend $n_p$ et $n'_p$ su-

$(D)$, vers une fonction méromorphe $f(z)$. Il en est ainsi, en particulier, lorsque les fonctions $f_n(z)$ sont univalentes, ou multivalentes d'ordre borné, ou, plus particulièrement, lorsqu'elles ne prennent qu'un nombre borné de fois trois valeurs, fixes ou variables, dont les distances sphériques mutuelles ont une plus petite limite positive.

3. Nous venons d'examiner une famille de fonctions méromorphes $f_n(z)$ telles que, en chaque point $z$ du domaine $(D)$, l'ensemble $\varepsilon_z$ des valeurs limites des valeurs de ces fonctions se reduise à un nombre unique.

Considérons plus généralement une famille de fonctions $f_n(z)$, régulières dans $(D)$, c'est-à-dire, holomorphes ou méromorphes, en infinité dénombrable ou non, et considérons l'ensemble $\varepsilon_z$ des valeurs limites des valeurs de ces fonctions au point $z$. Nous appellerons aussi $\varepsilon_z$ l'ensemble des images de ces valeurs limites sur la sphère de Riemann. Nous démontrerons à ce sujet la proposition suivante:

*Si l'ensemble des images des valeurs limites des valeurs prises par les fonctions d'une famille pour la valeur z de la variable ne couvre jamais toute la sphère de Riemann, on peut extraire, de toute suite infinie de ces fonctions, une suite partielle dont l'ensemble des points de couvergence uniforme est partout dense dans le domaine $(D)$ où les fonctions de la famille sont régulières.*

Soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots,$$

une suite infinie de valeurs dont les images sur la sphère forment un ensemble partout dense. La notation $\alpha_p$ désignera indifféremment une des valeurs ou son point-image. Soit $(D_0)$, un domaine intérieur à $(D)$, et $f_n(z)$ une suite de fonctions de la famille. Ou bien, l'inégalité

$$[f_n(z), \alpha_1] \geqslant 1$$

est vérifiée dans le domaine $(D_0)$ à partir d'une certaine valeur de $n$, ou bien il existe une infinité de valeurs de $n$ pour lesquelles l'inégalité n'est pas vérifiée en tout point de $(D_0)$. Soit alors $n_1$ un entier et $z_1$ un point de $(D_0)$, tels que

$$[f_{n_1}(z_1), \alpha_1] < 1 .$$

Comme la fonction $f_{n_1}(z)$ est continue en $z_1$, il existe un

domaine $(D_1)$, intérieur à $(D_0)$, pour lequel

$$[f_{n_1}(z),\ \alpha_1] < 1\ .$$

Ou bien, l'inégalité

$$[f_n(z),\ \alpha_2] \geqslant \frac{1}{2}$$

est vérifiée dans $(D_1)$ pour $n$ assez grand, ou bien il existe un domaine $(D_2)$, intérieur à $(D_1)$, pour lequel

$$[f_{n_2}(z),\ \alpha_2] < \frac{1}{2}\ ,$$

$n_2$ désignant un entier supérieur à $n_1$. Et ainsi de suite; ou bien il existe un entier $p$ tel que l'inégalité

$$[\ f_n(z),\ \alpha_p\ ] \geqslant \frac{1}{p}$$

soit vérifiée dans un domaine $(D_p)$, intérieur à $(D_0)$, à partir d'une certaine valeur de $n$; ou bien il existe une suite d'entiers

$$n_1, n_2 \ldots n_p \ldots$$

croissant indéfiniment et une suite de domaines emboîtés $(D_p)$ pour lesquels

$$[\ f_{n_p}(z),\ \alpha_p\ ] < \frac{1}{p}$$

quel que soit $p$.

Cette seconde alternative est à rejeter. Soit, en effet, $z_0$ un point commun à tous les domaines $(D_p)$, je dis que l'ensemble $\varepsilon_{z_0}$ couvre toute la sphère. Soit $\alpha$ un point quelconque de cette sphère et

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_m}, \ldots,$$

une suite de points $\alpha_n$ convergeant vers $\alpha$. On a

$$[f_{n_{k_m}}(z_0),\ \alpha_{k_m}] < \frac{1}{k_m}\ ;$$

donc $f_{n_{k_m}}(z_0)$ et $\alpha_{k_m}$ ont la même limite $\alpha$ lorsque $m$ croît indéfiniment. La seconde hypothèse conduit à une contradiction. On a donc, pour une valeur de $p$,

$$[f_n(z), \alpha_p] \geqslant \frac{1}{p}$$

pour $n$ assez grand. Les valeurs de $f_n(z)$, pour $n$ assez grand, ne sortent pas de la calotte sphérique de centre $\alpha_p$ et de rayon sphèrique $\frac{1}{p}$. La famille $f_n(z)$ est donc normale dans $(D_p)$ et on peut en extraire une suite partielle qui converge uniformément dans l'intérieur de $(D_p)$.

Considérons alors un quadrillage du plan et soient $(Q_1)$, $(Q_2), \ldots, (Q_h)$, les $h$ carrés complétement intérieurs à $(D)$. On peut extraire, de la suite $f_n(z)$, une suite partielle convergeant uniformément dans un domaine intérieur à $(Q_1)$; de cette suite, ou peut extraire une suite nouvelle couvergeant uniformément dans un domaine intérieur à $(Q_2)$, etc.; finalement, on extraiera de la suite donnée, une suite partielle convergeant uniformément dans $h$ domaines respectivement intérieurs aux $h$ carrés $(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_h)$.

Dessinons maintenant une suite de quadrillages au moyen de droites parallèles à deux directions fixes et dont les équidistances seront respectivement $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots$

De la suite donnée $f_n(z)$, on extraiera une suite

$$f_1^1, f_2^1, \ldots, f_n^1, \ldots.$$

convergeant uniformément en des points intérieurs à chaque carré du premier quadrillage qui est intérieur à $(D)$. De cette suite, on extraiera une suite nouvelle

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_n^2, \ldots$$

convergeant uniformément en des points de chaque carré du second quadrillage qui est intérieur à $(D)$. Etc.; on définira une suite

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_p^p, f_{p+1}^p, \ldots, f_n^p \ldots$$

convergeant uniformément en des points de chaque carré du $p^e$ quadrillage qui est intérieur à $(D)$. La suite diagonale

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_n^n, \ldots$$

converge uniformément en un ensemble de points partout dense dans $(D)$.

Pour le montrer, considérons les points situés dans le voisinage d'un point $z_0$ de $(D)$, c'est-à-dire dans un cercle $(\gamma)$ de centre $z_0$ et de rayon assez petit. Pour $p$ assez grand, il existera un carré du $p^e$ quadrillage contenu entièrement dans $(\gamma)$. Dans ce carré, il y a des points de convergence uniforme de la suite $f_n^n$.

Remarquons que, dans le théorème précédent, on peut remplacer le domaine $(D)$ par un arc de courbe ou un continu arbitraire.

Remarquons aussi que l'on peut remplacer la suite $f_n(z)$ par une famille de fonctions $f_\lambda(z)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda$ variant d'une manière continue. Les ensembles $\varepsilon_z$ correspondront aux valeurs limites des valeurs de $f_\lambda(z)$ lorsque $\lambda$ tend vers une limite, l'infini par exemple. Tout domaine contiendra un domaine partiel dans lequel l'inégalité

$$[f_\lambda(z), \alpha] \geqslant \delta > 0$$

sera vérifiée pour $\lambda$ assez grand.

4. Donnons une application du résultat précédent. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan et soit

$$f_\lambda(z) = f(\lambda z), \qquad 0 \leqslant \lambda < +\infty.$$

Lorsque $z$ est un point fixe, de module *un* par exemple, et un nombre réel positif, le point $\lambda z$ décrit la demi-droite qui joint l'origine $O$ au point $z$ et, lorsque $\lambda$ augmente indéfiniment, l'ensemble $\varepsilon_z$ constitue l'ensemble d'indétermination des valeurs de $f(z)$ sur la demi-droite considérée.

Soit $ab$ un arc de la circonférence $|z| = 1$ tel que l'ensemble $\varepsilon_z$ ne comprenne jamais tout le plan lorsque $z$ est situé sur $ab$. D'après le paragraphe précédent, tout arc intérieur à $ab$ contient un arc $a'b'$ tel que

$$[f_\lambda(z), \alpha] \geqslant \delta$$

lorsque $z$ est sur $a'b'$. Donc, dans le secteur $a'Ob'$ limité par les demi-droites $Oa'$ et $Ob'$, les valeurs de $f(z)$, lorsque $|z|$ est assez grand, ont des images qui restent dans une calotte fixe de la sphère de Riemann. La fonction ne peut prendre une infinité de fois aucune des valeurs correspondant à la calotte complémentaire. Donc le secteur $a'Ob'$ ne contient aucune droite $J$ de condensation des zéros de $f(z) - a$ pour toute valeur de $a$ sauf deux au plus. Appelons *chemin d'indétermination complète* toute

ligne aboutissant au point à l'infini et telle que les valeurs que prend $f(z)$ aux points de cette ligne soient denses dans tout le plan, ou sur toute la sphère de Riemann. Appelons droite I, toute demi-droite d'indétermination complète issue de $O$. Il n'existe pas toujours une telle droite comme le montrent les fonctions $e^z$, tg $z$ par exemple. Il résulte de la remarque précédente que:

*Si un angle est tel que toute demi-droite issue du sommet et contenue dans l'angle est une droite J, l'ensemble des demi-droites I qui sont des chemins d'indétermination complète est partout dense dans cet angle.*

En particulier, pour une fonction $f(z)$ telle que toute demi-droite est une droite $J$, l'ensemble des droites I est partout dense.

5. Considérons maintenant l'aire des régions couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs d'une fonction $f(z)$.

Pour une famille de fonctions holomorphes dans un domaine $(D)$, j'ai établi précédemment que cette famille est normale lorsque les aires des régions du plan complexe couvertes par les valeurs de ces fonctions sont bornées [7]. Je me propose d'établir le théorème général suivant:

*Si une famille de fonctions méromorphes dans un domaine $(D)$ est telle que les images des valeurs de chaque fonction sur la sphère de Riemann couvrent des régions dont l'aire est bornée par un nombre inférieur à l'aire de la sphère, cette famille est normale dans l'intérieur de $(D)$.*

Soit $f_n(z)$ une suite infinie de fonctions de cette famille; l'aire de la région couverte par les images de ces valeurs ne dépasse pas, par hypothèse, le nombre $4\pi(1-\alpha^2)$, si le rayon de la sphère de Riemann est égal à l'unité. Soit $a_n$ une valeur que $f_n(z)$ ne prend pas; de l'image de $a_n$ comme centre, décrivons sur la sphère un petit cercle de rayon sphérique $\varepsilon$; la calotte ainsi déterminée a pour aire

$$2\pi(1-\cos\varepsilon) = 4\pi \sin^2\frac{\varepsilon}{2} < 4\pi \times \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Prenons $\varepsilon < \alpha$, l'aire de la calotte est inférieure à $4\pi\alpha^2$, il existe donc à l'extérieur un point non couvert, image d'une va-

[7] Sur les familles normales de fonctions analytiques (Annales sc. de l'Ecole Normale Supérieure, 3e s. t. XXXIII, 1916, p. 240).

leur $b_n$ non prise par $f_n(z)$ et on a

$$[a_n, b_n] > \varepsilon .$$

Traçons les calottes sphériques de centres $a_n$ et $b_n$ et de rayon sphérique $\varepsilon$; l'aire totale couverte par ces deux calottes ne dépasse pas

$$4\pi \times \frac{\varepsilon^2}{2} < 4\pi\alpha^2;$$

il existe donc un point non couvert, extérieur à ces deux calottes correspondant à une valeur $c_n$ non prise par $f_n(z)$; et l'on a

$$[a_n, c_n] > \varepsilon, \quad [b_n, c_n] > \varepsilon .$$

Les fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a_n}{f_n(z) - b_n} : \frac{c_n - a_n}{c_n - b_n}$$

ne prennent dans le domaine $(D)$ aucune des valeurs 0, 1, $\infty$. Elles forment une famille normale de fonctions holomorphes et toute suite infinie de fonctions de cette famille est génératrice d'une suite partielle que nous appellerons encore $g_n(z)$ convergeant uniformément vers une fonction limite $g(z)$ et telle que les suites $a_n$, $b_n$, $c_n$ correspondantes aient respectivement pour limites des nombres $a$, $b$, $c$ qui vérifient évidemment les inégalités

$$[a, b] \geqslant \varepsilon, \quad [b, c] \geqslant \varepsilon, \quad [c, a] \geqslant \varepsilon .$$

On en déduit aussitôt que la suite $f_n(z)$ correspondante converge uniformément vers la fonction méromorphe $f(z)$ définie par l'égalité

$$f(z) = \frac{g(z) - a}{g(z) - b} : \frac{c - a}{c - b} .$$

Voici une application du théorème précédent:

*Soit une suite de fonction $f_n(z)$ méromorphes dans un domaine $(D)$ et convergeant en chaque point du domaine vers une valeur limite $f(z)$. Si les aires couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs de ces fonctions sont inférieures à un nombre fixe plus petit que l'aire de la sphère, la convergence est uniforme dans l'intérieur de $(D)$ et la fonction $f(z)$ est méromorphe dans ce domaine.*

On sait en effet qu'une suite de fonctions appartenant à une famille normale ne peut converger dans un domaine sans converger uniformément.

6. On peut, dans l'énoncé du théorème qui fait l'objet du paragraphe précédent, supprimer la condition que la limite supérieure des aires couvertes soit inférieure à celle de la sphère. Supposons seulement que cette aire soit bornée et désignons par $4\pi N$ un nombre supérieur aux aires des régions couvertes, chacune d'elles étant comptée autant de fois qu'il y a de feuillets distincts correspondant aux valeurs prises par la fonction. On peut toujours supposer que $N$ est le plus petit entier vérifiant la condition précédente.

Un raisonnement tout à fait semblamble à celui du paragraphe précédent montre que l'on peut associer à chaque fonction $f_n(z)$ trois nombres $a_n$, $b_n$, $c_n$ dont les distances sphériques mutuelles sont supérieures à un nombre positif fixe $\varepsilon$ et tels que les fonctions $f_n(z)-a_n$, $f_n(z)-b_n$, $f_n(z)-c_n$ aient moins de $N$ zéros dans le domaine $(D)$. On en déduit que la famille des fonctions $g_n(z)$ est quasi-normale d'ordre total $N$ au plus et qu'il en est de même pour la famille des fonctions $f_n(z)$.

Dans les conditions précédentes, toute suite convergente converge informément sauf peut-être en $N$ points au plus.

En particulier, si les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes et si la limite $f(z)$ est toujours finie, la convergence est partout uniforme. En d'autres termes:

*Si une suite de fonctions holomorphes dans un domaine $(D)$ converge en chaque point de ce domaine et si les aires des régions couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs de ces fonctions restent bornées, la suite converge uniformément dans l'intérieur de $(D)$.*

7. Voici une application des théorèmes qui précèdent. Soit $f(z)$ une fonction entière ou méromorphe dans le plan. On sait que la famille des fonctions

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

definies dans le cercle $|z| \leqslant 1$ n'est pas normale dans ce cercle. Elle admet un point irrégulier qui est distinct de l'origine $O$ si $f(z)$ n'est pas une fonction de genre zéro du type exceptionnel défini par M. Ostrowski [8]). Dans tous les autres cas, soit $P$ un

[8]) Ueber Folgen analytischer Funktionen, etc. (Mathematische Zeitschrift, Bd. 24, 1923, p. 241).

point irrégulier distinct de l'origine. Dans un petit cercle $(\gamma)$ de centre $P$, l'aire couverte par $f_n(z)$ ne peut demeurer inférieure à celle de la sphère de Riemann. Or, l'aire couverte par $f_n(z)$ lorsque $z$ est dans $(\gamma)$ est la même que l'aire couverte par $f(z)$ lorsque $z$ est dans le cercle $(\gamma_n)$ homothétique de $(\gamma)$ par rapport au point $O$ et dans le rapport $2^n$. Désignons par $\Delta$ la demi-droite $OP$: *Dans tout angle si petit soit-il ayant $\Delta$ pour bissectrice intérieure, il existe une infinité de cercles $(\gamma_n)$ tels que l'aire sphérique couverte par les images des valeurs de $f(z)$ lorsque $z$ est dans $(\gamma_n)$ ait pour limite l'aire de la sphère.*

De même si l'on excepte certaines fonction méromorphes de genure zéro du type particulier défini par M. Walter Saxer [9]), on sait que la famille $f_n(z)$ ne peut être quasi-normale d'ordre fini. On en déduit la proposition suivante:

*Pour toute fonction méromorphe non exceptionnelle, il existe une droite $\Delta'$ telle que tout angle si petit soit-il ayant $\Delta'$ comme bissectrice intérieure contienne une infinité de cercles $(\gamma_n)$ pour lesquels l'aire sphérique couverte par les images des valeurs de $f(z)$ augmente indéfiniment.*

Ces propositions s'étendent aisément aux fonction $f(z)$ méromorphes autour d'un point essentiel isolé. Elles sont à rapprocher des résultats de M. Milloux [10]).

---

[9]) Math. Annalen. 1928.

[10]) Le théorème de M. Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières. (Journal de Mathématiques, s. 9, t. III, 1924, p. 347). — Sur le théorème de M. Picard (Bull. de la Soc. Math. de France, t. LIII, 1929, p. 181).