Publications of the Department of Astronomy — Beograd, № 11, 1981

UDC 523.24; 521.1/3 OSP

MOVIĜO DE DU PROKSIMEGAJ PLANEDETOJ*

Boj. Popović

Trafic faculty, Beograd

MOTION OF TWO VERY NEAR MINOR PLANETS

B. Popovich

Received June 25, 1981

Summary. Motion (4) of the center of two masses and their motion (5) about the center result from integrals (6) and (8). At the proximity the masscenter moves along a orbit which slightly deviates from elliptical one, as much less as the planets are nearer one to other, regardless the mass-relation. The motion about the center takes place in a plane which is as much stable as the mass-relation is nearer to 1, but changes can be large when it is not so. In case $\rho < 10^{-6} r$ can occur conversion from the temporary to the long proximity, but probability is infinitesimal. More less are possibilities that then occurs a realy collision of planets (if their surfaces are very rough).

Bož. Popović, KRETANJE DVEJU JAKO BLISKIH MALIH PLANETA — Kretanje (4) centra dveju masa i njihovo kretanje (5) oko centra imaju integrale (6) i (8). Oko proksimiteta se težište kreće po putanji koja zanemarljivo odstupa od eliptične, utoliko manje ukoliko su planete bliže jedna drugoj, bez obzira na odnos masa. Kretanje oko težišta je u ravni koja je utoliko stabilnija ukoliko je odnos masa bliži 1, ali promene mogu biti znatne kad nije tako. U slučaju $\rho < 10^{-6} r$ može doći do pretvaranja prolaznog u trajni proksimitet, ali je verovatnoća za to ništavna. Još manji su izgledi da tada dođe do stvarnog sudara planeta (ako su im površine jako neravne).

1. LA MOVIĜEKVACIOJ

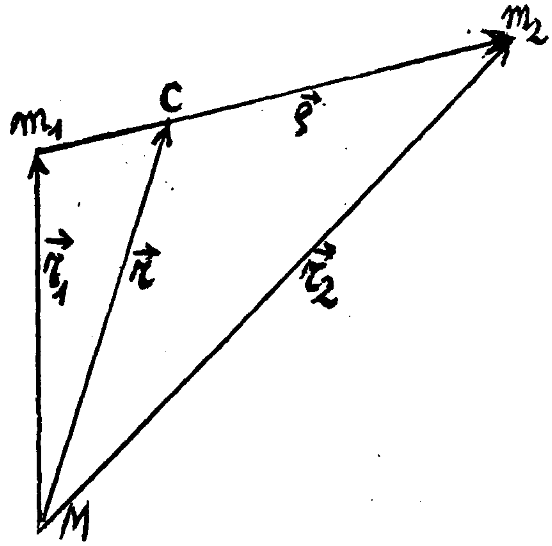
Estu M maso de Suno, m_1, m_2, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ masoj de du proksimegaj planedetoj kaj iliaj suncentraj pozicivektoroj. Estu plue C centro de la masoj m_1, m_2, kaj gia pozicivektoro estu $\mathbf{r}$. Signu ankoraŭ

$$(1) \qquad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad |\boldsymbol{\rho}| = \rho, \quad |\mathbf{r}_1| = r_1, \quad |\mathbf{r}_2| = r_2, \quad |\mathbf{r}| = r;$$

* Prezentita antaŭ la Astronomia sekcio de la Sepa kongreso de matematikistoj, fizikisto kaj astronomoj de Jugoslavio, Bečići — Budva, 6 — 11. de oktobro 1980.

kaj ni havos

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathbf{r} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2, & \mu_i = m_i : (m_1 + m_2), \quad (i = 1, 2) \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mu_2 \boldsymbol{\rho}, & \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mu_1 \boldsymbol{\rho} \end{cases}$$



El la moviĝekvacioj de la masoj m_1, m_2:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \mathbf{r}_1}{(dt)^2} = -(M + m_1)\, r_1^{-3} \mathbf{r}_1 - m_2 \left(r_2^{-3} \mathbf{r}_2 - \rho^{-3} \boldsymbol{\rho}\right) \\ \dfrac{d^2 \mathbf{r}_2}{(dt)^2} = -(M + m_2)\, r_2^{-3} \mathbf{r}_2 - m_1 \left(r_1^{-3} \mathbf{r}_1 + \rho^{-3} \boldsymbol{\rho}\right) \end{cases}$$

oni ricevos

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{(dt)^2} &= -(M + m_1 + m_2)\left(\mu_1 r_1^{-3} \mathbf{r}_1 + \mu_2 r_2^{-3} \mathbf{r}_2\right) = \\ &= -(M + m_1 + m_2)\left[r^{-3} \mathbf{r} + \left(\mu_1 r_1^{-3} + \mu_2 r_2^{-3} - r^{-3}\right) \mathbf{r} + \mu_1 \mu_2 \left(r_2^{-3} - r_1^{-3}\right) \boldsymbol{\rho}\right] \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{(dt)^2} &= -(m_1 + m_2)\, \rho^{-3} \boldsymbol{\rho} + M\left(r_1^{-3} \mathbf{r}_1 - r_2^{-3} \mathbf{r}_2\right) = \\ &= -(m_1 + m_2)\, \rho^{-3} \boldsymbol{\rho} - M\left(r_2^{-3} - r_1^{-3}\right) \mathbf{r} - M\left(\mu_1 r_2^{-3} + \mu_2 r_1^{-3}\right) \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

ĉe kio la gravita konstanto k^2 estas jam ĉie enkalkulita en la maso. Ili donas plue

$$(4\text{a})\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = -\mu_1 \mu_2 (M + m_1 + m_2)\left(r_2^{-3} - r_1^{-3}\right)(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho})$$

$$(5\text{a})\qquad \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right) = M\left(r_2^{-3} - r_1^{-3}\right)(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho})$$

kaj la unuan moviĝintegralon *(areointegralo)*

$$\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)+\mu\left(\boldsymbol{\rho}\times\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right)=\mathbf{C} \tag{6}$$

kie

$$\mu=\mu_1\mu_2(M+m_1+m_2)/M \tag{7}$$

ne dependas de la gravita konstanto, sed nur de la masrilatumo.

La ekvacioj (4) kaj (5) ebligas trovi ankaŭ la energi-integralon. Nome

$$2M\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\mu_1\mu_2(M+m_1+m_2)\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}=-m_1\mu_2(M+m_1+m_2)\cdot\frac{2\rho'}{\rho^2}+$$
$$+2\mu_1\mu_2M(M+m_1+m_2)(r_1^{-3}\mathbf{r}_1-r_2^{-3}\mathbf{r}_2)\cdot\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}-$$
$$-2M(M+m_1+m_2)(\mu_1r_1^{-3}\mathbf{r}_1+\mu_2r_2^{-3}\mathbf{r}_2)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=m_1\mu_2(M+m_1+m_2)\left(\frac{2}{\rho}\right)'+$$
$$+2M(M+m_1+m_2)\left[\mu_1\mu_2\left(r_1^{-3}\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}-r_1^{-2}r_1'-r_2^{-2}r_2'+r_2^{-3}\mathbf{r}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)-\right.$$
$$\left.-\mu_1^2r_1^{-2}r_1'-\mu_2^2r_2^{-2}r_2'-\mu_1\mu_2\left(r_1^{-3}\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}+r_2^{-3}\mathbf{r}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\right]$$

do

$$\frac{d}{dt}\left[M\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2+\mu_1\mu_2(M+m_1+m_2)\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right)^2=2\frac{M+m_1+m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1m_2}{\rho}\right)'+\right.$$
$$+2M(M+m_1+m_2)[\mu_1(r_1^{-1})'+\mu_2(r_2^{-1})'].$$

El tio sekvas la *energiintegralo de la mascentro.*

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2+\mu\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right)^2=2\mu\cdot\frac{m_1+m_2}{\rho}+\frac{2m\mu}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}\right)+h/M \tag{8}$$

2. MOVIĜO DE LA MASCENTRO DE DU PLANEDETOJ

La integraloj (6) kaj (8) estas la integraloj el la trikorpa problemo, sed en la formo esprimanta moviĝon de la mascentro de du donitaj planedetoj kaj ilian moviĝon ĉirkaŭ la mascentro. En la areointegralo ŝanĝoj de la mascentra ebeno kaj ŝanĝoj de moviĝebeno ĉirkaŭ la mascentro interkompensiĝas, tiel ke sufiĉas trastudi unu el tiuj du moviĝoj. Pro tio observu iom pli detale moviĝon nur de la mascentro.

El la ekvacio (4a) oni vidas ke ŝanĝoj de la sektorrapido de la mascentro estas ĉiam en ebenoj ortaj sur $\mathbf{r}$, sed ili estas tre malgrandaj ĉirkaŭ la proksimecostato, car $r_2 \approx r_1$ kaj ρ havas nur etan intenson. El (2) ni havas

$$r_1^2=r^2-2\mu_2(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho})+\mu_2^2\rho^2, \qquad r_2^2=r^2+2\mu_1(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho})+\mu_1^2\rho^2$$

$$(9)\qquad \begin{cases} r_1^{-3} = r^{-3}\left[1-2\mu_2\cdot\dfrac{r\cdot\rho}{r^2}+\left(\mu_2\dfrac{\rho}{r}\right)^2\right]^{-3/2} \approx r^{-3}+3\mu_2 r^{-5}(r\cdot\rho) \\ r_2^{-3} \approx r^{-3}-3\mu_1 r^{-5}(r\cdot\ ) \end{cases}$$

$$(10)\qquad r_1^{-3}-r_2^{-3} \approx 3r^{-5}(r\cdot\rho) = 3r^{-4}\rho\cos\sphericalangle(r,\rho)$$

Ĉar krome estas

$$|r\times\rho| = r\cdot\rho\cdot\sin\sphericalangle(r,\rho)$$

evidentas ke ŝanĝoj de la ebeno (kaj de amplekso) de mascentra orbito restas neglekte etaj kiam ρ estas tre eta grando (kompare kun r). Laŭe *ebeno de la mascentra orbito estas preskaŭ konstanta.* Eĉ pli, plifortigo de la proksimeco ne nur ne malbonigas tiun konstantecon sed plue plifortigas ĝin, ĉar

$$\rho\to 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(r\times\frac{dr}{dt}\right)\to 0$$

— tio ja kun kvadrato de la distanco, senkonsidere masgrandojn de planedetoj.

Kiom la mascentra orbito deflankiĝas de elipsa orbito? La perihelia vektoro (Laplas — Hamiltona)

$$(11)\qquad e=\frac{dr}{dt}\times\left(r\times\frac{dr}{dt}\right)-(M+m_1+m_2)\frac{r}{r}$$

ne estas tute konstanta, ĉar ĝi subiĝas al perturboj kies forto laŭ ekvacio (4) estas

$$F=(M+m_1+m_2)\,[\mu_1 r_1^{-3}+\mu_2 r_2^{-3}-r^{-3})\,r+\mu_1\mu_2(r_2^{-3}-r_1^{-3})\,\rho],$$

kaj la perturba ekvacio (P o p o v i c, 1949.) estas

$$\frac{de}{dt}=(M+m_2+m_2)\left\{\left(r\times\frac{dr}{dt}\right)\times(\mu_1 r_1^{-3}+\mu_2 r_2^{-3}-r^{-3})\,r+\right.$$

$$\left.+\mu_1\mu_2(r_2^{-3}-r_1^{-3})\left[\left(r\times\frac{dr}{dt}\right)\times\rho-\frac{dr}{dt}\times(r\times\rho)\right]\right\}$$

La dua parto de la esprimo en { }, pro (10), havas la rangon ρ^2 kiam ρ estas eta grando. Kaj en la unua parto la eta grando troviĝas en la dua parentezo ( ). Por vidi kian grandecordon havas tiu grando, utiligu denove (9) kaj ni tuj vidos ke en tiu esprimo forfalas ankaŭ termoj de la unua grado de ρ, t. e.

$$(12)\qquad \mu_1 r_1^{-3}+\mu_2 r_2^{-3}-r^{-3}=0\,(\rho^2)$$

Sekve ankaŭ perturboj de la perihelia vektoro estas duaordaj kompare kun ρ, same kiel la integralo de areoj, senkonsidere la masojn de ambaŭ planedetoj. Ĉe plifortigo de la proksimeco ĉi tiuj perturboj ege malkreskas, pro kio la mascentra orbito des pli proksimiĝas al la elipsa ju pli forta estas la proksimeco. Laŭ la ekvacio (4) kaj laŭ la supraj proksimumigoj, oni povas diri ke la perturboj estas neglektindaj jam kun $\rho^2 < 10^{-4}\,r$.

El ĉio tio devenas la konkludo ke *dum la proksimeco de du planedetoj, ilia mascentro moviĝas laŭ orbito tre malmulte devianta de ebena elipsa orbito, des malpli ju pli la planedetoj proksimas unu al la alia.*

3. MOVIĜO ĈIRKAŬ LA MASCENTRO

Por moviĝo de du planedetoj ĉirkaŭ ilia mascentro, necesas trastudi la ekvacion (5), utiligante laŭbezone la integralojn (6) kaj (8).

El (6), konsiderante tion ke ni konstatis ke $r \times \frac{dr}{dt}$ estas preskaŭ konstanta, sekvas ke $\mu\rho \times \frac{d\rho}{dt}$ ankaŭ estas preskaŭ konstanta. Ĉiu ŝanĝeto ĉe la unua vektoro elvokas same tiel etan ŝanĝon ĉe la dua vektoro. Sede, se μ estas tre malgranda, intenseco de ŝanĝo de la dua vektoro pligrandiĝas $1/\mu$ foje, pro kio relativaj ŝanĝoj de sektora rapido povas iam esti ankaŭ sufiĉe grandaj. Konsiderante (7) kaj (2), tio okazas kiam unu el la masoj m_1, m_2 estas eta rilate la alian. *Moviĝebeno de du planedetoj ĉirkaŭ la komuna mascentro estas des pli stabila ju pli iliaj masoj estas proksimume egalaj* kaj ĝi subiĝas al pli grandaj ŝanĝoj kiam masoj de planedetoj *grave diferencas.*

La rolon de la masrilatumo oni povas vidi pli precize se oni skribas la esprimon (7) en la formo

$$\frac{1}{\mu} = \frac{M}{M + m_1 + m_2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

kies maksimuma kvanto proksimas al (4) (kiam $m_1 = m_2$), kaj ĝi fariĝas des pli granda ju pli granda estas unu el la masrilatumoj. Por iom granda masrilatumo, oni povas preni proksimume

$$\frac{1}{\mu} = 2 + \frac{m_2}{m_1} \quad \text{aŭ} \quad \frac{1}{\mu} = 2 + \frac{m_2}{m_1}$$

(la unuan esprimon oni havas kiam m_1 estas grave pli eta ol m_2, kaj la duan esprimon en kontraŭa okazo).

Ĉi tio povas esti eĉ tre granda kvanto (sed konstanta dum la difinita moviĝo!), kaj ĝian influon dum la moviĝo ĉirkaŭ la mascentro oni vidas el la integralo (6) en la formo

$$\rho \times \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\mu}\left(C - r \times \frac{dr}{dt}\right)$$

Por la esprimo en ( ) ni vidis ke ĝi estas preskaŭ konstanta, tuj kiam ρ^2 estas eta kvanto, pro kio do en tia okazo la areorapido dum la moviĝo ĉirkaŭ la mascentro estas same preskaŭ konstanta, sed des pli granda ju pli granda estas la rilatumo de du masoj.

Konekse kun ŝanĝoj de moviĝebeno cirkaŭ la mascentro, estas bone mencii ĉi tie ke el la integralo (6) sekvas ke ĉiu intensoŝanĝo de $r \times \frac{dr}{dt}$ provokas ĉefe direktoŝanĝon de la vektoro $\rho \times \frac{d\rho}{dt}$, kaj direktoŝanĝo de la unua vektoro provokas ŝanĝon de la dua samtiel en la direkto kiel en la intenseco.

Por pli proksime vidi la manieron de moviĝo ĉirkaŭ la mascentro, trovu esprimon por la perihelia vektoro de tiu moviĝo. El la ekvacio (5) ni vidas ke ĉi tiu moviĝo povus esti proksima al neperturbata moviĝo se la unua termo estus multe pli granda ol la alia parto, kio povas esti nur se ρ estas treege eta. Ekirante nur de okazo plenumanta tiun kondiĉon, el la esprimo simila al (11) ni havos

$$e = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times \left(\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right) - (m_1 + m_2)\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \tag{13}$$

$$\frac{de}{dt} = M\left(\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right) \times [(r_2^{-3} - r_1^{-3})\boldsymbol{r} + (\mu_1 r_2^{-3} + \mu_2 r_1^{-3})\boldsymbol{\rho}] + \tag{13a}$$

$$+ M\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\rho})(r_2^{-3} - r_1^{-3})$$

Konekse kun la proksimumigoj (9), (10), konsiderante la konstaton ke $\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$ estas preskaŭ konstanta dum proksimeca stato, ni povas konstati ke ĉiuj sumatoj en (13a) havas la rangon ρ, do ankaŭ tie ni vidas ke perturboj de la perihelia vektoro estas neglektindaj nur kiam ρ estas treege eta kvanto.

Kiom eta devas esti la distanco ρ por ke la moviĝo de du planedetoj cirkaŭ la mascentro estu elipsa? Ni taksos tion per tio ke „perturboj" el (5) devus esti multe pli etaj ol estas la unua termo. Senkonsidere la unuoelektojn oni havas $m_1 + m_2 \approx \approx 10^{-12} M$ (pritakso de maso de iom grandaj planedetoj), pro kio devus esti

$$|(r_2^{-3} - r_1^{-3})\boldsymbol{r} + (\mu_1 r_2^{-3} + \mu_2 r_1^{-3})\boldsymbol{\rho}| \ll |\rho^{-3}\boldsymbol{\rho} \cdot 10^{-12}$$

aŭ proksimume

$$r^{-3}\rho \ll \rho^{-2}\,10^{-12}, \quad \text{resp.} \quad \rho \ll 10^{-4}r \tag{14}$$

Esence nenio ŝanĝiĝus se pritakson de la maso ni malaltigus je 10^{-13}, eĉ pli malalten.

Tiom densaj proksimecoj (t.e. ke la distanco reduktiĝu je almenaŭ 10^{-6} a.u.) ne estas trovitaj, pro kio oni povas aserti ke moviĝo de du preskaŭ egalaj planedetoj ĉirkaŭ la mascentro (dum plej proksima pozicio) *okazos en preskaŭ konstanta ebeno, sed neregule kompare kun elipsa moviĝo.* Kaj kiam grandoj de du planedetmasoj grave diferencas, tiam ankaŭ la moviĝebeno — kiel ni vidis supre — subiĝas al gravaj ŝanĝoj, des pli grandaj ju pli granda estas la masrilatumo.

4. EBLECOJ DE KOLIZIO

Por ke ni analizu kolizi-eblecon de du planedetoj kun etaj masoj, rigardu moviĝojn de unu kaj de la alia dum alproksimiĝado. Laŭ la ekvacioj (3), ĉiuj el ili moviĝas, oni povas diri sendepende unu de la alia, laŭ iomete perturbita elipsa moviĝo. La perturboj devenas pro la termo $m\,\rho^{-3}\,\boldsymbol{\rho}$, ĉe kio m (m_1 aŭ m_2) estas maso de la alia planedeto. Se ni prave prenas $m \approx 10^{-12} M$, la perturboj estas nesenteblaj ĝis kiam $Mr^{-2} \gg M\,10^{-12}\rho^{-2}$, t.e. ĝis kiam

$$\rho \gg 10^{-6}r \tag{15}$$

Ĝis kiam tio estas, ne ekzistas dinamikaj kaŭzoj por alveno de progresa falado de la distanco. Sed aliflanke ankaŭ la ekvacio (5) donas nenian garantion ke tia distanco ne malgrandiĝos progrese, ĉar se ni volus trakti la moviĝon (5) kiel elipsan perturbatan (t.e. ke la distanco ne estu subigata al relative grandaj ŝanĝoj), tiam la „neperturbata" unua termo estus grave pli granda ol estus „perturboj" el aliaj du termoj, kion ja oni ne povas aserti. Pro tio plua malgrandiĝado de la distanco inter ĉi tiuj du planedetoj estas lasita al hazarda sekciĝo (respektive preskaŭ-sekciĝo) de iliaj orbitoj kaj al hazardo ke ambaŭ planedetoj troviĝu samtempe proksime de la sekcopunkto.

Ĉar ĉi tie ja temas pri mallongdaŭra perturba efiko, oni povas libere preni ke la perturboj estas sensignifaj ĝis $\rho > 10^{-4}r$). Ni vidis ke tiam moviĝo de la mascentro jam fariĝas preskaŭelipsa (vere jam de $\rho^2 \geqslant 10^{-4}r$), sed ke la moviĝo ĉirkaŭ la mascentro havas ankoraŭ neregulan karakteron (en preskaŭ konstanta ebeno) — ĝis kontentigo de la kondiĉo (14).

Tiel ni alvenas la konkludon ke moviĝperturboj de unu el planedetoj estas gravaj ĉefe inter la limoj (14) kaj (15). Se ekde $\rho \approx 10^{-4}r$ daŭriĝas malgrandiĝo de la distanco, ĉu pro geometriaj ecoj de la orbitoj ĉu pro la perturboj, kaj se tiel (progrese aŭ per iaj osciladoj) oni venas al $\rho \approx 10^{-6}r$, oni denove alvenos la staton de preskaŭ neperturbata moviĝo de du planedetoj ĉirkaŭ la mascentro.

De tiu momento nin ja ne plu interesas moviĝo de ĉiu planedeto aparte sed moviĝo de la mascentro kaj ilia moviĝo ĉirkaŭ la mascentro. Konekse kun tio kion ni vidis por moviĝo de la mascentro, je tiom etaj distancoj moviĝo de la mascentro estas elipsa, kun neglektindaj perturboj. Sed kio koncernas la moviĝon ĉirkaŭ la mascentro, oni povas ankaŭ ĝin preni kiel preskaŭ elipsa, ĉar estas kontentigita la kondiĉo (14) por povi preskaŭ neglekti perturbojn de la elipsa moviĝo.

Se do oni alvenos al tiel densa proksimeco kia estas (14), plua neglektebleco de la perturboj forigus rapidan plietiĝon de la distanco kaj la distanco haltiĝus plej-parte je konstanta nivelo (kun oscilado altrudata pro ekscentriĝo de preskaŭelipsa orbito ĉirkaŭ la mascentro). Ĉu alvenos „frenezrapida kurado" de planedeto ĉirkaŭ la alia? La integralo (6) montras ke tiuokaze la rapido $d\rho/dt$ ne fariĝos grandega, ĉar por tio devus esti $\rho < 10^{-12}$, kio tute ne eblas. Tiam fakte kreiĝas *duobla planedeto,* ĉar ne plu ekzistas gravitaj kaŭzoj por ilia disiĝo — la proksimeco estus tiuokaze ne plu efemera sed daŭra.

Tiaj ĉi okazoj estos kompreneble raregaj, ĉar ni ekiris kun du supozoj. Aŭ ke geometriaj ecoj de la orbitoj estu tiaj ke la interdistanco etiĝu je (14), kio en ĝis-nuna serĉado de proksimeco estas trovita por nur paro da okazoj (ekz. Lazović kaj Kuzmanoski, 1978.). Aŭ ja ke la distanco etiĝu tiom multe pro forta efiko de perturbo, kio same estas neprobabla. Sekve, *transformo de efemera prokcimeco de du planedetoj al daŭra proksimeco povas okazi, sed maloftege.*

Konekse kun tio trudiĝas tuj natura demando: ĉu tiuokaze unu planedeo falos sur la alian, nome ĉu okazos ilia fizika kolizio? Ĉi tio sendube dependas plej-parte de formoj kaj dimensioj de la korpoj.

Se ni prenos kredeble reale ke la specifa pezo de planedeto estas duoble pli granda ol la specifa pezo de Suno, tiam el la masrilatumo por la duondiametro σ de planedeto ni trovos

$$2\sigma^3 = 10^{-12}S^3, \qquad \sigma = 10^{-4}S/\sqrt[3]{2} \approx 54 \text{ km}$$

respektive $\sigma \approx 26$ km, se la masrilatumo estos prenita 10^{-13}.

Ni vidis ke la preskaŭelipsa moviĝo ekestas kiam fariĝas $\rho \approx 10^{-6}r \approx 450$ km. Tio montras ke tiuokaze la du planedetoj ankaŭ per siaj surfacoj estas grave proksimaj unu al la alia. Se tiam ilia reciproka moviĝo havas negrandan ekscentriĝon, ankaŭ je tiu distanco ili povas moviĝi kiel duobla planedeto. Sed la ekscentriĝo povas ne esti tre malgranda, pro kio en periastro povas okazi forta proksimiĝo (al kio povas ankoraŭ pli kontribui — kvankam tre malmulte — la perturba efiko de unu planedeto al la alia).

Tiam, post kelkaj turniĝoj, povus okazi pure fizika, sed tanĝanta, kolizio. Ĉe glataj surfacoj ĉi tio estus nur mallongdaŭra kontakto, sed sufiĉa por tio ke parto de la gravita rapido transiru al la rotacia rapido kaj ke post ĉiu plua periastro la kontakto estu pli forta — la planedetoj iom post iom tute kuniĝus. Ĉi tiu procezo estus ankoraŭ pli rapida, akompanata per ofta niveligado de malglataĵoj, se la surfacoj estas neglataj.

5. ŜANĜOJ DE LA ORBITKURBIĜOJ

Estas ankoraŭ unu demando donanta la respondon interesan por pli bona konatiĝo kun moviĝo de du proksimaj planedetoj. Temas pri kurbiĝoj de orbitoj de ambaŭ planedetoj aparte kaj pri kurbiĝo de orbito kiun sekvas ilia mascentro.

Por trovi kurbiĝon de la mascentra orbito ni utiligu (el diferenciala geometrio) la esprimon

$$K^2 = \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2 \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right|^{-6} \tag{16}$$

Unue estas evidente ke ŝanĝo de ĉi tiu kurbiĝo ne povas ekesti tra la senfino, ĉar la kurbiĝo estas kontinua funkcio ($|dr/dt| \neq 0$). Por ke la kurbiĝo ŝanĝiĝu tra nulo, devus nuliĝi la esprimo en la unua parentezo. Ĉar — laŭ (4) —

$$\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \Big/ (M + m_1 + m_2) = (\mu_1 r_1^{-3} + \mu_2 r_2^{-3}) \left(r \times \frac{dr}{dt}\right) + \mu_1 \mu_2 (r_1^{-3} - r_2^{-3}) \left(\rho \times \frac{dr}{dt}\right)$$

la unua sumato, dum la proksimigo, pro (10) evidente ege superas per sia intenseco la duan sumaton, kaj por ĉefaĵo de la unua sumato — (9) donas

$$r^{-3} \left| r \times \frac{dr}{dt} \right| .$$

Ĉi tiu esprimo ŝanĝiĝas dum la proksimiĝo tre lante kaj ne povas nuliĝi (ni ja vidis ke dum la proksimiĝo la moviĝo de la mascentro estas preskaŭ elipsa).

Laŭe, *orbito de la mascentro de du proksimaj planedetoj ne ŝanĝas sian kurbigon eĉ dum la proksimiĝo,* ĝi do kondutas same kiel orbitoj de planedoj.

Por unuopaj orbitoj de du proksimaj planedetoj ni uzu la saman esprimon (16), helpe de la ekvacioj (3) — sufiĉe por nur unu el du planedetoj. Oni do devas vidi ĉu povas nuliĝi la esprimo

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}=M r_1^{-3}\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)+$$

$$+(m_1+m_2)(\mu_1 r_1^{-3}\mathbf{r}_1+\mu_2 r_2^{-3}\mathbf{r}_2)\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}-m_2\rho^{-3}\left(\boldsymbol{\rho}\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$

Aplikinte (2) kaj (5), ni vidas ke la ĉefvaloro de la meza sumato estas $(m_1+m_2)\,r^{-3}\mathbf{r}\times\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$, ĝi estas sensignife eta kompare kun la unua kaj la tria sumatoj, ĉar la masoj de planedetoj estas treege etaj. Restas do

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\approx(Mr_1^{-3}\mathbf{r}_1-m_2\rho^{-3}\boldsymbol{\rho})\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

La unua vektoro en la parentezo estas pli granda ol la dua konstante ĝis $\rho\approx 10^{-4}r_1$ sekve intenseco de la dua vektoro superas intensecon de la unua dum la proksimiĝo. Krom tio ja $\boldsymbol{\rho}$ konstante ŝanĝas sian direkton rilate al $\mathbf{r}_1$, pro kio tre probable alvenados situacioj ke la vektoro en parentezoj estu samlinia kun $d\mathbf{r}_1/dt$. Sekve la orbito de unu (do ja de la alia) planedeto — rilate al Suno — tre probable ŝanĝas sian kurbiĝon, de la konveksa eksteren al la konveksa internen kaj inverse.

Kiam ekestas tia ŝanĝo? En tiu pozicio $\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_1/dt$ kaj $(Mr_1^{-3}\mathbf{r}_1-m_2\rho^{-3}\boldsymbol{\rho})$ estas tri samebenaj vektoroj, t.e. samebenaj estas $\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_1/dt$, $\boldsymbol{\rho}$, kaj same $\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_1/dt$, $\mathbf{r}_2$. Laŭ tio, *sango de la kurbiĝo ekestas tiam kiam la suncentra rapido de unu p anedeto venas en la ebenon kiun difinas la pozicivektoroj de la planedetoj.* l

*
* *

Fine mi menciu ankoraŭ unu flankan rezultaton pri moviĝo de du proksimegaj planedetoj. Krom la konstanta ebeno difinita per la areo-integralo (6), ekzistas alia ebeno kiu estas preskaŭ konstanta dum la prksimiĝa moviĝo. Tio estas la ebeno difinita per la vektoro

$$\mathbf{C}^*=m_1\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)+m_2\left(\mathbf{r}_2\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right)$$

Nome, (3) donas

$$\frac{d\mathbf{C}^*}{dt}=m_1 m_2(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)(r_1^{-3}-r_2^{-3})$$

kaj ĉi tiu kvanto estas proksimega al nulo, pro la eteco de ĉiuj faktoroj konsistigantaj ĝin.

LA MENCIITA LITERATURO

Lazović, Kuzmanoski: Minimum distances of the..., *Publ. Dept. Astr. Univ.*, Beograd, **8** (1978.), 47—54.

Popović B.: Novi oblici jednačina poremećaja u kretanju planeta, *GLAS* **198** *Akad. nauka*, Beograd 1949, 129—139 (aŭ: Les équations nouvelles des perturbations..., *BULLETIN de L'Acad. serbe*, **V**, 1952., 123—126.