Jntégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre par les éléments intégrables.

Par

NICOLAS SALTYKOW.

1. Dans les pages qui vont suivre, il s'agit d'étudier en détail le problème qui se pose toutes les fois que l'on a un élément intégrable d'une équation, ou d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles à une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes.

Considérons, pour fixer les idées, le système des m équations en involution,

$$(1) \qquad \begin{cases} F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

vérifiant la condition

$$(2) \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \gtrless 0,$$

Formons, maintenant, le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles de la fonction inconnue f, à savoir:

$$(3) \qquad \begin{cases} (F_k, f) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

les parenthèses désignant celles de Poisson.

Si l'on connaît le système complet des intégrales distinctes de ce dernier système (3), dont les m premières intégrales sont représentées par les fonctions figurant aux premiers membres des équations (1), alors l'intégrale complète du système (1) s'obtient, comme il est bien connu, par une quadrature (v. *N. Saltykow. — Sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Mémoires de l'Académie R. de Beglique Cl. des Sc. Col. in 4°. Deux. Série, t. VI, fasc. 4. Bruxelles 1925. Chapitre III, n° 24, p. 44).

2. Le sujet de cette Note concerne un système incomplet des intégrales distinctes formant un *élément intégrable* du système lineaire (3) Dans ce dernier cas, comme on le sait bien le problème d'intégration des équations (1) se réduit au premier problème que l'on vient de citer. Mais, dans cette dernière hypothèse, le système (1) sera remplacé par un autre, d'une forme toute particulière, jouissant de certaines propriétés que l'on va étudier dans les lignes suivantes.

Supposons, par exemple, que *l'élément intégrable* du système (1) soit donné par l'ensemble des intégrales distinctes du système (3), à savoir:

$$(4) \qquad F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}, \; (\varrho < n-m),$$

formant un groupe fonctionnel.

Cela veut dire qu'en plus *des m fonctions distinguées évidentes* $F_1, F_2, \ldots, F_m$, le groupe (4) posséde encore μ fonctions distinguées que l'on va désigner par

$$(5) \qquad F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_{m+\mu},$$

où l'on a

$$(6) \qquad m+\mu+\varrho = n \text{ [1]}.$$

Il est alors évident que le problème de l'intégration du système donné (1) revient à intégrer le système des $m+\mu$ équations en involution

$$(7) \qquad \begin{cases} F_k = 0; \quad F_{m+i} = C_i \\ k = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, \mu, \end{cases}$$

C_i désignant μ constantes arbitraires.

Le système formé (7) jouit de la propriété, que le système linéaire correspondant, à savoir:

[1] v. *N. Saltykow* — Sur la théorie des équations... Chapitre VII n° n° 67, 68, p. 111.

$$(8) \qquad \begin{cases} (F_k\,, f)=0; & (F_{m+i}, f)=0\,, \\ k=1,2,\ldots,m; & i=1,2,\ldots,\mu, \end{cases}$$

posséde le système complet des intégrales distinctes (4).

Il va sans dire que les fonctions distinguées (5) représentent des fonctions des intégrales connues

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}.$$

Si l'on introduit donc l'hypothèse, que

$$(9) \qquad D\left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_{m+\mu}}{f_{n+\rho-m-\mu+1}, f_{n+\rho-m-\mu+2}, \ldots, f_{n+\rho-m}}\right) \gtrless 0,$$

alors le système complet des intégrales (4) peut être remplacé par le systéme suivant des intégrales distinctes:

$$(10) \quad F_1, F_2, \ldots F_m, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots F_{m+\mu}, f_1, f_2, \ldots f_{n+\rho-m-\mu}.$$

Par conséquent, toutes les fois que l'on connaît les fonctions distinguées (5) du groupe (4), le problème de l'intégration du système (1) revient à celui du n⁰ 1.

3. Or, il est aisé d'étendre ce dernier résultat au cas où les fonctions distinguées (5) restent inconnues.

Comme on le sait, le calcul des fonctions (5) exige l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue [2]). La généralisation, dont il s'agit, présente l'avantage d'éviter l'intégration du système mentionné définissant les fonctions distinguées (5).

S. Lie avait démontré, que le nombre μ des fonctions (5) peut être néanmoins établi par le calcul algébrique de l'ordre du déterminant caractéristique, à savoir:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2\rho,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\rho,2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2\rho,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,2\rho} & \alpha_{2,2\rho} & \ldots & \alpha_{2\rho,2\rho} \end{vmatrix},$$

[2]) v. *N. Saltykow* — Sur la théorie des équations... Chapitre VII, n⁰ n⁰ 59, 63, p. p. 99, 105.

les α_{is} représentant les parenthèses de Poisson formées par les deux intégrales f_i et f_s.

Le nombre pair 2ϱ désigne l'ordre de ce dernier déterminant caractéristique, $n+\varrho$ étant le nombre total des intégrales connué (4).

Cela étant, les *fonctions distinguées en question sont en nombre égal à l'excès de celui n, des variables indépendantes, sur le nombre* ϱ, c'est-à-dire que d'après l'égalité (6), l'on a:

$$m+\mu = n-\varrho. \tag{11}$$

Ces préliminaires posés, on se passe aisément du calcul des valeurs explicites pour les fonctions distinguées (5), grâce aux considérations suivantes:

Le but de la démonstration requise est de montrer que l'expression

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s\,, \tag{12}$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations que l'on obtient en égalant à zéro les m premières intégrales (4) et en posant toutes les autres égales à des constantes arbitraires distinctes.

4. Observons, tout d'abord, que si l'on connaît les fonctions distinguées (5) sous leur forme explicite, l'élément intégrable considéré étant représenté par les intégrales (10), le théorème, dont il s'agit, devient un corollaire immédiat de la théorie des caractéristiques généralisées [3]).

Il importe donc à présent de se borner seulement à l'hypothèse de l'existence des fonctions distinguées et à la connaissance de leur nombre, sans connaître leur forme explicite.

Supposons, pour cela, que les équations

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = 0\,, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0\,, \\ f_1 = C_1\,, \quad f_2 = C_2, \ldots, f_{n+\varrho-m} = C_{n+\varrho-m}\,, \end{array}\right. \tag{13}$$

vérifiant la condition

[3]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier — Villars 1931, Chapitre V, n⁰ 22, Chapitre VI, n⁰ 30.

$$(14)\quad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}}{p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n, x_{n-\rho+1}, \ldots, x_n}\right) \gtrless 0,$$

nous donnent les formules suivantes:

$$(15)\quad \begin{cases} x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}), \\ \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho, \\ p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}), \\ \quad s = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Il est évident que ces dernières valeurs (15), étant substituées dans les équations (13), les rendent identiquement satisfaites.

En différentiant, par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}$, les identités obtenues de cette manière, on en tire les nouvelles identités, à savoir:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_l}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \dfrac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{n} \dfrac{\partial F_l}{\partial p_s} \dfrac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0 \\ l = 1, 2 \ldots, m; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho. \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \dfrac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{n} \dfrac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} \dfrac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho. \end{cases}$$

On met, d'autre part, les conditions d'involution que vérifient les équations (13)

$$(18)\quad \begin{cases} (F_k, F_l) = 0, \quad (F_k, f_\sigma) = 0, \\ k, l = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \\ \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m, \end{cases}$$

sous la forme explicite suivante:

$$\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial x_h} \frac{\partial F_l}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \frac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} = 0,$$

$$k, l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m.$$

En substituant dans ces dernières formules les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_l}{\partial x_h}$ et $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h}$ définies par les égalités (16) et (17), il en résulte les nouvelles identités:

$$\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_s}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} + \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \right) = 0,$$

$$l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} + \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \right) = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m.$$

Les identités obtenues, au nombre de $n+\varrho$, sont linéaires et homogènes par rapport à $n+\varrho$ expressions mises en parenthèses, et cela pour chacune des valeurs de l'indice k, à partir de 1 à m.

Puisque le déterminant formé par les coefficients qui se trouvent auprès des expressions citées, est égale à celui du premier membre de l'inégalité (14), il s'ensuit que les expressions mises en parenthèses s'annulent identiquement. On a, donc, les identités suivantes:

$$(19) \quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho, \\ \sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

5. Nous allons, à présent, profiter des propriétés que jouissent les fonctions distinguées, dont l'existence à été établie, en les introduisant dans nos considérations théoriques, qui vont être développées. Cela posé, les fonctions distinguées vont disparaître d'elles mêmes dans les formules définitives, dont on devra se servir pour les applications pratiques.

Le point le plus délicat est de montrer que les valeurs antérieurement obtenues (15) doivent encore vérifier identiquement les équations aux dérivées partielles des caractéristiques de N. Saltykow [4]) correspondantes au système en involution (7).

En effet, puisque chacune des suites des fonctions (4) et (10) représente un système complet des intégrales distinctes du système (8), comme il résulte, d'ailleurs, de la définition même des fonctions distinguées, on a les égalités

$$
(20) \qquad F_{m+i} \equiv \Theta_i\,(f_1, f, \ldots, f_{n+\rho-m}), \qquad i = 1, 2, \ldots, \mu,
$$

où les fonctions Θ_i admettent des valeurs bien déterminées.

La substitution des valeurs (15), dans les égalités (20), produit les identités suivantes:

$$
F_{m+i}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \\
= \Theta_i\,(C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho+m}), \\
i = 1, 2, \ldots, \mu.
$$

Il en résulte de nouvelles identités que l'on obtient par différentiation de ces dernières par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$
(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{m+i}}{\partial x_h} + \sum\limits_{j=1}^{\rho} \dfrac{\partial F_{m+i}}{\partial x_{n-\rho+j}} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} + \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial F_{m+i}}{\partial p_h} \dfrac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho, \end{array} \right.
$$

Les fonctions F_{m+i} vérifient de même les conditions d'involution suivantes:

---

[4]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris Gauthier-Villars 1931, p. p. 41 et 48.

$$(F_{m+i}, F_l) = 0 \, , \quad (F_{m+i}, f_\sigma)$$

$$i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad l = 1, 2, \ldots, m; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m \, .$$

L'application à ces dernières formules et aux égalités (21) et (17) des considérations analogues à celles que l'on vient d'exposer, conduit immédiatement à étendre les formules (19) aux fonctions considérées F_{m+i}.

Nous allons, donc complèter les égalités (19), en les remplaçant par celles qui vont suivre:

$$(22) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-\rho+j}} \, , \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho \, , \\ \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k} = - \frac{\partial F_r}{\partial x_s} \, , \quad s = 1, 2, \ldots, n \, , \\ \qquad r = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+\mu \, . \end{cases}$$

6. Grâce à ces dernières, les identités (16) et (21) vont devenir, en y substituant les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_r}{\partial x_h}$, $\frac{\partial F_r}{\partial x_{n-\rho+j}}$ et $\frac{\partial F_r}{\partial p_{n-\rho+j}}$, tirées des formules (22):

$$(23) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \left[\frac{\partial \psi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \right] = 0 \, , \\ \qquad r = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+\mu; \quad h = 1, \ldots, n-\varrho \, . \end{cases}$$

Observons que la relation citée antérieurement (11) démontre l'égalité des deux nombres

$$m+\mu \quad \text{et} \quad n-\varrho \, ,$$

Les égalités (23) sont linéaires et homogènes par rapport aux expressions qui y figurent entre crochets. Supposons, de plus, que le déterminant fonctionnel

$$(24) \qquad D \left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1}, \ldots, F_{n-\rho}}{p_1, p, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_{n-\rho}} \right)$$

[5] N. *Saltykow*. — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars, 1931 p. 47 n⁰ 25.

soit différent de zéro.

Si cette dernière hypothèse n'avait pas lieu, il suffirait de faire la transformation des variables d'après les indications de la théorie dite de perfectionnement [5]).

Revenant à l'hypothèse que le déterminant (24) n'était pas nul, considérons le système de $m+\mu \equiv n-\varrho$ égalités (23) correspondantes à une valeur quelconque de l'indice h.

Il en résulte les $n-\varrho$ identités suivantes

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) = 0 ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-\varrho ,$$

et cela pour chaque valeur de l'indice h, à partir de 1 jusqu'a $n-\varrho$.

Or, les identités obtenues se mettent bien sous la forme comme il suit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\psi_h + \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} \right) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\psi_k + \sum_{j=1}^{\rho} \psi_{n-\rho+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) ,$$

pour toutes les valeurs distinctes des deux indices k et h, à partir de 1 jusqu'à $n-\varrho$.

Les identités que l'on vient d'obtenir démontrent que les expressions des variables (15) rendent effectivement la relation (12) une différentielle exacte.

Donc l'intégration du système considéré (1) s'achève par la quadrature de cette dernière différentielle exacte et par des éliminations algébriques [6]).

7. Comme application de la théorie exposée considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue à trois variables indépendantes, à savoir

(25) $$F_1 \equiv (p_1 + x_2)(p_2 + x_3)(p_3 + x_1) - a = 0 \text{ }^{7)}.$$

Les équations différentielles des caractéristiques correspondantes possédent trois intégrales

[6]) *N. Saltykow.* — Sur la théorie des équations... Chapitre VI, p. 76.

[7]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars. 1931, p. 28 n⁰ 15.

$$(26) \quad f_1 \equiv p_1 + x_3 = C_1; \quad f_2 \equiv p_2 + x_1 = C_2; \quad f_3 \equiv p_3 + x_2 = C_3,$$

vérifiant les conditions

$$(f_1, f_2) \equiv 1, \quad (f_1, f_3) \equiv -1, \quad (f_2, f_3) \equiv 1,$$

C_1, C_2, C_3 étant trois constantes arbitraires distinctes.

Le déterminant caractéristique étant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1 \gtrless 0,$$

il s'ensuit que $\varrho \equiv 1$ et qu'en effet le groupe des intégrales citées engendre un élément intégrable.

Par conséquent, dans le cas considéré, la formule (12) devient une différentielle exacte, en vertu de l'équation (25) et des intégrales données (26).

En effet, ces dernières relations nous donnent les formules suivantes:

$$x_3 = \frac{1}{2}(C_3 - C_1 + x_1 + x_2 \pm R),$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_3 - x_1 - x_2 \mp R),$$

$$p_2 = C_1 - x_1, \qquad p_3 = C_2 - x_2,$$

où l'on a posé

$$R \equiv \sqrt{(C_1 + C_3 + x_2 - x_1)^2 + \frac{4a}{x_2 - x_1 - C_2}},$$

Il en découle pour dz la différentielle exacte:

$$dz = \frac{1}{2}(C_1 + C_3 - x_1 - x_2 \mp R)\, dx_1 + (C_1 - x_1)\, dx_2$$

$$+ \frac{1}{2}(C_2 - x_2)\, d\,(x_1 + x_2 \pm R),$$

dont l'intégrale s'obtient par une quadrature sous la forme suivante

$$z = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)\, x_1 + \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) x_2 - x_1 x_2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}$$

$$\pm\frac{1}{2}(C_2-x_2)\,R\pm\frac{1}{2}\int Rd\,(x_2-x_1)+C\,,$$

C étant la constante arbitraire additive.

L'intégrale complète de l'équation donnée (25) en dérive par les opérations d'éliminations algébriques, qui viennent d'être mentionnées.