# Sur une inégalité relative aux fonctions convexes.

Par

JOVAN KARAMATA.

Soient donnés $n$ nombres $x_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, situés tous dans un intervalle $(a, b)$. Jensen[1]) a montré que l'inégalité

$$(1) \qquad f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$$

est valable pour toute fonction $f(x)$ convexe dans l'intervalle $(a, b)$. Cette inégalité fournit une borne inférieure à la somme $\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$. En cherchant à déterminer une borne supérieure à cette même somme je suis arrivé à me poser la question suivante:

*Soient $x_\nu$ et $X_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, 2n nombres situés dans un intervalle $(a, b)$. Quelles relations mutuelles doit-il exister entre ces nombres pour que l'inégalité*

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(X_\nu),$$

*ait lieu pour toute fonction $f(x)$ convexe dans $(a, b)$?*

En désignant par $x(t)$, resp. $X(t)$, le nombre des $x_\nu$, resp. $X_\nu$, inférieurs ou égals à $t$, c. à. d.

---

1) *J. Jensen,* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica *30*, p. 175—193 (1905).

$$(3) \qquad x(t) = \sum_{x_\nu \leq t} 1 \quad \text{et} \quad X(t) = \sum_{X_\nu \leq t} 1 \,,$$

les expressions figurant dans l'inégalité (2) peuvent s'exprimer sous forme d'integrales de Stieltjes, de sorte que la question proposée revient à la suivante:

*$x(t)$ et $X(t)$ étant deux fonctions non decroissantes dans $(a, b)$, à quelles conditions doivent-elles satisfaire pour que l'inégalité*

$$(4) \qquad \int_a^b f(t)\, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b f(t)\, d\{X(t)$$

*ait lieu pour toute fonction $f(t)$ convexe dans $(a, b)$?*

Or, pour que l'inégalité (4) ait lieu pour toute fonction convexe il faut qu'elle soit verifiée par toute fonction linéaire $at+b$. Mais les constantes $a$ et $b$ pouvant prendre des signes quelconques l'inégalité (4) n'aura lieu que lorsque

$$(5) \quad \int_a^b d\{x(t)\} = \int_a^b d\{X(t)\} \quad \text{et} \quad \int_a^b t d\{x(t)\} = \int_a^b td\{X(t)\}.$$

En prenant, en particulier, $x(a) = X(a) = 0$, ce qui ne restreint pas la généralité, ces conditions prennent la forme

$$(6) \quad x(a) = X(a) = 0\,, \quad x(b) = X(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b x(t)\, dt = \int_a^b X(t)\, dt\,.$$

D'autre part, puisque toute fonction convexe $f(t)$, à un terme linéaire $at+b$ près, peut être uniformement approximée par des sommes de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,n} \,|\, t - u_{\nu,n} \,| \quad \text{à coefficients} \quad a_{\nu,n} \geqslant 0\,,$$

pour que l'inégalité (4) soit satisfaite pour toute fonction convexe $f(t)$ il faut et il suffit que les conditions (5) soient satisfaites, et que l'on ait

$$(7) \qquad \int_a^b |\, t-u \, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b |\, t-u \,|\, d\{X(t)\}$$

pour tout $u$.

Or, en supposant que les conditions (6) sont satisfaites, il est facile de voir que la condition (7) est équivalente à la suivante:

il faut et il suffit, outre les conditions (6), que l'on ait

$$(8)\qquad \int_a^u x(t)\,dt \leqslant \int_a^u X(t)\,dt, \quad \text{pour tout} \quad a \leqslant u \leqslant b.$$

En effet, en posant

$$2\max(x, y) = |x-y| + (x+y),$$

d'après (5) et (7) on a

$$\int_a^b \max(t, u)\, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b \max(t, u)\, d\{X(t)\},$$

c. à. d.

$$u\int_a^u d\{x(t)\} + \int_u^b t\,d\{x(t)\} \leqslant u\int_a^u d\{X(t)\} + \int_u^b t\,d\{X(t)\},$$

d'où, en tenant toujours compte des relations (6), l'on obtient facilement l'inégalité (8). Inversement de l'inégalité (8) et des relations (6) il résulte l'inégalité (7).

Cela nous conduit au résultat suivant:

*Pour que l'inégalité* (4) *soit vérifiée pour toute fonction convexe* $f(t)$, *il faut et il suffit que les conditions* (6) *et* (8) *soient satisfaites.*

Pour appliquer ce résultat à l'inégalité (2) il est préférable d'exprimer la condition (8) sous une autre forme, qui découle du lemme suivant:

Lemme. *Soient* $x(t)$ *et* $X(t)$ *deux fonctions non décroissant dans* $(a, b)$ *et satisfaisant aux conditions* (6); *soient* $y(t)$ *et* $Y(t)$ *leurs inverses. De l'inégalité* (8) *il résulte*

$$(9)\qquad \int_0^u y(t)\,dt \geqslant \int_0^u Y(t)\,dt, \quad o \leqslant u \leqslant x(b) = X(b),$$

*et inversement.*

Or, en prenant pour $x(t)$ et $X(t)$ les fonctions définies par (2), les $x_\nu$ et $X_\nu$ étant supposés rangés par ordre de grandeur, on a

$$\int_0^k y(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \quad \text{et} \quad \int_0^k Y(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} X_\nu\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

de sorte que ces résultats, appliqués aux sommes (2) nous fournissent, en définitif le

Théorème. *Pour que l'inégalité*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(X_\nu)$$

*ait lieu pour toute fonction convexe* $f(t)$, *il faut et il suffit que*

$$\sum_{\nu=1}^{k} X_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\,, \quad \textit{pour tout} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1\,, \tag{10}$$

*et*

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\,, \tag{11}$$

*les nombres* $x_\nu$ *et* $X_\nu$ *étant supposés rangés par ordre de grandeur.*

Remarquons enfin, que ce résultat contient comme cas particulier l'inégalité (1) de Jensen. Car en multipliant l'inégalité (1) par $n$, elle prend la forme de l'inégalité (2) où tous les termes du membre gauche sont égaux entre eux. Et pour s'assurer que dans ce cas les conditions (10) et (11) sont vérifiées il suffit de remarquer que, les $x_\nu$ étant rangées par ordre de grandeur, on a

$$\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\,,$$

pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$; pour $k = n$ l'égalité ayant évidamment lieu.

Beograd, le 13 mai 1932.