Publications of the Department of Astronomy — Beograd, № 6, 1976.

PERTURBOJ DE PLANEDETOJ
ESPRIMITAJ PER KOREKTATAJ SUNCENTRAJ POZICIO KAJ RAPIDO

Prof. Boĵ. Popović
Trafika Fakultato de la Universitato Beograd

Por solvado de la ekvacio de perturbata moviĝo de donita planedeto (kometo)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + r^{-3}\,\vec{r} = \delta \cdot \vec{F} \tag{1}$$

kun ajnspeca eta perturboforto (δ. $\vec{F}$, kie estas apartigita kiel la faktoro eta kvanto δ, nur por elstarigi la sumatojn kiujn oni povas flankenlasi en la „nula" proksimumigo), oni povas apliki la metodon de la variigo de konstantoj. Tiu metodo estas principe la sama por ĉiuspece prenitaj orbitelementoj, sed en la fina formo plene dependas de la elekto de la elementoj. Kiam oni ekiras de la komencaj vektoroj por la pozicio kaj rapido ($\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, en la momento t_0), kiel la vektoraj orbitelementoj, eblas same apliko de la varimetodo de la konstantoj por akiri la esprimojn por perturboj de ĉi tiuj elementoj — kvankam la vojo estas memkompreneble iom komplika (v. ekz. la du verketojn menciitajn en la literaturo fine de la teksto).

Okupiĝante pri ĉi tiu problemo mi venis al tre interesaj, tre simplaj korektaĵoj de la komencaj vektoroj (por la pozicio kaj la rapido), permesantaj trovi novajn pozicivektorojn same kiel la moviĝo estus neperturbata. Mi konsideras utile publikigi la koncernajn esplorojn.

En la unua parto de la verketo estas donita nur la principo de la nova solvo. En la dua parto estas donitaj rilatoj kun la kutimaj grandoj kaj estas ebligita kalkulado de la Lagrange-koeficientoj por la rapido pere de la koncernaj koeficientoj (f, g) por la pozicivektoro. En la tria parto oni esprimis novan sendependan variablon („la reguliga anomalio") kiel funkcion de la tempo (la koncerna esprimo estas iom plisimpligita en la sesa parto). La kvara parto de la verketo donas la esprimojn por f, g, dum la kvina parto transformas ĉi tiujn esprimojn en pli simplajn formojn.

Serĉu integrigan faktoron (f) por la ekvacio (1):

$$\frac{d}{dt}\left(f\frac{d\vec{r}}{dt}\right)-\frac{df}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}+fr^{-3}\vec{r}=\delta f\,\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\frac{d\vec{r}}{dt}-\vec{r}\frac{df}{dt}\right)+\left(\frac{d^2f}{dt^2}+fr^{-3}\right)\vec{r}=\delta f\vec{F}$$

Starigu la postulon ke tiu faktoro plenumu la kondiĉon

(2) $$\frac{d^2f}{dt^2}+fr^{-3}=0$$

kun la ekiraj kondiĉoj

$$t=0\ :f=1,\ f'=0$$

$$\vec{r}(0)=\vec{r}_0,\quad \vec{r}'_0=\vec{v}_0$$

Tiam eblos integrigi la supran ekvacion kaj trovi

(3) $$f\frac{d\vec{r}}{dt}-\vec{r}\frac{df}{dt}\frac{1}{f}=\vec{v}_0+\delta\int_0^t f\vec{F}\,dt$$

Se oni nun multiplikas la lastan ekvacion per (provizore signita)

(4) $$\gamma'=f^{-2}$$

oni havos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\vec{r}\right)=\gamma'\vec{v}_0+\delta\gamma'\int_0^t f\vec{F}\,dt$$

$$\frac{1}{f}\vec{r}-\vec{r}_0=\gamma\vec{v}_0+\delta\int_0^t\left[\int_0^t f\vec{F}\,dt\right]d\gamma$$

$$\vec{r}=f\vec{r}_0+f\gamma\vec{v}_0+\delta f\left[\gamma\int_0^t f\vec{F}\,dt\right]-\int_0^t\gamma f\vec{F}\,dt$$

Novaj signaĵoj

$$(5) \qquad f\gamma = g, \quad \vec{r}_0 - \delta \int_0^t g\,\vec{F}\,dt = \vec{r}_p, \quad \vec{v}_0 + \delta \int_0^t f\,\vec{F}\,dt = \vec{v}_p$$

donos la finan formon kiel en la neperturbata moviĝo

$$(6) \qquad \vec{r} = f\,\vec{r}_p + g\,\vec{v}_p,$$

kie $\vec{r}_p$, $\vec{v}_p$, montriĝas kiel la novaj, ete korektitaj (rilate al $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$), vektoraj orbitelementoj. Sede, ĉi tiu solvo estos nur la formala, ĝis oni ne trovos la koncernajn esprimojn por f, g (depende de la tempo kaj de la ekiraj kondiĉoj).

Estas interesaj, ĝuste pro la rolo de la novaj elementoj, ankoraŭ kelkaj rilatoj. Unue oni havas

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt}\,\vec{r}_p + \frac{dg}{dt}\,\vec{v}_p - \delta fg\,\vec{F} + \delta gf\vec{F}$$

$$(7) \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = f'\,\vec{r}_p + g'\,\vec{v}_p$$

Plue, surbaze de la ligoj kaj la signaĵoj (4) kaj (5), estos

$$(fg' - gf')\,f^{-2} = (g/f)' = \gamma' = f^{-2}$$

$$(8) \qquad fg' - gf' = 1,$$

kaj oni ja havos ankoraŭ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f''\,\vec{r}_p + g''\,\vec{v}_p - \delta f' g\vec{F} + \delta g' f\vec{F}$$

kaj fine

$$(9) \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f''\vec{r}_p + g''\,\vec{v}_p + \delta\vec{F}.$$

El la komparo de ĉi tio kun (1) kaj (6) sekvas

$$(9a) \qquad f'' = -fr^{-3}, \quad g'' = -gr^{-3}$$

(ĉe kio la unua ligo jam ekzistis kiel la supozo (2) por f).

2.

Estas facile konstateblaj ankaŭ la „integraloj" samformaj kun la integraloj de la neperturbata moviĝo, nome

$$(10) \qquad \vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}_0 + \delta \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F})\,dt$$

ĉe kio la vektoro $\vec{c}$ ne plu estas konstanta sed iomete ŝanĝiĝa grando. Sed estas interesa ĉi tie ke (6) kaj (7), apud la ligo (8), donas

$$\vec{c} = \vec{r}_p \times \vec{v}_p, \tag{10a}$$

kio signifas ke la paroj $(\vec{r}_p, \vec{v}_p)$, $(\vec{r}, \vec{v})$ estas ĉiam en la sama ebeno (la tiumomenta moviĝebeno).

Same estas

$$\vec{v} \times \vec{c} - \vec{r}/r \equiv \vec{e} = \vec{e}_0 + \delta\,\vec{e}_1\,, \quad \vec{e}_1 = \int_0^t [\vec{F} \times \vec{c} + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{F})]\,dt \tag{11}$$

$$\vec{e}_0 = (\vec{v}_0 \times \vec{c}_0) - \vec{r}_0/r_0.$$

Ekzistas nature ankaŭ la „integralo de la viva forto" (kun iomete ŝanĝiĝa la „orbita duonakso" a):

$$\frac{2}{r} - \vec{v}^2 \equiv \frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} - 2\delta \int_0^t \vec{v}\cdot\vec{F}\,dt, \quad \frac{da}{dt} = 2a^2(\vec{v}\vec{F}) \tag{12}$$

kaj samtiel la respektivaj ligoj inter la koncernaj grandoj:

$$e^2 = 1 - c^2/a, \quad c^2 = r + \vec{r}\,\vec{e}, \quad \vec{r}\,\vec{v} = -r(\vec{v}\,\vec{e}), \quad \vec{c}\,\vec{e} = 0 \tag{12a}$$

riceveblaj el la skalara multipliko de (11) per $\vec{e}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{c}$.

Estas interesa ankaŭ ke oni povas simile preni

$$\vec{e}_p \equiv (\vec{v}_p \times \vec{c}) - \vec{r}_p/r_p \quad -1/a_p \equiv \vec{v}_p^{\,2} - 2/r_p \tag{13}$$

kaj starigi la rilatojn analogaj al (12a), t.e.

$$e_p^2 = 1 - c^2/a_p, \quad c^2 = r_p + \vec{r}_p\,\vec{e}_p, \quad \vec{r}_p\,\vec{v}_p = -r_p(\vec{v}_p\,\vec{e}_p), \quad \vec{c}\,\vec{e}_p = 0 \tag{13a}$$

Menciu ĉi tie ke la samaj ligoj ekzistas — el (11a) — ankaŭ por la neperturbata moviĝo, nome

$$e_0^2 = 1 - c_0^2/a_0, \quad c_0^2 = r_0 + \vec{r}_0\,\vec{e}_0, \quad \vec{r}_0\,\vec{v}_0 = -r_0(\vec{v}_0\,\vec{e}_0), \quad \vec{c}_0\,\vec{e}_0 = 0 \tag{13b}$$

La ligon inter $\vec{e}$ kaj $\vec{e}_p$ oni starigas per la derivado:

$$\frac{d}{dt}(\vec{e} - \vec{e}_p) = (\vec{F} \times \vec{c}) + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{F}) - f(\vec{F} \times \vec{c}) - \vec{v}_p \times (\vec{r} \times \vec{F}) +$$
$$+ r_p^{-1} g\vec{F} - \vec{r}_p \cdot r_p^{-3}(\vec{r}_p g\vec{F})$$

do

$$\vec{e} = \vec{e}_p + \delta\,\vec{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \int_0^t [(1 - f)\,(\vec{F} \times \vec{c}) + (\vec{v} - \vec{v}_p) \times (\vec{r} \times \vec{F}) + g r_p^{-3}\,\vec{r}_p \times$$
$$\times (\vec{F} \times \vec{r}_p)]\,dt. \tag{11a}$$

La „integralojn" oni povas tuj utiligi por ricevi la esprimojn por f', g'. Kiam oni multiplikas (11) skalare per $\vec{v}_p$, $\vec{r}_p$ — helpe de (10a) kaj (7) — oni trovas la ligojn

$$(14)\quad \begin{cases} -c^2 f' = \dfrac{1}{r}(f\vec{r}_p\vec{v}_p + g\vec{v}_p^2) + \vec{e}\,\vec{v}_p & \vec{e} = \vec{e}_0 + \delta\,\vec{e}_1 \quad (11) \\ & \text{aŭ} \\ c^2 g' = \dfrac{1}{r}(f\vec{r}_p^2 + g\vec{r}_p\vec{v}_p) + \vec{e}\vec{r}_p & \vec{e} = \vec{e}_p + \delta\,\vec{\varepsilon} \quad (11a) \end{cases}$$

ĉe kio estas

$$(15)\qquad r^2 = f^2\,\vec{r}_p^2 + 2\,f\,g\,\vec{r}_p\,\vec{v}_p + g^2\,\vec{v}_p^2$$

— aŭ ja el (12a)

$$(15a)\qquad r = c^2 - \vec{r}\,\vec{e} = \vec{r}^2_p\,\vec{v}^2_p - (\vec{r}_p\,\vec{v}_r)^2 - (f\,\vec{r}_p + g\vec{v}_p)\,(\vec{\epsilon}_p + \delta\vec{\varepsilon})$$

Per ĉi tio oni esprimis f', g', en funkcioj de $\vec{r}_p$, $\vec{v}_p$, f, g. La du esprimoj redonas la jam trovitan ligon (8).

3.

Oni devas ankoraŭ trovi f, g, por ke oni havu $\vec{r}$, $\vec{v}$, esprimatajn per $\vec{r}_p$, $\vec{v}_p$. Tiucele ni antaŭe trovos esprimon por konvena nova sendependa variablo. El (10) kaj (12) sekvas

$$\vec{c}^2 = \vec{r}^2\,\vec{v}^2 - (\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{r^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - c^2} = (2r - c^2 - r^2/a)^{1/2}$$

La lastan esprimon oni povas senradikigi per enkonduko de nova variablo ξ tian ke

$$(17)\qquad r = A + B\,\cos\xi + C\,\sin\xi,$$

se la koeficientojn oni adaptos al la postulo

$$(16a)\qquad 2r - c^2 - r^2/a = (\alpha + \beta\,\cos\xi + \gamma\,\sin\xi)^2.$$

Sed por ke ĉi tio validu (kun utiligo de $\sin^2\xi = 1 - \cos^2\xi$) devas esti

$$(18)\quad \begin{cases} a^2 + \gamma^2 = 2A - \dfrac{1}{a}(A^2 + C^2) \\ \alpha\beta = B - \dfrac{1}{a}AB \\ \alpha\gamma = C - \dfrac{1}{a}AC \\ \beta^2 - \gamma^2 = -\dfrac{1}{a}(B^2 - C^2) \\ \beta\gamma = -\dfrac{1}{a}BC \end{cases}$$

El la dua kaj la tria egalaĵo sekvas

$$\beta/\gamma = B/C \text{ aŭ } \alpha = 0,\ A = a \tag{19}$$

La unua el la du eblaj solvoj kontraŭas al la unua egalaĵo, ĉar γ el la lasta kun α el la tria, enigitaj en la unuan egalaĵon, kondukas al sola ebleco $c^2 = a$, sed laŭ (12a) tiukaze estus $e = 0$, kio ĝenerale ne ĉiam estas plenumata.

Kaj per la dua solvo (19) la sistemo (18) reduktiĝas al

$$\begin{cases} \gamma^2 = a - c^2 - C^2/a \\ \beta^2 - \gamma^2 = -(B^2 - C^2)/a \\ \beta\,\gamma = -B\,C/a \end{cases} \tag{18a}$$

Unu koeficiento restas nedifinita pro kio oni povas elekti aldonan kondiĉon; ĝi povas esti

$$A + B = r_p, \quad \text{t.e.} \quad B = r_p - a, \tag{18b}$$

kio konkordas kun la postulo mezuri ξ de la ekira momento $t = 0$ (kiam devas esti $r = r_p = r_0$). Tiam el la unuaj du egalaĵoj ni trovas

$$\beta^2 = a - c^2 - \frac{1}{a}(r_p - a)^2 = 2r_p - c^2 - r_p^2/a$$

dum la unua kaj la tria kondukas al

$$\beta^2 = a - c^2 - (r_p - a)^2/a = 2r_p - c^2 - r_p^2/a$$

$$C = -\beta\,\gamma a/(r_p - a), \quad \gamma^2 = (r_p - a)^2/a, \quad C = -(r_p - a)\beta/\gamma = \pm\,\beta\sqrt{a}$$

Fine do

$$\alpha = 0,\ A = a,\ B = r_p - a,\ C = \beta\sqrt{a},\ \beta = (2r_p - c^2 - r_p^2/a)^{1/2},\ \gamma = (a - r_p)/\sqrt{a} \tag{19a}$$

$$r = r_p + (a - r_p)(1 - \cos\xi) + C\sin\xi \tag{20}$$

Kaj tiam (16) kun (16a) esprimiĝas kiel

$$r\frac{dr}{dt} = [C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi]/\sqrt{a} \tag{16b}$$

$$r\,[r_p' + (a' - r'_p)(1 - \cos\xi) + C'\,\mathrm{sing}\,\xi] + r\,[(a - r_p)\sin\xi + C\cos\xi]\frac{dr}{dt} =$$

$$= [C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi]/\sqrt{a}$$

$$r\,d\xi = a^{-1/2}\,dt - r\cdot\frac{a' - (a' - n_p')\cos\xi + C'\sin\xi}{C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi}\,dt \tag{16c}$$

Por integrigi la ĉefan parton de ĉi tiu ekvacio, multipliku ĝin per $(ar_p^{-3})^{1/2}$ kaj signu

(21) $$y = b\,\xi = \xi\,(a/r_p)^{1/2}, \quad n = r_p^{-3/2}, \quad \eta = C(ar_p)^{1/2}, \quad \zeta = 1 - r_p/a$$

post kio estos

$$[b + (b^2 - 1)\,b\,(1 - \cos\xi) + r_p^{-1}\,Cb\sin\xi]\,d\xi = d\,[b\xi + (b^2 - 1)\,b\,(\xi - \sin\xi) +$$

$$+ r_p^{-1}\,Cb\,(1 - \cos\xi)\,] - \xi\,db - (\xi - \sin\xi)\,(3b^2 - 1)\,db - (1 - \cos\xi)\,d\,(Cb/r_p) =$$

$$= n\,dt - r\,\frac{b}{r_p}\,\frac{a' - (a' - r_p')\cos\xi + C'\sin\xi}{C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi}\,dt$$

(a22) $$y + \eta y^2 c_2 + \zeta y^3 c_3 = \int_0^t n\;dt +$$

$$+ \int_0^t \Bigg[(\xi - \sin\xi)\,3b^2\,b' + b'\sin\xi + (Cbr_p^{-1})'\,(1 - \cos\xi) -$$

$$r \cdot \frac{b}{r_p}\,\frac{a' - (a' - r_p)\cos\xi + C'\sin\xi}{C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi} \Bigg]\,dt$$

La ĉefparto de la solvo estas sen la dua integralo, ĉar ĝi, en ĉiu sia membro, enhavas la perturboforton. Kun la unua trovita („nula“) valoro de y (respektive de $\xi = y/b$) oni povas kalkuli la duan integraloon ankaŭ, do ricevi la unuan proksimumon de y *ktp*. Pro la proksimumiĝoj pli komforte estas kalkuli y en la formo

(22) $$y = \frac{\int_0^t n\,dt + \delta \cdot J}{1 + \eta\,y\,c_2 + \zeta\,y^2\,c_3}$$

Ĉi tie, jam ankoraŭ en (a22), mi uzis la jam konatajn signojn c_2, c_3 por la (ĉiam realaj) funkcioj

(23) $$c_0 = \cos\,\xi, \quad c_1 = \frac{\sin\xi}{\xi}, \quad c_2 = \frac{1 - \cos\xi}{\xi^2}, \quad c_3 = \frac{\xi - \sin\xi}{\xi^3}, \ldots$$

4.

Kun la trovita y, respektive ξ, la esprimojn por f, g, oni povas trovi el (15) kaj (15a). Unue eltiru g el (15a), nome el

(24) $$c^2 = r + f(\vec{r}_p\,\vec{e}) + g(\vec{v}_p\,\vec{e})$$

kaj enigu ĝin en (15). Tio donas

$$r^2 = f^2\,\vec{r}_p^{\,2} + 2f(\vec{r}_p\,\vec{v}_p)\;[c^2 - r - f(\vec{r}_p\,\vec{e})]/(\vec{v}_p\vec{e}) + \vec{v}_p^{\,2}\,[c^2 - r - f(\vec{r}_p\,\vec{e})\,]^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^{-2}$$

La koeficiento apud f^2, post liberiĝo de la denominatoro, fariĝas

$$\vec{r}_p^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^2 - 2(\vec{r}_p\,\vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{e})(\vec{v}_p\,\vec{e}) + \vec{v}_p^2(\vec{r}_p\,\vec{e})^2 = [(\vec{v}_p\,\vec{e})\,\vec{r}_p - (\vec{r}_p\,\vec{e})\,\vec{v}_p]^2 = (\vec{e}\times\vec{c})^2$$

Kaj la koeficiento apud $2f(c^2 - r)$ estas

$$(\vec{r}_p\,\vec{v}_p)(\vec{v}_p\,\vec{e}) - \vec{v}_p^2(\vec{r}_p\,\vec{e}) = (\vec{r}_p\times\vec{v}_p)\cdot(\vec{v}_p\times\vec{e}) = -(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)$$

do la ekvacio kaj ĝia solvo fariĝas

$$f^2\,c^2\,e^2 - 2f(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(c^2 - r) + \vec{v}_p^2(c^2 - r)^2 - r^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^2 = 0$$

$$c^2\,e^2\,f = (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(c^2 - r) \pm \{[(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)^2 - c^2\,e^2\,\vec{v}_p^2]\,(c^2 - r)^2 + c^2\,e^2\,r^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^2\}^{1/2}$$

La komencan parton sub la radiko oni povas skribi kiel

$$-[(\vec{c}\times\vec{e})\times\vec{v}_p]^2 = -[(\vec{v}_p\,\vec{e})\vec{c}]^2 = -c^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^2$$

kaj tiam la radiko estas

$$c(\vec{v}_p\,\vec{e})[r^2\,e^2 - (c^2 - r)^2]^{1/2} = \vec{c}(\vec{v}_p\,\vec{e})(2r - c^2 - r^2/a)^{1/2},$$

kie estas utiligita $l - e^2 = c^2/a$ el (12a). Pro (16a) kaj kun valoroj β, γ, el (19a) oni do havas

(a25) $$c^2\,e^2\,f = (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(c^2 - r) + c^2(\vec{v}_p\,\vec{e})[C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi] : \sqrt{a}$$

Utiligu ankoraŭ r el (20) kaj oni havos

(25) $$c^2\,e^2\,f = (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(c^2 - r_p) + c^2\,C(\vec{v}_p\,\vec{e})/\sqrt{a} -$$

$$-(1 - \cos\xi)[(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(a - r_p) + c^2\,C(\vec{v}_p\,\vec{e})/\sqrt{a}] + \sin\xi\,[c^2(\vec{v}_p\,\vec{e})(a - r_p)/\sqrt{a} - C(\vec{c}\vec{e}\vec{v}_p)]$$

Antaŭ ol provi plisimpligi la esprimojn el ĉi tiu solvo, trovu la koncernan esprimon por g, ekirinte de (24) kaj de (a25):

$$c^2e^2(\vec{v}_p\,\vec{e})g = (c^2 - r)\,[c^2\,e^2 - (\vec{c}\vec{e}\vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{e})] - c^2(\vec{r}_p\,\vec{e})(\vec{v}_p\,\vec{e})\,[C\cos\xi + (a - r_p)\sin\xi] : \sqrt{a}$$

La esprimon en la unuaj krampoj oni povas, pro

$$\vec{v}_p\times\vec{c} = \vec{v}_p^2\,\vec{r}_p - (\vec{r}_p\,\vec{v}_p)\,\vec{v}_p \quad \text{kaj} \quad c^2\,e^2 = (\vec{c}\times\vec{e})^2$$

skribi kiel

$$(\vec{c}\times\vec{e})^2 - \vec{v}_p^2(\vec{r}_p\vec{e})^2 + (\vec{r}_p\,\vec{v}_p)(\vec{v}_p\,\vec{e})(\vec{r}_p\,\vec{e}) = \vec{r}_p^2(\vec{v}_p\,\vec{e})^2 - (\vec{r}_p\,\vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{e})(\vec{v}_p\,\vec{e}) =$$

$$= (\vec{v}_p\,\vec{e})\,[(\vec{r}_p\times\vec{v}_p)\cdot(\vec{r}_p\times\vec{e})] = (\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{c}\,\vec{r}_p\,\vec{e}),$$

do

$$(\text{a}26)\qquad c^2 \varepsilon^2 g = (c^2 - r)(\vec{e}\,\vec{c}\,\vec{r}_p) - c^2 (\vec{r}_p\,\vec{e})\,[C \cos\xi + (a - r_p)\sin\xi] : \sqrt{a}$$

$$(26)\qquad c^2 \vec{e}^2 g = -[(c^2 - r_p)(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) + c^2 C (\vec{r}_p\,\vec{e})/\sqrt{a}\,] +$$

$$+ (1 - \cos\xi)\,[(a - r_p)(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) + c^2 C (\vec{r}_p\,\vec{e})/\sqrt{a}] + \sin\xi\,[C(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) -$$

$$- c^2 (\vec{r}_p\,\vec{e})(a - r_p)/\sqrt{a}]$$

Menciu ankoraŭ ke la esprimo (20) por r tre simple esprimiĝas per la novenkondukita variablo („reguliga anomalio“) y, nome pro (21) estas

$$r = r_p + C\,\xi\,c_1 + (a - r_p)\,\xi^2 c_2$$

$$(27)\qquad r = r_p(1 + \eta\,y\,c_1 + \zeta\,y^2 c_2)$$

5.

La unuopajn esprimojn por f, g, oni povas transformi tiel ke ili fariĝu multe pli simplaj. Unue (13) kaj (13a) donas

$$c^2 - r_p = \vec{r}_p\,\vec{e}_p = \vec{r}_p\,\vec{e} - \delta\,(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon})$$

Post tio (19a), poste (12a) kaj (13a) donas

$$c^2\,C/\sqrt{a} = c^2\,\beta = c\,(2r_p\,c^2 - r_p^2\,c^2/a - c^4)^{1/2} = c\,[e^2\,r_p^2 - (\vec{e}_p\,\vec{r}_p)^2]^{1/2}$$

Sub la radiko oni havas proksimume $(\vec{e} \times \vec{r}_p)^2$ kaj oni povas meti

$$\sqrt{e^2\,r_p^2 - (\vec{e}_p\,\vec{r}_p)^2} = \sqrt{(\vec{e} \times \vec{r}_p)^2} + \delta\cdot x$$

$$(28)\qquad \delta\cdot x = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{r}_p)^2 - (\vec{e}_p\cdot\vec{r}_p)^2}{\sqrt{e^2 r_p^2 - (\vec{r}_p\,\vec{e}_p)^2} + \sqrt{(\vec{e}\times\vec{r}_p)^2}} = \frac{\delta\,(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon})\,[\vec{r}_p\cdot(2\vec{e}_p + \delta\vec{\varepsilon})\,]}{\sqrt{e^2 r_p^2 - (\vec{r}_p\cdot\vec{e}_p)^2} + |\,\vec{e}\times\vec{r}_p\,|}$$

do

$$(29)\qquad c^2\,C/\sqrt{a} = \sqrt{c^2\,(\vec{e} \times \vec{r}_p)^2} + \delta\,c\,x = \pm\,\vec{c}\cdot(\vec{e} \times \vec{r}_p) + \delta\,c\,x$$

Pro ĉio tio la tuta unua parto de (25) prenas la formon

$$\vec{c}\cdot(\vec{e} \times \vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{e}) - \delta\,(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon}) \pm (\vec{v}_p\,\vec{e})\,[\vec{c}\cdot(\vec{e}\times\vec{r}_p) + c\,\delta\,x\,(\vec{v}_p\,\vec{e}) =$$

$$= (\vec{c}\times\vec{r}_p)\cdot[(\vec{e}\times\vec{v}_p)\times\vec{e}] \pm (\vec{v}_p\,\vec{e})(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) + \delta\,c^2 e^2 A$$

$$(30)\qquad c^2 e^2 A = (\vec{v}_p\,\vec{e})\,c\,x - (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon})$$

Se ni daŭrigas la transformon per disvolvo de la vektoro en [ ], ni havos

$$(\vec{c}\times\vec{r}_p)\cdot[e^2\,\vec{v}_p-(\vec{v}_p\,\vec{e})\,\vec{e}]+(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{r}_p)+\delta\,c^2\,e^2\,A=$$

(25a) $$=e^2\,c^2\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{c}\,\vec{r}_p\,\dot{\vec{e}}\pm\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{r}_p)+\delta\,c^2\,e^2\,A=c^2\,e^2\,(1+\delta\,A),$$

ĉe la esprimo fariĝis tre simpla per elekto de la signo „+“, kio montras ke en la esprimo por C, (29), la signo devas esti „—“, do

(29a) $$c^2\,C/\sqrt{a}=-(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{r}_p)+\delta\,c\,x$$

La koeficiento apud $(1-\cos\xi)$, en (25), same multe simpliĝas. Sufiĉas nur utiligi la unuan ligon (12a), poste anstataŭi $a-r_p$ per $c^2-r_p+c^2\,e^2/(1-e^2)$ kaj vidi ke al la jam trovita esprimo por la libera membro oni devas aldoni nur $(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{v}_p)\,c^2\,e^2/(1-e^2)$. Tie estas pli bone preni

$$\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{v}_p=\vec{c}\,\dot{\vec{e}}_p\,\vec{v}_p+\delta\,(\vec{c}\,\varepsilon\,\vec{v}_p)=c^2\,(\vec{v}_p^{\,2}-r_p^{-1})+\delta\,(\vec{v}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon}),$$

kaj la plena koeficiento apud $(1-\cos\xi)$ estos

$$c^2\,e^2\,[1+c^2\,(\vec{v}_p^{\,2}-r_p^{-1}):(1-e^2)+\delta\,A+\delta\,(\vec{v}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon}):(1-e^2)]$$

aŭ pli dense

(25b) $$c^2\,e^2\,\{1+a\,(\vec{v}_p^{\,2}-r_p^{-1})+\delta\,[A+(\vec{v}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon}):(1-e^2)]\}$$

Fine, la koeficiento apud $\sin\xi$, konsiderante la esprimon (29a) por C kaj (12a) por a, estos

$$(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{v}_p)\,c^{-2}\,\sqrt{a}\,(\vec{c}\,\dot{e}\,\vec{r}_p-\delta\,c\,x)+[c^2-r_p+c^2\,e^2/(1-e^2)]\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,c^2/\sqrt{a}$$

Utiligu (12a) por $\sqrt{a}$, (13a) por c^2 kaj (13c) por $\vec{e}_p$ — ĝi fariĝos

$$\sqrt{a}c^{-2}\,(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{v}_p)\,(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{r}_p)+\sqrt{a}\,(1-e^2)\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,[\vec{r}_p\,\vec{e}_p+c^2\,e^2/(1-e^2)]-$$

$$-\delta\,(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{v}_p)\,(1-e^2)^{-1/2}x=\sqrt{a}\,[c^{-2}\,(c\,e\,v_p)\,(\vec{c}\,\dot{\vec{e}}\,\vec{r}_p)+(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{r}_p\,\vec{e})-$$

$$-\delta\,(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon})\,(\vec{v}_p\,\vec{e})+e^2\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(c^2-\vec{r}_p\,\vec{e}_p)]-\delta\,(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)\,(1-e^2)^{-1/2}\,x$$

El la egalaĵo

$$(\vec{c}\;\;\vec{e}\;\;\vec{v}_p)\;\;(\vec{c}\;\;\dot{\vec{e}}\;\;\vec{r}_p)=[\vec{c}\times(\vec{e}\times\vec{v}_p)]\,.\,[(\vec{e}\times\vec{r}_p)\times\vec{c}]+c^2\,(\vec{e}\times\vec{v}_p)\,(\vec{e}\times\vec{r}_p)=$$

$$=c^2\;\;e^2\;\;(\vec{r}_p\;\;\vec{v}_p)-c^2\,(\vec{r}_p\,\vec{e})\,(\vec{v}_p\,\vec{e})$$

(ĉar la vektoroj en [ ] nuliĝas) kaj pro (13a), la tuta koeficiento estas

$$(1-e^2)^{-1/2}\,\{c\,e^2\,[\vec{r}_p\,\vec{v}_p+r_p\,(\vec{v}_p\,\vec{e})-\delta\,[c\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{r}_p\,\vec{e})+(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)\,x]\}$$

Ŝed la sumo en la unuaj krampoj estas preskaŭ nula. Nome — pro (13c) kaj pro unu el la formuloj (13a) — oni havos

$$\vec{r}_p\ \vec{v}_p + r_p(\vec{v}_p\,\vec{e}) = \vec{r}_p\,\vec{v}_p + r_p(\vec{v}_p\,\vec{e}_p) + r_p(\vec{v}_p\,\vec{\varepsilon})\,\delta = \delta\cdot r_p(\vec{v}_p\,\vec{\varepsilon})$$

La transformitaj koeficientoj — la lasta, la antaŭlasta, (25a) kaj (25b) — donas la plenan esprimon (25) en nova formo

$$1 - f = (1 - \cos\xi)\,[1 + a\,(\vec{v}_p^{\,2} - r_p^{-1})] - \delta\,A + \delta\,(1 - \cos\xi)\,[A + (\vec{v}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon}) :$$

$$:(1 - e^2)] + \delta\,c^{-2}\,e^{-2}\,(1 - e^2)^{-1/2}\,\sin\xi\ [(\vec{v}_p\,\vec{e})(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon})\,c + (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)\,x - c\,r_p\,(\vec{v}_p\,\vec{\varepsilon})]$$

La c-funkcioj (23), kun $\xi = y\,\sqrt{r_p/a}$ el (21) kaj $a^{-1} = (1 - e^2)/c$ el (12a) donas

$$(31) \qquad 1 - \cos\xi = (r_p/a)\,y^2\,c_2, \quad \sin\xi = \sqrt{r_p/a}\;y\,c_1 = [r_p\,(1 - e^2)]^{1/2}\,y\,c_1/c$$

Aliflanke, pro (13), la koeficiento apud $(1 - \cos\xi)\ a/r_p$ estas

$$r_p/a + r_p\,\vec{v}_p^{\,2} - 1 = 1 + r_p\,(a^{-1} - a_p^{-1}) = 1 - 2\delta\,r_p \int\limits_0^t (\vec{v} + g r_p^{-3}\,\vec{r}_p - f\,\vec{v}_p)\cdot\vec{F}\,dt$$

kie estas utiligita

$$(32) \qquad \frac{d}{dt}(a^{-1} - a_p^{-1}) = -2\delta\,(\vec{v}\vec{F}) + 2r_p^{-3}\,(\vec{r}_p\,\vec{r}_p') + 2\,(\vec{v}_p\cdot\delta f\vec{F})$$

Pro ĉio tio kune la lasta esprimo por $1 - f$ fariĝas

$$(33) \qquad 1 - f = y^2\,c_2 + \delta\,(P_0 + P_1\,y\,c_1 + P_2\,y^2\,c_2)$$

$$(30a) \qquad P_0 = -A = c^{-2}\,e^{-2}\,[(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)\,(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon}) - c\,(\vec{v}_p\,\vec{e})\,x]$$

$$(33a) \qquad \begin{cases} P_1 = c^{-2}\,e^{-2}\,\sqrt{r_p}\,[(\vec{v}_p\,\vec{e})\,(\vec{r}_p\,\vec{\varepsilon}) - r_p\,(\vec{v}_p\,\vec{\varepsilon}) + (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{v}_p)\,x/c] \\ P_2 = r_p\,[a^{-1}\,A + (\vec{v}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon})\,c^{-2} - 2\int_0^t (\vec{v} + g\,r_p^{-3}\,\vec{r}_p - f\,\vec{v}_p)\,.\,\vec{F}\,dt] \end{cases}$$

kie x el (28), $\vec{\varepsilon}$ el (13c).

Kio koncernas la membrojn de $c^2\,e^2\,g$ el (a26), oni facile kalkulas ilin utiligante la esprimojn (29a) por C kaj (13c) por $\vec{e}$. La libera membro — kun (13a) por c^2 — fariĝas

$$-(\vec{r}_p\,\vec{e}_p)\,(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) - (-\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p + \delta\,c\,x)\,(\vec{r}_p\,\vec{e}) = (\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p)\,(0 - \delta\,\varepsilon\,\vec{r}_p) - \delta\,c\,(\vec{r}_p\,\vec{e})\,x =$$

$$(26a) \qquad = -\delta\,[c\,(\vec{r}_p\,\vec{e})\,x + (\vec{r}_p\,\varepsilon)\,(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p)]$$

En la koeficiento apud $(1 - \cos\xi)$ troviĝas la sama esprimo kun la kontraŭa signo kaj necesas aldoni ankoraŭ

$$ae^2\,(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{r}_p) = ae^2\,[(\vec{c}\,\vec{e}_p\,\vec{r}_p) + \delta\,(\vec{c}\,\vec{\varepsilon}\,\vec{r}_p)] = ae^2\,[c^2\,(\vec{r}_p\,\vec{v}_p) + \delta\,(\vec{r}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon})] =$$

$$(26b) \qquad = ae^2\,c^2\,[\sqrt{r_p}\,\eta + \delta\,c^{-2}\,(\vec{r}_p\,\vec{c}\,\vec{\varepsilon}) - 2\,\delta\theta]$$

ĉar — laŭ (12a) —

$$a = c^2 + c^2 e^2/(1 - e^2)$$

kaj poste sekvos la aliō laŭ (11a), (13), η el (21) kun (19a), (32), nome

$$\vec{r}_p \vec{v}_p - \sqrt{r_p}\, \eta = \vec{r}_p \vec{v}_p - [2r_p - r_p^2 a^{-1} - \vec{r}_p^2 \vec{v}_p^2 + (\vec{r}_p \vec{v}_p)^2]^{1/2} = -2\delta\theta$$

(34)
$$\delta\theta = -\frac{1}{2} r_p^2 (a^{-1} - a_p^{-1}) : \left[\vec{r}_p \vec{v}_p \sqrt{r_p^2 + (a^{-1} - a_p^{-1}) + (\vec{r}_p \vec{v}_p)^2}\right]$$

$a^{-1} - a_p^{-1}$ el (32).

Kaj fine, por la koeficiento apud sin ξ, per la samaj formuloj oni trovas

$$c^{-2} \sqrt{a}\, [(-\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p + c\, \delta\, x)(\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p) - a^{-1} c^4 (c^2 - r_p + c^2 e^2/(1 - e^2))(\vec{r}_p \vec{e})]$$

El

$$0 = [\vec{c} \times (\vec{e} \times \vec{r}_p)]^2 = c^2 (\vec{e} \times \vec{r}_p)^2 - (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)^2$$

la esprimo en la [ ] transformiĝas pluen al

$$-c^2 e^2 \vec{r}^2 + c^2 (\vec{e}\, \vec{r}_p)^2 + \delta (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)\, cx - c^2 (1 - e^2) [(\vec{r}_p \vec{e}_p + c^2 e^2/(1 - e^2)] (\vec{r}_p \vec{e}) =$$

$$= -c^2 e^2 r_p^2 + c^2 (\vec{r}_p \vec{e})(\vec{r}_p \vec{e} - \vec{r}_p \vec{e}_p) + c^2 e^2 (\vec{r}_p \vec{e}_p)(\vec{r}_p \vec{e}) - c^4 e^2 (\vec{r}_p \vec{e}) + \delta (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)\, cx$$

La dua sumato havas nur la perturbo-parton; la tria kaj la kvara donas kune

$$-c^2 e^2 (\vec{r}_p \vec{e})(c^2 - \vec{r}_p \vec{e}_p) = -c^2 e^2 r_p (\vec{r}_p \vec{e})$$

kaj la esprimo plisimpliĝas:

$$-c^2 e^2 r_p^2 - c^2 e^2 r_p (\vec{r}_p \vec{e}) + \delta\, c^2 (\vec{r}_p \vec{e})(\vec{r}_p \vec{\varepsilon}) + \delta (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)\, cx$$

En la duan sumaton metu $\vec{e} = \vec{e}_p + \delta\, \vec{\varepsilon}$, plue — laŭ (13a) — $r_p + (\vec{r}_p \vec{e}_p) = c^2$

kaj fine oni havos

$$-c^2 e^2 r_p \sqrt{a} + \delta \sqrt{a}\, [(\vec{r}_p \vec{e})(\vec{r}_p \dot{\varepsilon}) + (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)\, x/c - c^2 r_p (\vec{r}_p \vec{\varepsilon})]$$

Pro ĉio tio kune la esprimo (26), multiplikita per $c^{-2} e^{-2} n$, kie n el (21), kun utiligo de (31) fariĝas

(35)
$$ng = \eta y^2 c_2 - y c_1 + \delta (Q_0 c_0 + Q_1 y c_1 + Q_2 y^2 c_2)$$

(35a)
$$\begin{cases} c^2 e^2 Q_0 = r_p^{-3/2} [c (\vec{r}_p \vec{e})\, x + (\vec{r}_p \vec{\varepsilon})(\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)], \quad c^2 Q_2 = r_p^{-1/2} (\vec{r}_p\, \vec{c}\, \vec{e}) \\ c^3 e^2 Q_1 = r_p^{-1} [c (\vec{r}_p \vec{\varepsilon})(\vec{r}_p \vec{e} - e^2 r_p) + (\vec{c}\, \vec{e}\, \vec{r}_p)\, x] \end{cases}$$

kun x, $\vec{\varepsilon}$ kaj θ el (28a), (13c) kaj (34).

Restas ankoraŭ nur precizigi la kvanton J en la esprimo (22), surbaze de tio kion oni havas en (a22).

La integrendan funkcion, helpe de la ligoj (21), ni povas skribi unue en la formo

$$y c_1 b'/b + y^2 c_2 b^{-2} (b^2 \eta)' + 3y^3 c_3 b'/b - \frac{r\,b}{C\,r_p} \times$$

$$\times \{Ca' - (a' - r_p') [C \cos \xi + (a - r_p) \sin \xi] + \sin \xi [CC' + (a' - r_p')(a - r_p)]\} \times$$

$$\times [C \cos \xi + (a - r_p) \sin \xi]^{-1}$$

Laŭ (19a) kaj (21) oni havas

$$2b'/b = a'/a - r_p'/r_p, \quad C^2 = a^2 - ac^2 - (a - r_p)^2$$

$$2CC' = (a^2 - ac^2)' - 2(a - r_p)(a' - r_p')$$

kaj la supra esprimo fariĝas

$$\frac{1}{2}(y c_1 + 2\eta y^2 c_2 + 3y^3 c_3)(a^{-1} a' - r_p^{-1} r_p') + y^2 c_2 \eta' + r r_p^{-2} \eta^{-1} (a' - r_p') -$$

$$- rb\left[a'C + \frac{1}{2} \sin \xi (a^2 - ac^2)'\right] r_p^{-1} C^{-1} [C \cos \xi + (a - r_p) \sin \xi]^{-1}$$

Ĉe tio oni havas

$$(36) \qquad \begin{cases} (12^\star) \quad a' = 2\delta\, a^2 (\vec{v}\,\vec{F}) \\ (5^\star) \quad r'_p = r_p^{-1} (\vec{r}_p\, \vec{r}_p') = -\,\delta\, g r_p^{-1} (\vec{r}_p\, \vec{F}) \\ (21^\star)/(19a) \quad 2\eta\eta' = -\,a^{-1} r_p' + a^{-2} r_p\, a' + c^2 r_p^{-2} r_p' - 2 r_p^{-1} c c' \\ (10^\star) \quad (a^2 - ac^2)' = (2a - c^2)\, a' - 2\, a\, \delta\, (\vec{c}\, \vec{r}\, \vec{F}) \end{cases}$$

Surbaze ĉi tion, en (22) oni devas kalkuli J el

$$(37) \qquad \frac{dJ}{dt} = (y c_1 + 2y^2 c_2 \eta + 3y^3 c_3)\left[a(\vec{v}\vec{F}) + \frac{1}{2} g r_p^{-2} (\vec{r}_p\, \vec{F})\right] +$$

$$+ \eta^{-1} y^2 c_2 \left[r_p(\vec{v}\vec{F}) - \frac{1}{2} g\, r_p^{-1} (c^2 r_p^{-2} - a^{-1})(\vec{r}_p\, \vec{F})\right] - r_p^{-1} (\vec{c}\vec{r}\vec{F})$$

$$+ \eta^{-1} r_p^{-2} (1 + \eta y c_1 + \zeta y^2 c_2)(2a^2 r_p\, \vec{v}\vec{F} + g \vec{r}_p\, \vec{F}) -$$

$$- \frac{b}{\eta} \frac{1+\eta y c_1 + \zeta y^2 c_2}{r_p (\eta c_0 + \zeta y c_1)} \{a [2C + (2a - c^2) \sin \xi] (\vec{v}\vec{F}) - \sin \xi (\vec{c}\vec{r}\vec{F}) \}$$

La plia konvena transformo, sed ne grava, povas esti kunigo (el la unuaj tri membroj) de la partoj kun $(\vec{r}_p \vec{F})$, $(\vec{v} \vec{F})$ kaj $(\vec{c} \vec{r} \vec{F})$.

Per tio estas kompletigita la utiligo de la novaj elementoj $(\vec{r}_p, \vec{v}_p)$ kiel la vektoraj orbitelementoj en la perturbata moviĝo.

LA MENCIITA LITERATURO

Popović B.: Eltrovado de planedetperturboj pere de komencaj suncentraj pozicio kaj rapido, VESNIK Društva Matem. fiz. i astr. Srbije, Beograd, XI (1959), 151.

Popović B.: Ekvacioj de la perturboj de planedetoj kaj de kometoj, konvenaj por ajnaj ekscentriĝoj (en la rusa lingvo), BULTENO de la Instituto por Teoria Astronomio, Leningrad, XII (1971), 10(143), 890—898.