Un problème sur la chaleur rayonnante.

Par

MICHEL PETROVITCH.

On a déjà songé que l'observation à distance de la température propre d'un iceberg pourra peut-être servir à déceler sa proximité. Des appareils calorimétriques perfectionnés, des thermo-multiplicateurs extra-sensibles, permettent aujourd'hui de déceler, sous certaines conditions, à quelques kilomètres de distance, une source assez faible de chaleur, par l'energie rayonnante qu'elle émet. Bien qu'il n'y ait pas une grande différence de température entre l'iceberg et l'air ambiant, la sensibilité des instruments permet d'espérer relever la proximité d'un iceberg de taille moyenne lorsque l'air ambiant est de quelques degrés plus chaud que celui de l'iceberg.

Ayant, lors d'un voyage dans la région polaire en été 1931, réfléchi à ce problème, j'ai pensé qu'il serait possible, du moins théoriquement, d'établir une correspondance mathématique entre les indications de l'instrument et la distance de l'iceberg. C'est l'idée qui sera exposée dans ce qui suit, sous la forme d'un problème purement théorique que, sous certaines restrictions, on peut résoudre d'une manière très simple. Il n'y sera point question de l'applicabilité pratique de la solution.

Supposons qu'en un point B de l'espace se trouve un appareil thermo-multiplicateur, composé d'une chaîne thermo-électrique et d'un galvanomètre très sensible. Il existe de tels appareils, transformant l'énergie rayonnante en très faible courant thermo-électrique mesurable par un galvanomètre à résistance très faible, dont la sensibilité va jusqu'à 10^{-9} volts et 10^{-11} ampères.

Supposons également qu'avant d'être exposé à l'influence de la chaleur rayonnante d'une source, l'instrument soit orienté de manière que les spires du galvanomètre soient parallèles à la direction de son aiguille. La quantité de chaleur reçue ou perdue par la chaîne thermo-électrique sera mesurée par le sens et la grandeur de la déviation de l'aiguille; entre certaines limites il existe la proportionnalité entre cette déviation et la quantité de chaleur.

Supposons enfin:

1° qu'en un point A de l'espace, à la distance x du point B, se trouve une source de rayonnement calorifique dont la température est T_1 et que ses radiations influencent le thermo-multiplicateur qui se trouve en B;

2° qu'à cette influence s'ajoute celle de la chaleur de l'air ambiant, porté à la température T_0.

Quelle sera la correspondance entre l'influence simultanée de ces deux facteurs et les déviations de l'aiguille du galvanomètre?

Tout d'abord, il y a, entre certaines limites, proportionnalité entre la déviation et la quantité de chaleur reçue ou perdue par la chaîne thermo-électrique. D'autre part, il y a proportionnalité entre cette quantité de chaleur et la température de la chaîne. Il y a donc, du moins dans certaines limites des températures, la proportionnalité entre celle-ci et la déviation de l'aiguille.

Or, la température en B varie sous l'influence de deux causes 1° et 2°. La loi exacte de rayonnement serait celle de Stefan-Boltzman, mais pour les températures ne dépassant pas une certaine limite elle se réduit sensiblement à la loi de Newton: la quantité de chaleur que, dans l'unité de temps, reçoit ou perd le corps exposé á l'influence d'une source de chaleur, est proportionnelle à la différence des températures du corps et de la source. Nons nous en tiendrons à cette loi suffisante pour les différences de température que nous supposons dans le problème envisagé. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles régissant le problème dans le cas général se ramène à une équation différentielle ordinaire dans laquelle la distance x joue le rôle de paramètre et qu'on peut aussi former directement de la manière suivante:

L'influence de la cause 1° sur la température T au point B à l'instant t, nulle lorsque $T = T_1$ et d'autant plus sensible que la différence $T - T_1$ est plus grande, sera inversement proportionnelle au carré de la distance x. Elle décroît, en même temps, par suite de l'absorption des radiations de la source A par l'atmosphère, et cela de manière qu'à distance x de A elle sera égale à celle correspondant à l'unité de distance multipliée par le facteur exponentiel e^{-kx}, où k est la constante positive définissant le pouvoir absorbant de l'atmosphère dans la direction AB. Cette influence tend à égaliser les températures T et T_1; l'accroissement dT qui lui est dû est proportionnel à la différence $T - T_1$ et de signe contraire à celui de cette différence. Il en est de même de l'influence de la cause 2° proportionnelle à la différence $T - T_0$, de sorte que les variations de la température T au cours du temps t, sous l'action simultanée de ces deux causes, seront régies par une équation différentielle de la forme

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{ae^{-kx}}{x^2}(T - T_1) - b\,(T - T_0$$

(où a et b sont deux constantes positives) ou bien

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} + \left(b + \frac{ae^{-kx}}{x^2}\right)T - \left(bT_0 + \frac{ae^{-kx}}{x^2}T_1\right) = 0\,,$$

où la distance x joue le rôle de paramètre.

L'intégrale générale est

$$T = V(x) + C(x)\,e^{-\left(\frac{ae^{-kx}}{x^2} + b\right)t}$$

où, en posant $\frac{a}{b} = \alpha$, on aura

$$V(x) = \frac{T_0 + \frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}T_1}{1 + \frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}}\,,$$

$C(x)$ étant la constante d'intégration, dépendant de x. Cette constante est à déterminer par la condition que pour $t=0$ on ait $T=T_0$, d'où l'on tire

$$C(x) \quad \frac{\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}(T_0-T_1)}{1+\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}}.$$

La dérivée $\frac{dT}{dt}$ ayant le signe contraire à celui de la différence T_0-T_1, si $T_0>T_1$ la température T décroîtra au cours du temps partant de la température T_0; si $T_0<T_1$ elle croîtra à partir de T_0. Et comme le facteur exponentiel décroît constamment au cours du temps et tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, la température T tendra vers la limite

$$T' = V(x)\,, \tag{2}$$

comme fonction monotone décroissante ou croissante, suivant que la différence T_0-T_1 est positive ou négative. Après un temps suffisamment long, elle se confondra avec la température T' dont elle ne différera plus sensiblement. La température T' est la *température stationnaire* en B, déterminée d'après l'équation (1) par la condition

$$\frac{dT}{dt}=0\,.$$

La relation

$$T'-T_0=\frac{T_1-T_0}{1+\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}}\left(\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}\right)$$

montre alors que T' différera de moins en moins de T_0 lorsque la distance x augmente et se confondra avec celle-ci à une distance suffisamment grande.

L'expression (2) de la température stationnaire contient deux constantes T_0 et T_1 directement mesurables. Elle en contient encore deux constantes α et k qu'on peut déterminer à l'aide des températures stationnaires T_1' et T_2' au point B à deux distances connues x_1 et x_2 $(x_2<x_1)$ à la source A. Les deux équations

$$T_1' = \frac{T_1 + \alpha' x_1^2 e^{kx_1} T_0}{1 + \alpha' x_1^2 e^{kx}},$$

$$T_2' = \frac{T_2 + \alpha' x_2^2 e^{kx_2} T_0}{1 + \alpha' x_2^2 e^{kx_2}},$$

avec la notation $\alpha' = \alpha^{-1}$ fournissent

(3) $$\alpha' x_1^2 e^{kx_1} = \frac{T_1' - T_1}{T_0 - T_1'}, \qquad \alpha' x_2^2 e^{kx_2} = \frac{T_2' - T_1}{T_0 - T_2'},$$

d'où, en divisant on obtient,

(4) $$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^{k(x_2 - x_1)} = \frac{(T_2' - T_1)(T_0 - T_1')}{(T_1' - T_2)(T_0 - T_2')}.$$

On en déterminerait la constante k au moyen des grandeurs directement mesurables

$$x_1,\ x_2,\ T_0,\ T_1,\ T_1',\ T_1'.$$

Cette constante étant calculée, on aurait la constante positive α' p. ex. de la première équation (3) qui fournit

$$\alpha' = \frac{T_1' - T_1}{T_0 - T_1'} \frac{e^{-kx_1}}{x_1^2}.$$

L'équation

$$\alpha' x^2 e^{kx} = \frac{T' - T_1}{T_0 - T_1},$$

fournirait alors la distance x comme abscisse du point d'intersection unique de la parabole

$$y = \alpha' x^2,$$

et de la courbe exponentielle

$$y = Ae^{-kx},$$

où A désigne la constante positive

$$A = \frac{T' - T_1}{T_0 - T_1}.$$

Si l'on désigne par x_1 la distance entre les points A et B à laquelle la température stationnaire au point correspondant B_1 a une valeur fixe T_1', la loi reliant la température T à la distance x s'exprime de la manière suivante: *l'expression*

$$\frac{1}{x-x_1} \log \frac{(T'-T_1)(T_0-T_1)}{(T_1'-T_1)(T_0-T')} \left(\frac{x_1}{x}\right)^2,$$

conserve une valeur invariable pour toutes les distances x et cette valeur est celle du coefficient d'absorption k.

Pour formuler la loi de correspondance entre la distance x et la déviation de l'aiguille du galvanomètre, désignons:

1° par δ_1 la déviation, qui ne serait dûe qu'à la différence T_0-T_1, de la température ambiante et celle de la source A;

2° par δ_2 la déviation qui ne serait dûe qu'à la différence T_0-T' de la température ambiante et la température stationnaire en B;

3° par δ_3 la déviation dûe à la différence T_1-T' de la température de la source et la température stationnaire en B;

4° par δ_4 la déviation dûe à la différence T_1-T_1' de la température de la source et la température stationnaire en B_1.

Remplaçons dans la formule (4) x_2 par x et T_2' par T'; les déviations δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 seront proportionnelles aux différences correspondantes de température

$$T_0-T_1, \qquad T_0-T', \qquad T_1-T', \qquad T_1-T_1',$$

le coefficient de proportionnalité étant le même pour toutes ces différences. L'expression

$$\frac{1}{x-x_1} \log \left[\frac{\delta_1\ \delta_3}{\delta_2\ \delta_4} \left(\frac{x_1}{x}\right)^2\right]$$

garde, donc, pour toute distance x, une valeur invariable et égale au coefficient d'absorption k.

Si l'on pose alors

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} = \beta x^2 e^{kx},$$

on trouve

$$\beta = \frac{\delta_4}{\delta_1} \frac{e^{-kx_1}}{x_1^2}.$$

Or, les déviations δ_1 et δ_4 ne dépendent pas de x; β est donc une constante par rapport à x, de sorte que la loi de correspondance entre les déviations δ_2, δ_3 et la distance x s'exprime de la manière suivante:

L'expression

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} \frac{e^{-kx}}{x^2}$$

conserve une valeur invariable pour toutes les distances x.

Dans le cas où l'absorption de l'atmosphère est négligeable, cette loi prend la forme suivante:

Le rapport $\frac{\delta_2}{\delta_3}$ *est inversement proportionnel au carré de la distance de l'appareil à la source.*