Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Sammelheft der Arbeiten der Naturwissenschaftlich—Matematischen Fakultät Universität Novi Sad, Band 9 (1979)

Dragoslav Herceg

NICHTÄQUIDISTANTE DISKRETISIERUNG DER GRENZSCHICHTDIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND EINIGE EIGENSCHAFTEN VON DISKRETEN ANALOGA*

In dieser Arbeit betrachten wir eine Diskretisierung von Randwertaufgaben der Form

$$(RWA) \quad -x''=f(t,x) \text{ in } I=[0,1], \qquad x(0)=z_0, \qquad x(1)=z_1$$

mit irregulären Gitter $I_h \in I$. Wir setzen dabei voraus, daß die Lösung $x(t)$ von (RWA) sich in $[0,\varepsilon]$, $0<\varepsilon\ll 1$ stark ändert und in $[\varepsilon, 1]$ nur wenig. Die Randwertaufgaben mit diesen Eigenschaften findet man in Biologie, Chemie, hydrodinamischen Schmiertheorie und besonders bei Grenzschichtdifferentialgleichungen (boundary layer problems), [10a, b] [9]. Meistens ist ε der Ordnung $10^{-2}-10^{-8}$. Daraus folgt, daß man bei äquidistanten Diskretisierung von (RWA) 10^2-10^8 Punkte in I_h braucht, um einige Punkte in $[0,\varepsilon]$ besitzt und damit Nährungslösung von (RWA) in $[0,\varepsilon]$ hat. Da bei Dieskretisierung von (RWA) gute Näherungslösung und nicht zu viele Punkte in I_h haben wollen, ist nichtäquidistante Diskretisierung notwendig, [1g].

Diskrete Analoga von (RWA) ist der Form

$$\text{(DRWA)} \qquad A_h x = B_h F_h x + r_h \quad \text{in} \quad R^{I_h},$$

wobei $n+1$ die Mächtigkeit von I_h ist. A_h und B_h sind $(n+1, n+1)-$ Matrizen, d. h. $A_h, B_h \in L(R^{I_h})$, $r_h=(z_0, 0, \ldots 0, z_1) \in R^{I_h}$, und F_h ist i. a. nichtlineare Abbildung R^{I_h}, in sich mit

$$(F_h x)(t)=f(t, x(t)) \quad (t \in I_h).$$

In § 2 beschreiben wir die Diskretisierung von (RWA) und Matrizen A_h und B_h. In § 3 beweisen wir die Inversmonotonie von A_h, die u. a. aus folgenden Gründen von Interesse ist, [8a], [2]:

1. Sie sichert die eindeutige Lösbarkeit von (DRWA).

2. Sie ist nützlich bei Konvergenzbetrachtungen für Iterationsverfahren zur Lösung von (DRWA).

---

* Diese Arbeit enthält Teile meiner Dissertation, die von prof. Dr. E. Bohl, Universität Konstanz, engeregt und unterstützt wurde.

3. Sie ist Voraussetzung für den Stabilitäts — und Konvergenznachweis bei $n \to \infty$.

Wenn der kleinste Eigenwert λ_h von $A_h x = \lambda B_h x$ bekannt ist, oder ein $\lambda_0 \leqslant \lambda_h$, dann kann man sehr praktische Voraussetzungen zur Konvergenzaussage für Iterationsverfahren zur Lösung von (DRWA) und zur Stabilitätsungleichung haben (vgl. [1e], [2]). In § 3 bestimmen wir λ_0.

Im äquidistanten Fall ist unsere Matrix A_h die gut bekannte Matrix, [1c, d] [2], [3], [5], [8a],

$$h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & h^2 \end{bmatrix}$$

In diesen Fall findet man die Behauptung des Stazes in [1e], aber den Beweis aus [1e] kann man hier nicht verwenden. Hat (RWA) das Grenzschichtphänomen bei $t=1$, oder bei $t=0$ und $t=1$, dann ist es möglich auch geeignetes Gitter zu konstruieren.

1. Bezeichnungen [1b], [8b]

Sei $m \in N$ und $T=\{1, 2, \ldots, m\}$. Für $x, y \in R^m$ sei $x \leqslant y$ bzw. $x < y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$ bzw. $x_i < y_i$ für alle $i \in T$. Entsprechend sind $\leqslant$ und $<$ bei Matrizen elementweise zu verstehen. Für $x \in R^m$ sei

$$T^0(x)=\{i \in T : x_i = 0\} \quad \text{und} \quad T^+(x)=\{i \in T : x_i > 0\}$$

Für jedes $e>0$, $e \in R^m$ ist

$$||x||_e = \max\{e_i^{-1}|x_i| : i \in T\}$$

eine Norm [1a]. Sei $A=(a_{ij}) \in R^{m,m}$ eine reelle Matrix. A heißt nichtnegativ, falls $a_{ij} \geqslant 0$ $(i, j \in T)$,

L — Matrix, falls $a_{ii}>0$, $a_{ij} \leqslant 0$, $i \neq j$ $(i, j \in T)$,

M — Matrix, falls A eine L-Matrix mit nichtnegativen Inversen ist.

Für A seien A_d, A_0, A^+ und $A^- \in R^{m,m}$ festgelegt durch

$$(A_d)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{für} \quad i=j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}, \qquad A = A_d + A_0$$

$$(A^+)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls} \quad a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad a_{ij} < 0 \end{cases}, \qquad A = A^+ + A^-$$

Sind T_1 und T_2 Teilmengen von T, und isc $A \in R^{m,m}$, so sagen wir, daß A die Menge T_1 mit T_2 verbindet, wenn es zu jedem $i \in T_1$ endlich viele Indizes

$$i_0, i_1, \ldots, i_r \in N\,(r=r(i) \in N) \quad \text{mit}$$

$$a_{i_{k-1} i_k} \neq 0$$

und $i_0=i$, $i_r \in T_2$ gibt.

Ist eine Größe x definitionsgemäß gleich einem Ausdruck y, so schreiben wir $x:=y$ statt $x=y$, wenn sonst Mißverstendnisse möglich sind.

2. Diskretisierung von (RWA)

Sei $x \in c^4(I)$, $I=[0, 1]$, h>0, $h \in R$, $\alpha_j \in R\setminus\{0\}\,(j=1, 2, 3)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j\,(i, j=1, 2, 3)$ und t, $t+\alpha_j h \in I$. Dann haben wir [11]

$$-x''(t)=h^{-2}(ax(t+\alpha_1 h)+bx(t)+cx(t+\alpha_2 h)+ +dx(t+\alpha_3 h))+O(h^2) \tag{1}$$

mit

$$a=\frac{2(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}, \quad b=\frac{-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$
$$c=\frac{2(\alpha_1+\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}, \quad d=\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}. \tag{2}$$

Gilt

$$\alpha_1<0, \qquad 0<\alpha_2<\alpha_3, \qquad \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 0 \tag{3}$$

dann haben wir

$$a<0,\ b>0,\ c \leqslant 0 \quad d\begin{cases} \leqslant 0 \text{ für } \alpha_1+\alpha_2 \leqslant 0, \\ >0 \text{ für } \alpha_1+\alpha_2>0. \end{cases} \tag{4}$$

Für $\alpha_1+\alpha_2=0$ aus (2) folgt

$$d=0,\ a=c=-\frac{b}{2}=-\alpha_2^{-2}. \tag{5}$$

und für $\alpha_1+\alpha_3=0$

$$c=0,\ a=d=-\frac{b}{2}=-\alpha_3^{-2}. \tag{6}$$

Für $n \in N$, $k_j > 0, k_j \in R$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ sei

(7)
$$h^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j,$$

und mit $n \geqslant 3$

(8)
$$I_h = \{t_0 = 0,\ t_j = t_{j-1} + k_j h : j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Das Gitter I_h i. a. ist nichtäquidistant (irregulär), und für $k_j = 1$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ äquidistant. Sei weiter

(9)
$$1 \leqslant k_i \leqslant k_{i+1}\ (i=1, 2, \ldots, n-2),$$
$$k_n = \sum_{j=0}^{p_{n-1}} k_{n-1-j} \text{ für eines } p_{n-1} \in \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}.$$

Ist (9) erfüllt, dann ist I_h möglich so konstruirt, daß für $\varepsilon > 0$ beliebige viele Punkte aus $I_h / \{1\}$ in $[0, \varepsilon]$ liegen.

Sei

(10)
$$\alpha_2(i) = k_{i+1},\ \alpha_3(i) = \alpha_2(i) + k_{i+2}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1;\ k_{n+1} := k_n).$$

(11)
$$\alpha_1(i) = -\sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j}\ (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

wobei p_{n-1} durch (9) bestimmt ist, und $p_i \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$ soll man so wählen, daß

(12)
$$\alpha_1(i) + \alpha_3(i) \geqslant 0\ (i=1, 2, \ldots, n-2).$$

gilt. Aus (9)—(12) folgt

(13)
$$\alpha_1(i) < 0,\ 0 < \alpha_2(i) \leq \frac{1}{2}\alpha_3(i)$$
$$\alpha_1(i) + \alpha_3(i) \geqslant 0\ \ (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

(14)
$$\alpha_1(n-1) + \alpha_2(n-1) = 0,$$

$$t_i + \alpha_j(i)\, h \in I\ (j=1, 2;\ i=1, 2, \ldots, n-1),$$
$$t_i + \alpha_3(i)\, h \in I\ (j=1, 2, \ldots, n-2).$$

Die Bedingungen (9) und (12) kann man leicht erfüllen, etwa $p_{n-1} = 0$, d. h. $k_n = k_{n-1}$ und $p_i = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$.

In $t_i \in I_h$ dieskretisieren wir (RWA) mit der Formel (1) mit $\alpha_1=\alpha_1(i)$, $\alpha_2=\alpha_2(i)$, $\alpha_3=\alpha_3(i)$. Bezeichnen wir entsprechende Koeffizienten a, b, c, d mit a_i, b_i, c_i, d_i. Dann haben wir

$$h^{-2}(a_i x(t_i+\alpha_1(i)h)+b_i x(t_i)+c_i x(t_i+\alpha_2(i)h)+ \\ +d_i(t_i+\alpha_3(i)h)=f(t_i, x(t_i)).$$

Die diskrete Analoga von (RWA) ist jetzt der Form (DRWA) mit $B_h=\operatorname{diag}(0, 1, \ldots, 1, 0) \in R^{n+1}$, $r_h=(z_0, 0, \ldots, 0, z_1) \in R^{n+1}$ und

$$A_h=h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & & \\ a_{10} & b_1 & c_1 & d_1 & & & \\ a_{21} & a_{20} & b_2 & c_2 & d_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-4} & \ldots & a_{n-2,0} & b_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-3} & \ldots & & a_{n-1,0} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & h^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

wobei für $i=1, 2, \ldots, n-1$; $j=0, 1, 2, \ldots, i-1$

$$a_{i,j}=\begin{cases} a_i & \text{falls} \quad j=p_i, \\ 0, & \text{falls} \quad j\neq p_i. \end{cases}$$

Bemerken wir, daß aus (14) $d_{n-1}=0$ folgt. Die Einzigen positiven Elemente außerhalb der Hauptdiagonale der Matrix A_h könnten d_i ($i=1, 2, \ldots, n-2$) sein. Sei

$$\tau_d^+=\{i: \alpha_1(i)+\alpha_2(i)>0, \ i=1, 2, \ldots, n-2\}.$$

Dann gilt

$$d_i>0, \quad \text{falls} \quad i \in \tau_d^+.$$

Aus (12)—(14) gilt für $i=1, 2, \ldots, n-1$

$$a_i<0, \ c_i \begin{cases} <0 & \text{falls} \quad d_i \geqslant 0, \\ \leqslant 0 & \text{falls} \quad d_i<0. \end{cases}$$

3. Inversmonotonie von A_h

1. *Satz* 1. Es gelte (9) für $k_j \in R$ ($j=1, 2, \ldots, n$). Sei h durh (7) definiert und $t_0=0$, $t_i=t_{i-1}+k_i h$, ($i=1, 2, \ldots, n$). Für Vektor $e \in R^{I_h}$ mit den Komponenten

$$e_i=\sin\left(\frac{\pi(t_i+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}\right) \ \varepsilon \in R_+ \ (i=0, 1, \ldots, n) \tag{16}$$

gilt dann $e>0$ und

$$(A_h e)_i=\lambda_i e_i>0 \ (i=0, 1, \dots, n),$$

wobei

$$\lambda_i=\begin{cases} 1 \text{ falls } & i=0, n \\ \dfrac{h^{-2}}{e_i}\,[a_i\,(e_{i-1-p_i}-e_i)+c_i\,(e_{i+1}-e_i)+ & \\ \quad +d_i\,(e_{i+2}-e_i)], & \text{falls } i=1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Beweis. Es ist $0\leqq t_i\leqq 1$ $(i=0, 1, \dots, n)$ und aus (18) folgt $e>0$. Offenbar ist $(A_h e)_i=e_i$ $(i=0, n)$. Weiter gilt

$$(A_h e)_i=h^{-2}\,(a_i e_{i-1-p_i}+b_i e_i+c_i e_{i+1}+d_i e_{i+2})$$
$$(i=1, 2, \dots, n-1).$$

Daraus folgt, wegen $b_i=-(a_i+c_i+d_i)$

$$(A_h e)_i=h^{-2}\,(a_i\,(e_{i-1-p_i}-e_i)+c_i\,(e_{i+1}-e_i)+$$
$$+d_i\,(e_{i+2}-e_i) \ (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Damit ist gezeigt, daß $\lambda_i e_i>0$ ist. Man soll noch $\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \dots, n-1)$ beweisen. Für $i=n-1$ haben wir

$$-\alpha_1(i)=\alpha_2(i)=k_n,$$
$$e_{i-1}+e_{i+1}=2e_i\,\cos\frac{\pi h}{1+2\varepsilon}k_n,$$
$$-2a_{n-1}=-2c_{n-1}=b_{n-1}=2\alpha_2^{-2}(n-1).$$

Jetzt ist

$$(A_h e)_{n-1}=\frac{h^{-2}}{\alpha_2^2\,(n-1)}\,(2e_{n-1}-(e_{n-2}+e_n))$$
$$=\frac{2h^{-2}}{\alpha_2^2\,(n-1)}\,e_{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi\alpha_2\,(n-1)\,h}{1+2\varepsilon}\right)$$
$$=\lambda\,(\alpha_2\,(n-1)h)e_{n-1}=\lambda_{n-1}e_{n-1},$$

wobei $\lambda\,(h)=2h^{-2}\left(1-\cos\dfrac{\pi h}{1+2\varepsilon}\right)$, $\varepsilon\geqq 0$, $\varepsilon\in R$, ist.

Es ist $n\geqq 3$, $\alpha_2\,(n-1)=k_n$, $h^{-1}=\sum\limits_{j=1}^{n}k_j$. Aus (9) folgt

$$k_n \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} k_j,$$

$$h^{-1} \geqslant 2k_n, \quad \alpha_2 (n-2)\, h \leqslant \frac{k_n}{2k_n} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $\varepsilon \geqslant 0$, folgt $\lambda(\alpha_2 (n-1)\, h) > 0$.

Wir beweisen jetzt daß $\lambda_i > 0\, (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ ist. Sei für ein festes $i \in (1, 2, \ldots, n-2\} x := \alpha_1 (i)$, $\alpha_2 := \alpha_2(i)$, $\alpha_3 := \alpha_3(i)$ und

$$\alpha = \frac{\pi h}{1+2\varepsilon}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{h} + \sum_{j=1}^{i} k_j.$$

Dann ist $e_i = \sin \alpha\, \tau$, $e_{i+1} = \sin \alpha\, (\tau + \alpha_2)$, $e_{i+2} = \sin \alpha\, (\tau + \alpha_3)$, $e_{i-1-p_i} = \sin\, \alpha\, (\tau + x)$, wobei p_i durch (12) definiert ist.
Es ist

$$-\tau < x \leqslant -1.$$

Aus

$$\xi(x) := \frac{h^2}{2} (A_h e)_i > 0, \;\; x \in (-\tau, -1).$$

folgt $\lambda_i > 0$. Es gilt

$$\xi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)} f(x) - \frac{\alpha_3 + x}{(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - \alpha_2)} f(\alpha_2) +$$
$$+ \frac{\alpha_2 + x}{(\alpha_3 - x)(\alpha_3 - \alpha_2)} f(\alpha_3),$$

mit

$$f(x) = \frac{1}{x} (\sin\alpha\, (\tau + x) - \sin\alpha\, \tau).$$

Wegen $\alpha_2 - x > 0$, $\alpha_3 - \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 - x > 0$, ist $\xi(x) > 0$ für $x \in (-\tau, -1]$, genau dann, wenn

$$\psi(x) := (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) f(x) - (\alpha_3^2 - x^2) f(\alpha_2) +$$
$$+ (\alpha_2^2 - x^2) f(\alpha_3) > 0, \quad x \in (-\tau, -1],$$

gilt.

Jetzt beweisen wir, daß $\psi'(x) < 0$, $x \in (-\tau, 0]$, und

$$\psi(x) \geqslant \psi(0) > 0, \qquad x \in [-\tau, 0]$$

gilt:

Daraus folgt $\lambda_i > 0$. Zuerst beweisen wfr

Lemma 1. Für $f(x)$ gilt

(a) $$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(0)\frac{x^{j-1}}{j!}\ x \in [-\tau, \alpha_3],$$

$$g(x) := \sin \alpha (\tau + x);$$

(b) $f'(x) < 0$ falls $x \in [-\tau, \alpha_3]$;

(c) $f''(x) > 0$ falls $x \in [0, \alpha_3]$ und $\alpha\tau > \pi/2$;

(d) $f'''(x) > 0$ falls $x \in [-\tau, \alpha_3]$.

Beweis. Die Funktion $g(x)$ ist analytisch in $[-\tau, \alpha_3]$ und gilt

$$g(x) = g(0) + \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!}$$

(a) Es ist offenbar

$$f(x) = \frac{1}{x}(g(x) - g(0)) = \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(0)\frac{x^{j-1}}{j!}.$$

(b) Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} g_1(x),$$

mit

$$g_1(x) := \alpha x \cos\alpha(\tau + x) - \sin\alpha(\tau + x) + \sin\alpha\,\tau.$$

Aus $g_1'(x) = -\alpha^2 \sin\alpha(\tau + x)$ folgt

$$g_1'(x) \begin{cases} = 0 & \text{falls } x = -\tau, \\ > 0 & \text{falls } x \in (-\tau, 0), \\ = 0 & \text{falls } x = 0, \\ < 0 & \text{falls } x \in (0, \pi/\alpha - \tau), \\ = 0 & \text{falls } x = \pi/\alpha - \tau. \end{cases}$$

Jetzt haben wir

$$g_1(x) \leqslant g_1(0) = 0, \quad x \in (-\tau, \pi/\alpha - \tau).$$

Aus $x \in [-\tau, \alpha_3]$ folgt

$$0 \leqslant \alpha(\tau + x) \leqslant \frac{\pi}{1 + 2\varepsilon}(\varepsilon + t_{i+2}) < \pi,$$

d.h.

$$x \in [-\tau, \pi/\alpha - \tau].$$

Aus (a) folgt

$$f'(0)=\frac{1}{2}g_1''(0)=-\alpha^2\sin\tau<0$$

und damit $f'(x)<0$.

(c) Es gilt

$$f''(x)=\frac{1}{x^3}g_2(x),$$

mit

$$g_2(x):=-2\alpha x\cos\alpha(\tau+x)+(2-\alpha^2x^2)\sin\alpha(\tau+x)-2\sin\alpha\tau.$$

Wegen

$$g_2'(x)=-\alpha^3x^2\cos\alpha(\tau+x),$$

für $\alpha\tau>\pi/2$ folgt

$$g_2'(x)\begin{cases}<0 & \text{falls}\quad x\in[-\tau,\pi/2\alpha-\tau),\\ =0 & \text{falls}\quad x=\pi/2\alpha-\tau,\\ >0 & \text{falls}\quad x\in(\pi/2\alpha-\tau,0),\\ =0 & \text{falls}\quad x=0,\\ >0 & \text{falls}\quad x\in(0,\pi/\alpha-\tau).\end{cases}$$

Aus $x\in[-\tau,\alpha_3]$ folgt $x<\pi/\alpha-\tau$, und für $\alpha\tau<\pi$ folgt $\pi/\alpha-\tau<0$. Jetzt haben wir

$$g_2(x)\geqslant g_2(0)=0,\qquad x\in[0,\alpha_3].$$

Aus (a) gilt

$$f''(0)=\frac{1}{3}g^{(3)}(0)=-\frac{1}{3}\alpha^3\cos\alpha\tau,$$

und wegen $\pi/2<\alpha\tau<\pi$ ist $f''(0)>0$.

(d) Es ist

$$g'''(x)=\frac{1}{x^4}g_3(x),$$

mit

$$g_3(x):=(6\alpha x-\alpha^3x^3)\cos\alpha(\tau+x)+(3\alpha^2x^2-6)\sin\alpha(\tau+x)+6\sin\alpha\tau.$$

Weiter ist

$$g_3'(x)=\alpha^4x^3\sin\alpha(\tau+x)$$

und

$$g_3'(x)\begin{cases}=0 & \text{falls}\quad x=-\tau,\\ <0 & \text{falls}\quad x\in(-\tau,0),\\ =0 & \text{falls}\quad x=0,\\ >0 & \text{falls}\quad x\in(0,\pi/\alpha-\tau).\end{cases}$$

Es gilt $g_3(x) \geqslant g_3(0)=0$, falls $x \in [-\tau, \alpha_3]$.
Aus (a) haben wir

$$f'''(0)=\frac{1}{4} g^{(4)}(0)=\frac{1}{4} \alpha^4 \sin \alpha\tau > 0$$

und damit

$$f'''(x)>0 \quad \text{für} \quad x \in [-\tau, \alpha_3].$$

Lemma damit ist bewiesen.

Wir zeigen jetzt: $\psi'(x)<0$; $\psi(x) \geqslant \psi(0)>0$ falls $x \in [-\tau, 0]$. Es ist

$$\psi'(x)=(\alpha_3^2-\alpha_2^2) f'(x)+2x (f(\alpha_2)-f(\alpha_3))$$

und wagen $f'(x)<0$; $f(\alpha_2)>f(\alpha_3)$ (weil $\alpha_2<\alpha_3$), folgt $\psi'(x)<0$ und $\psi(x) \geqslant \psi(0)$ falls $x \in [-\tau, 0]$.

Um $\psi(0)>0$ zu zeigen, betrachten wir zwei Fälle.
$\underline{I\ \alpha\tau<\pi/2}$. Nach (a), Lemma 1, haben wir

$$\begin{aligned}\psi(o) &=(\alpha_3^2-\alpha_2^2) f(0)-\alpha_3^2 f(\alpha_2)+\alpha_2^2 f(\alpha_3)\\ &=(\alpha_3^2-\alpha_2^2) f(0)+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} (\alpha_2^2\, \alpha_3^{j-1}-\alpha_3^2\, \alpha_2^{j-1}).\end{aligned}$$

Wegen $\quad f(0)=g'(0)=\alpha \cos \alpha\, \tau$,

gilt

$$\psi(0)=\sum_{j=2}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} [\alpha_2^2 \alpha_3^{j-1}-\alpha_3^2 \alpha_2^{j-1}].$$

Offenbar ist

$$g^{(j)}(x) = \begin{cases} (-1)^{k-1} \alpha^{2k-1} \cos \alpha (\tau+x), & \text{falls} \quad j=2k-1, \\ (-1)^k \alpha^{2k} \sin \alpha (\tau+x), & \text{falls} \quad j=2k. \end{cases} \qquad (j=1, 2, \ldots)$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned}\psi(0)=&-\alpha^2 \sin \alpha\, \tau\, (\alpha_2^2 \alpha_3-\alpha_3^2 \alpha_2)-\alpha^3 \cos \alpha\tau\, (\alpha_2^2 \alpha_3^2-\alpha_3^2 \alpha_2^2)+\\ &+\sin \alpha\tau \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} (\alpha_2^2 \alpha_3^{2k-1}-\alpha_3^2 \alpha_2^{2k-1})\\ &+\cos \alpha\tau \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\alpha^{2k-1}}{(2k-1)!} (\alpha_2^2 \alpha_3^{2k-2}-\alpha_3^2 \alpha_2^{2k-2}),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\psi(0) &=\alpha^2 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_3-\alpha_2) \sin \alpha\tau+\sin \alpha\tau \sum_{k=1}^{\infty} (A_{4k}+A_{4k+2})+\\ &+\cos \alpha\tau \sum_{k=1}^{\infty} (B_{4k+1}+B_{4k+3}),\end{aligned}$$

mit

$$A_{4k}:\ =(-1)^{2k}\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k-1}-\alpha_3^2\alpha_2^{4k-1}),\quad (k=1,2,\ldots),$$

$$A_{4k+2}:=(-1)^{2k+1}\frac{\alpha^{4k+2}}{(4k+2)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k+1}-\alpha_3^2\alpha_2^{4k+1}),\quad (k=1,2,\ldots),$$

$$B_{4k+1}:=(-1)^{2k}\frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k}-\alpha_3^2\alpha_2^{4k}),\quad (k=1,2,\ldots),$$

$$B_{4k+3}:=(-1)^{2k+1}\frac{\alpha^{4k+3}}{(4k+3)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k+2}-\alpha_3^2\alpha_2^{4k+2})\quad (k=1,2,\ldots).$$

Wegen $0<\alpha\tau<\pi/2$ ist $\sin\alpha\tau>0$, $\cos\alpha\tau>0$. Weiter ist für $k=1,2,\ldots$

$$A_{4k}+A_{4k+2}=\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_3^{4k-3}-\alpha_2^{4k-3}-\frac{\alpha^2}{(4k+2)(4k+1)}(\alpha_3^{4k-1}-\alpha_2^{4k-1})\right],$$

$$A_{4k}+A_{4k+2}>\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_3^{4k-3}-\alpha_2^{4k-3}-\frac{\alpha^2\alpha_3^2}{(4k+2)(4k+1)}\alpha_3^{4k-3}\right].$$

Wegen $\alpha\alpha_3<\pi$, $k\geqslant 1$ gilt

$$\frac{\alpha^2\alpha_3^2}{(4k+2)(4k+1)}<\frac{\pi^2}{42}<\frac{1}{3}.$$

Es ist $\alpha_3\geqslant 2\alpha_2$ und daraus folgt

$$A_{4k}+A_{4k+2}>\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_3^{4k-3}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\alpha_2^{4k-3}\right]$$

$$>\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_2^{4k-3}\left(2^{4k-3}.\frac{2}{3}-1\right).$$

$$>\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\alpha_3^2\alpha_2^{4k-1}\left(2\cdot\frac{2}{3}-1\right)>0.$$

Weiter gilt

$$B_{4k+1}+B_{4k+3}=\frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\Bigg[\alpha_3^{4k-2}-\alpha_2^{4k-2}-$$

$$-\frac{\alpha^2}{(4k+3)(4k+2)}(\alpha_3^{4k}-\alpha_2^{4k})\Bigg]$$

$$>\frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_2^{4k-2}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\alpha_2^{4k-2})\right]$$

$$>\frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_2^{4k-2}\left(2^{4k-2}.\frac{3}{4}-1\right)>0,$$

weil $2^{4k-2}\cdot\frac{3}{4}>1$ für $k\geqslant 1$, $\alpha_3\geqslant 2\alpha_2$ und gilt

$$\frac{\alpha^2(\alpha_3^{4k}-\alpha_2^{4k})}{(4k+3)(4k+2)}<\frac{\alpha^2\alpha_3^2\cdot\alpha_3^{4k-2}}{42}<\frac{1}{4}\alpha_3^{4k-2}$$

wegen $\alpha\alpha_3<\pi$.

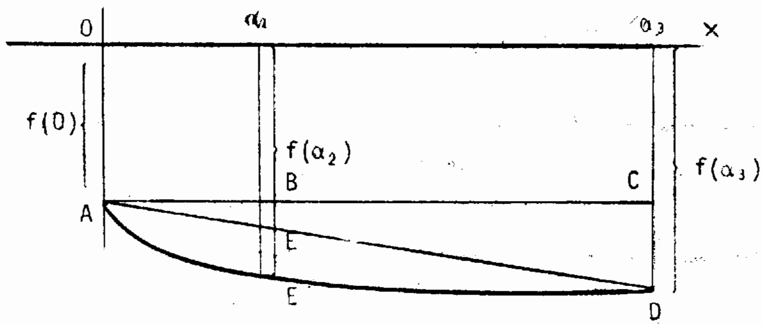
Jetzt kannman leicht sehen, daß

$$\psi(0)>0 \quad \text{falls} \quad x\in[-\tau, 0] \quad \text{und} \quad \alpha\tau<\pi/2.$$

II $\boldsymbol{\alpha\tau>\pi\alpha}$. In diesem Fall gilt $f''(x)>0$ für $x\in[0, \alpha_3]$ (Lemma 1, (c)). Wegen $f'(x)<0$ für $x\in[-\tau, \alpha_3]$ (Lemma 1, (b)) gilt

$$0<f(0)-f(\alpha_2)<f(0)-f(\alpha_3)$$

weil $0<\alpha_2<\alpha_3$. Jetzt haben wir folgende Situation



weil $f(0)=\alpha\cos\alpha\tau<0$ wegen $\pi/2<\alpha\tau<\pi$. Aus ΔABE ΔACD folgt $(\alpha_3>\alpha_2)$

$$\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}>\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BE}>\frac{f(0)-f(\alpha_3)}{BE'}=\frac{f(0)-f(\alpha_3)}{f(0)-f(\alpha_2)}$$

und weiter (wagen $f(0)-f(\alpha_2)>0$)

$$\alpha_3^2(f(0)-f(\alpha_2))>\alpha_2^2(f(0)-f(\alpha_3))$$

oder

$$\psi(0)=(\alpha_3^2-\alpha_2^2)f(0)-\alpha_3^2 f(\alpha_2)+\alpha_2^2 f(\alpha_3)>0.$$

Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

Im speziellen Fall kann man etwas mehr über λ_i sagen.

Lemma 2. Seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Dann gilt

$$\tau\geqslant\alpha_2(i)\geqslant-\alpha_1(i) \quad \Rightarrow\lambda_i\geqslant\lambda(\alpha_2(i)h),$$

$$-\tau\leqslant-\alpha_3(i)\leqslant\alpha_1(i)<-\alpha_2(i) \quad \Rightarrow\lambda_i\geqslant\lambda(\alpha_3(i)h).$$

Beweis. Mit Bezeichnungen aus dem Beweis des Satzes 1 soll man nur zeigen, daß $\xi(x)$ monoton wachsende Funktion in $[-\tau, 0]$ ist. Donn folgt

$$\xi(x) \geqslant \begin{cases} \xi(-\alpha_2) & \text{falls} \quad x \in [-\alpha_2, -1], \\ \xi(-\alpha_3) & \text{falls} \quad x \in [-\alpha_3, -\alpha_2). \end{cases}$$

Weiter für $x = -\alpha_2$ ($d_i = 0$ nach (5)) haben wir

$$\xi(-\alpha_2) = \frac{1}{2\alpha_2^2}(-\sin\alpha(\tau-\alpha_2) - \sin\alpha(\tau+\alpha_2) + 2\sin\alpha\tau)$$

$$= \frac{1}{\alpha_2^2}\sin\alpha\tau(1-\cos\alpha\alpha_2) = \frac{1}{2}h^2\lambda(\alpha_2 h)\sin\alpha\tau.$$

Daraus folgt

$$(A_h e)_i = 2h^{-2}\xi(-\alpha_2) = \lambda(\alpha_2 h) e_i$$

und

$$\lambda_i = \lambda(\alpha_2 h).$$

Wöllig analog für $x = -\alpha_3$ ($c_i = 0$ nach (6)) haben wir

$$\xi(-\alpha_3) = \frac{1}{2}h^2\lambda(\alpha_3 h) \quad \sin\alpha\tau \quad \text{und} \quad \lambda_i = \lambda(\alpha_3 h).$$

Jetzt bleibt zu beweisen, daß $\xi(x)$ monoton wachsende Funktion in $[-\tau, 0]$ ist. Aus dem Ausdruck für $\xi'(x)$ folgt für $x \in [-\tau, 0]$

$$D(x) > 0 \Rightarrow \xi'(x) > 0,$$

mit

$$D(x) := (\alpha_3 - \alpha_2)[(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x) f'(x) + \\ + (\alpha_3 + \alpha_2 - 2x) f(x)] + (\alpha_2 - x)^2 f(\alpha_3) - \\ - (\alpha_3 - x)^2 f(\alpha_2).$$

Wegen $f'''(x) > 0$ für $x \in [-\tau, \alpha_3]$ (lemma 1, (d)), folgt $x_1, x_2 \in [-\tau, \alpha_3]$

(23) $$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f''(x_1) \leqslant f''(x_2).$$

Betrachten wir $D(x)$ und zeigen $D(x) > 0$. Offenbar ist

$$D'(x) = f''(x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)(\alpha_3 - \alpha_2) - 2f(x)(\alpha_3 - \alpha_2) - 2(\alpha_2 - x) f(\alpha_3) + 2(\alpha_3 - x) f(\alpha_2)$$

oder

$$D'(x) = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x) f''(x) - 2(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot \left[f(x) - \frac{(\alpha_3 - x) f(\alpha_2) - (\alpha_2 - x) f(\alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}\right].$$

Wegen

$$f(x)-\frac{(\alpha_3-x)f(\alpha_2)-(\alpha_2-x)f(\alpha_3)}{\alpha_3-\alpha_2}=f''(\sigma)\frac{(\alpha_2-x)(\alpha_3-x)}{2},$$

Wobei σ abhängig von x, α_2, α_3 ist, und gilt

$$\min\{x, \alpha_2, \alpha_3\}<\sigma<\max\{x, \alpha_2, \alpha_3\},$$

haben wir

$$D'(x)=(\alpha_2-x)(\alpha_3-x)(\alpha_3-\alpha_2)(f''(x)-f''(\sigma)).$$

Für $x\in[-\tau, \alpha_2]$ ist

(18) $$x<\sigma<\alpha_3.$$

Jetzt ist $D'(x)=(\alpha_2-x)(\alpha_3-x)(\alpha_3-\alpha_2)(f''(x)-f''(\sigma))$, und wegen (23), (24) folgt $D'(x)<0$, $x\in[-\tau, \alpha_2]$ und $D'(\alpha_2)=0$. Daraus folgt $x\in[-\tau, \alpha_2]\Rightarrow D(x)>>D(\alpha_2)=0$. Weiter haben wir $D(x)>0$, $x\in[-\tau, 0]$ und damit $\xi'(x)>0$, $x\in[-\tau, 0]$.

2. *Satz* 2. Die Matrix A_h, (15), ist

a) $M-$ Matrix, falls $\tau_d^+=\emptyset$ ist

b) i.m. Matrix, falls $\tau_d^+\neq\emptyset$ und für jedes $i\in\tau_d^+$

(19) $$\alpha_1(i+1)\geqslant z_1$$

gilt, wobei z_1 kleinere Lösung der Gleichung

(20) $$z^2+\alpha_3(i+1)z+\alpha_2(i+1)\Delta=0$$

mit

$$\Delta^{-1}=\frac{-1}{\alpha_3(i+1)+\alpha_2(i+1)}+\frac{\alpha_3(i+1)\alpha_3(i)(\alpha_3^2(i)-\alpha_1^2(i))}{4\alpha_2(i)(\alpha_2^2(i)-\alpha_1^2(i))(\alpha_3^2(i+1)-\alpha_2^2(i+1))}.$$

Beweis. a) Sei $\tau_d^+=\emptyset$. Dann gilt nach (4) $d_i\leqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$, $a_i<0$, $c_i\leqslant 0$, $b_i>0$, $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, d.h. A_h ist L -Matrix. Mit dem Vektor $e>0$ aus dem Satz 1 gilt $I_h^0(A_he)=0$. Unsere Behauptung folgt jatzt nach M -Kriterium [2].

b) Sei $\tau_d^+\neq 0$ und $A:=h^2A_h$.Wir definieren

(28) $$M=A_d+B, \qquad L=E+A_d^{-1}C$$

mit nichtpositiven Matrizen B und C, für welche $A^-=B+C$ ist. Jetzt beweisen wir die erste Bedingung des ML -Kriteriums $A\leqslant ML$, d.h. ([2])

(21) $$A_0^+\leqslant BA_d^{-1}C.$$

Sei weiter

$$\tilde{d}_i=\begin{cases}\tilde{d}_i & \text{falls} \quad i\in\tau_d^+\\ & \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, n-2)\\ 0 & \text{falls} \quad i\notin\tau_d^+\end{cases}$$

Dann ist

$$A_0^+=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & \tilde{d}_1 & & & & \\ & & 0 & 0 & \tilde{d}_2 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \tilde{d}_{n-2} \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen $A_d=\operatorname{diag}(h^2, b_1, \ldots, b_{n-1}, h^2)$, ist $A^-=A-A_d-A_0^+$. Sei

$$B=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ a_{10} & 0 & \frac{1}{2}c_1 & d_1-\tilde{d}_1 & & & \\ a_{21} & a_{20} & 0 & \frac{1}{2}c_2 & d_2-\tilde{d}_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n-2,n-3} \ldots a_{n-2,0} & & & 0 & \frac{1}{2}c_{n-2} & d_{n-2}-\tilde{d}_{n-2} & \\ a_{n-1,n-2} \ldots a_{n-1,1} & & & a_{n-1,0} & 0 & \frac{1}{2}c_{n-1} & \\ & & & & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$a_{i,j}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_i & \text{falls } j=p_i, \\ & \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1) \\ & \qquad (j=0, 1, \ldots, i-1) \\ 0 & \text{falls } j\neq p_i. \end{cases}$$

Offenbar gilt $B\leqslant 0$ und $C=A^--B\leqslant 0$. Jetzt ist (21) äquivalent mit

$$4d_ib_{i+1}\leqslant c_ic_{i+1} \quad \text{für} \quad i\in\tau_d^+.$$

Für beliebiges aber festes $i\in\tau_d^+$ seien

$$\begin{aligned} &y:=\alpha_1(i), \qquad \alpha:=\alpha_2(i), \qquad \beta:=\alpha_3(i) \\ (22)\qquad & \\ &x:=\alpha_1(i+1), \qquad \gamma:=\alpha_3(i+1). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha_2(i+1)=\beta-\alpha>0$ ist (21) äquivalent mit

$$\frac{-2}{\gamma(\beta-\alpha)}\left(\frac{\gamma+\beta-\alpha+x}{x}+\frac{\beta\gamma(\beta^2-y^2)}{4\alpha(\alpha^2-y^2)(\gamma-\beta+\alpha)}\cdot\frac{\gamma+x}{\beta-\alpha-x}\right)\leqslant 0$$

bzw.

$$\frac{\gamma+\beta-\alpha}{x}+1+\frac{P}{\gamma-\beta+\alpha}\cdot\frac{\gamma+x}{\gamma-\alpha-x}\geqslant 0 \tag{23}$$

mit

$$P=\frac{\beta\gamma\,(\beta^2-y^2)}{4\alpha\,(\alpha^2-y^2)}.$$

Wegen $i\in\tau_d^+$, $\alpha+y>0$, (9) und (13) gilt

$$\alpha\leqslant\beta-\alpha,\qquad \alpha+x\leqslant 0,\qquad \gamma\geqslant\beta,\qquad \gamma\geqslant 2\,(\beta-\alpha).$$

Die Bedingung (23) ist erfüllt, falls (24) gilt:

$$g\,(x):=(P-\gamma+\beta-\alpha)\,(x^2+\gamma x)+(\gamma^2-(\beta-\alpha)^2)\,(\beta-\alpha)\leqslant 0. \tag{24}$$

Offenbar ist $g\,(0)>0$ und

$$g\,(-\alpha)=P\alpha\,(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta+\alpha)\,(\alpha\gamma-\alpha^2+(\beta-\alpha)\,(y+\beta-\alpha)).$$

Wegen $\alpha-\gamma<0$ gilt

$$g\,(-\alpha)=\frac{\beta}{4\,(\alpha^2-y^2)}\,(\gamma\,(\beta^2-y^2)\,(\alpha-\gamma)+$$

$$+4\,(\gamma-\beta+\alpha)\,(y+\beta-2\alpha)\,(\alpha^2-y^2)),$$

$$g\,(-\alpha)=\frac{\beta}{4\,(\alpha^2-y^2)}\,(-(\gamma^2-\alpha\gamma)\,(\beta^2-y^2-4\,(\alpha^2-y^2))$$

$$-4\,(\beta-\alpha)\,(\beta-2\alpha)\,(\alpha^2-y^2))<0.$$

Weiter gilt

$$P-\gamma+\beta-\alpha=\frac{1}{\alpha\,(\alpha^2-y^2)}\left(\frac{\gamma}{4}\,(\beta\,(\beta^2-y^2)-4\alpha\,(\alpha^2-y^2))+(\beta-\alpha)\,\alpha\,(\alpha^2-y^2)\right)$$

$$\geq\frac{1}{\alpha\,(\alpha^2-y^2)}\left(\gamma\alpha\left(\alpha^2+\frac{y^2}{2}\right)+\alpha\,(\beta-\alpha)\,(\alpha^2-y^2)\right)>0,$$

weil $\beta\geqslant 2\alpha$.

Daraus folgt $g\,(x)\leqslant 0$ für $x\in[z_1, z_2]$, wobei z_1, z_2 die Lösungen von der Gleichung $g\,(x)=0$ sind. Wegen $p-\gamma+\beta-\alpha>0$, $-\gamma/2\leqslant-\alpha$, $g\,(0)=g\,(-\gamma)>0$, $g\,(-\alpha)<0$ haben wir $z_1\in(-\gamma,\gamma/2)$ und $z_2\in(-\alpha, 0)$. Aus $x=\alpha_1\,(i+1)\leqslant-\alpha_2\,(i)=$ $=-\alpha$ folgt $g\,(x)\leqslant 0$ für $\alpha_1\,(i+1)\in[z_1, -\alpha_2\,(i)]$.

Da die Gleichung (20) äquivalent mit der Gleichung $g\,(x)=0$ ist, die Bedingung (21) ist unter den Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt.

Offensichtlich gilt $M_0 \leqslant 0$. $L_0 \leqslant 0$, d. h. M und L sind L-Matrizen. Matrix M ist auch M-Matrix, was wir beweisen. Mit $e=\delta$ haben wir $(Me)_0=(Me)_n=h^2$, $(Me)_{n-1}=\frac{1}{2}a_{n-1}+b_{n-1}$ und für $i=1, 2, \ldots, n-2$

$$(Me)_i=\frac{1}{2}a_i+b_i+\frac{1}{2}c_i+d_i-\tilde{d}_i=\begin{cases}\frac{1}{2}a_i+b_i+\frac{1}{2}c_i+d_i & \text{für } i\notin\tau_d^+,\\ \frac{1}{2}a_i+b_i+\frac{1}{2}c_i & \text{für } i\in\tau_d^+.\end{cases}$$

Wegen $c_i \leqslant 0$, $a_i<0$ und $\frac{1}{2}a_i+d_i<0$, ist

$$(Me)_i>a_i+b_i+c_i+d_i=0, \; (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Es gilt, also, $I_h^0(Me)=\emptyset$, und nach M-Kriterium [2] folgt, daß die Matrix M-Matrix ist.

Mit dem Vektor e aus dem Satz 1 haben wir $I_h^0(Ae)=\emptyset$. Daraus nach ML-Kriterium [2] folgt die Behauptung des Satzes 2.

Im Satz 2 ist gezeigt, dass A_h M-Matrix ist, falls $\tau_d^+=\emptyset$, d. h. falls

$$\alpha_2(i)=k_{i+1}\leqslant\sum_{j=0}^{p_i}k_{i-j}=-\alpha_1(i) \; (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{25}$$

gilt. Die Koeffizienten p_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ sind durch (9) und (12) bestimmt.

Satz 3. Sei $k_1=k_2\geqslant 1$,

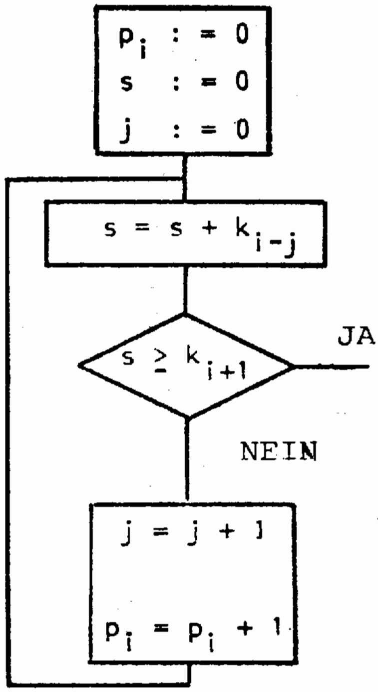
$$k_i\leqslant k_{i+1}\leqslant\sum_{j=0}^{i-1}k_{i-j} \; (i=3, 4, \ldots, n-1), \tag{26}$$

Seien k_n und p_{n-1} nach (9) bestimmt. Dann ist es möglich $p_i\in\{0, 1, \ldots, i-1\}$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$ so zu wählen, daß die Matrix A_h M-Matrix ist.

Beweis. Wegen $k_2=k_1$ ist (25) mit $p_1=0$ für $i=1$ erfüllt. Aus (9) folgt, daß (25) auch für $i=n-1$ erfüllt ist. Für $i=2, 3, \ldots, n-2$ p_i soll man so wählen, daß

$$k_{i+1}\leqslant\sum_{j=0}^{p_i}k_{i-j}\leqslant k_{i+1}+k_{i+2} \; (i=2, 3, \ldots, n-2),$$

gilt, was nach (26) immer möglich ist. Z. B. man kann p_i für $i=2, 3, \ldots, n-2$ mit folgenden Massnahme nehmen.



p_i kreigen wir wenn JA-Entscheidung vorkommt, und wegen (26) ist

$$p_i \in \{0, 1, \ldots, i-1\}.$$

Bemerkung. Wegen $k_1 = k_2$ bekommen wir aus (25)

$$k_{i+1} \leqslant \sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \leqslant 2^{i-1} k_1 \; (i=2, 3, \ldots, n-1)$$

d. h. ist $k_i > 2^{i-2} k_1$ für eines $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ kann A_h nicht M-Matrix sein.

3. Für die Funkction $g(x)$ aus (24) gilt $g'(-\gamma/2)=0$. Daraus folgt $z_1 \in (-\gamma, -\gamma+\alpha)$, wobei z_1 die kleinere Lösung von der Gleichung (20) ist. Die Bedingung (19) ist erfüllt, falls

$$\alpha_1(i+1) > \alpha_2(i) - \alpha_3(i+1) \quad i \in \tau_d^+ \tag{27}$$

gilt. Jetzt haben wir als die Folgerung des Satzes 2

Satz 4. Die Matrix A_h ist

a) M-Matrix, falls $\tau_d^+ = \emptyset$, ist

b) i. m. Matrix, falls $\tau_d^+ \neq \emptyset$ und für $i \in \tau_d^+$ (27) gilt.

Der einfachste Fall $\alpha_1(i)\,(i=1, 2, \ldots, n)$ zu rechnen ist $p_i=0$ $(i==1, 2, \ldots, n-1)$, $k_n=k_{n-1}$. Dann sind die Bedingungen (9) und (12) erfüllt und es gilt $d_i\geqslant 0\,(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Daraus folgt. A_h kann M-Matrix sein nur im Fall $k_i=k_1\,(i=2, 3, \ldots, n)$, d. h. im äquidistanten Fall. Im diesem Fall wegen (9) ist (27) immer erfüllt.

3. *Satz* 5. Sei für die Matrix A_h $\tau_d^+=\emptyset$, oder $\tau_d^+\neq\emptyset$ und für jedes $i\in\tau_d^+$

$$\alpha_1(i+1)>z_1$$

wobei z_1 die kleinere Lösung von $z^2+\alpha_3(i)\,z+\alpha_2(i+1)\,\Delta=0$ mit Δ aus dem Satz 2 ist. Dann

a) gibt es den kleinsten positiven Eigenwert λ_h von $A_hx=\lambda B_hx$,

b) gilt $\lambda_h\geqslant\lambda_0$, wobei

$$\lambda_0=\min\{\lambda_i : i=1, 2, \ldots, \mathrm{n}-1\}$$

mit λ_i aus dem Satz 1 mit $\varepsilon=0$.

Beweis. a) Es ist $A_h^{-1}\geqslant 0$ (Satz 2) und $B_h=\operatorname{diag}(0, 1, \ldots, 1, 0)\geqslant 0$.

Daraus folgt $A_h^{-1}B_h\geqslant 0$ und der Spektralradius $\rho=\rho(A_h^{-1}B_h)>0$ ist ein Eigenwert der Matrix $A_h^{-1}B_h$. Daraus folgt, daß $\lambda_h=\rho^{-1}$ der kleinste positive Eigenwert von $A_hx=\lambda B_hx$ [1a], [2] ist.

b) Für e aus dem Satz 1, wegen $\varepsilon=0$, gilt $e_0=e_n=0$.
Daraus folgt

$$(A_he)_i=(B_he)_i=0 \quad (i=0, n).$$

Wie im Satz 1, haben wir

$$(A_he)_i=\lambda_i(B_he)_i \quad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

und

$$A_he\geqslant\lambda_0 B_he$$

Da $A_h^{-1}\geqslant 0$ ist, folgt $e\geqslant\lambda_0A_h^{-1}B_he$ und $\|A_h^{-1}B_he\|_e\leqslant\lambda_0^{-1}$ Wegen $\rho(A_h^{-1}B_h)==\lambda_h^{-1}$ gilt $\lambda_h^{-1}\leqslant\|A_h^{-1}B_he\|_e$, [2]. Daraus folgt $\lambda_h^{-1}\leqslant\lambda_0^{-1}$, d. h. $\lambda_0\leqslant\lambda_h$.

Als die Folgerungen des Satzes 5 haben wir folgede Behauptungen.

Im Fall daß für $i=1, 2, \ldots, n-2$

$$k_{i+1}+k_{i+2}=\alpha_3(i)\leqslant\sum_{j=1}^{i}k_j=:\tau$$

gilt, haben wir

$$-\tau\leqslant-\alpha_3(i)\leqslant\alpha_1(i).$$

Nach Lemma 2, dann gilt für $i=1, 2, \ldots, n-2$

$$\lambda_i\geqslant\begin{cases}\lambda(\alpha_2(i)\,h) & \text{falls} \quad -\alpha_1(i)\leqslant\alpha_2(i),\\ \lambda(\alpha_3(i)\,h) & \text{falls} \quad \alpha_1(i)<-\alpha_2(i).\end{cases}$$

Die Funktion $\lambda(h)=2h^2(1-\cos\pi h)$ ist für $h\in[0, 0.5]$ monoton fallende und daraus folgt

$$\lambda_i \geqslant \lambda(2k_n h) \quad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

weil $2k_n \geqslant \alpha_3(i) \geqslant 2\alpha_2(i)$. Jetzt haben wir

$$\lambda_0 \geqslant \lambda(2k_n h).$$

Ist in (9) und (11) $p_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ und gelte

$$k_{i+1}=\alpha_2(i) \leqslant \sum_{j=1}^{i} k_j,$$

dann gilt nach Lemma 2

$$\lambda_0 \geqslant \lambda(k_n h).$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1a] Bohl, E., *Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer Tracts in Natural Philosophy, Bd.* 25, *Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (*1974*).*

[1b] Bohl, E., *Stabilitätsungleichungen für diskrete Analoga nichtlinearer Randwertaufgaben. ISNM* 27, 9—28, *Birkhäuser—Verlag, Basel und Stuttgart (*1975*).*

[1c] Bohl, E., *On finite difference methods as applied to boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo (IAC), Publicazioni Serie III — N.* 100 *(*1975*).*

[1d] Bohl, E., *Iterative procedures in the study of discrete analoques for nonlinear boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone" (IAC), Pubb, S. III — N.* 107 *(*1975*).*

[1e] Bohl, E., *Zur Anwendung von Differenzschemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben. ISNM* 32, 25—47, *Birkhäuser — Verlag, Basel und Stutgart (*1976).

[1f] Bohl, E., *On a Stability Inequality for Nonlinear Operators. SIAM J. Num. Anal.,* 242 — 252 *(*1977*).*

[1g] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems. To oppear in Procedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May* 30. — *June* 2., 1978. *Academic Press (*1978*).*

[2] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes of Higher Order. A Summary for Two Point Boundary Value Problems Aequ. Math.,* 19, 1—36 *(*1979*).*

[3] Collatz, L., *The Numerical treatment of differential equations. Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York (*1964).

[4] Flaherty, J. E., R. E. O'Malley, Jr., *The Numerical Solution of Boundary Value Problems for Stiff Differential Equations, Math. Camp., Vol.* 31, *No.* 137, 66—93, *(*1977*).*

[5] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley, New York (*1962*).*

[6] D. Herceg, On Nonequidistant Difference Formulae of the Hermite Type, Review of Res/arch Faculty of Science — University of Novi Sad, Vol. 8 (1978), 95—99 (in Serbo—Croation).

[7] Keller, H. B., *Numerical methods for two—point boundary value problems, Blaisdell, Waltham, MA. (*1968*).*

[8a] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren. Dissertation, Münster* (1975).

[8b] Lorenz, J., *Zur Inversmonotonie diskreter Probleme. Numer. Math.* 27, 227—238 (1977).

[9] M. Lentini, V. Pereyra, Boundary Problem Solvers for First Order System Based on Deffered Corrections, In: Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, edited bv A. K. Aziz, Academic Press, New York — San Francisco — London 293—315, 1975.

[10a] Pearson, C. E., *On a Numerical Method for Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type, J. Math. Phys.*, 47, 134—154 (1968).

[10b] Pearson, C. E., *On Nonlinear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type, J. Math. Phys.* 47, 351—358, (1968).

[11] Pflanz, E., *Über die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech., Bd. 17, Nr. 5, 296—300, (1937).*

Dragoslav Herceg

NEEKVIDISTANTNA DISKRETIZACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SA FENOMENOM GRANIČNOG SLOJA I NEKE OSOBINE DISKRETNOG ANALOGONA

U radu se neekvidistantnom diskretizacijom sa mrežom (8) formira diskretni analogon (DRWA) za (RWA). Mreža I_h je formirana tako da $[0, \varepsilon]$, $0<\varepsilon<<1$ sadrži što veći broj tačaka mreže I_h, što je pogodno za numeričko rešavanje problema tipa (RWA) koji imaju fenomen graničnog sloja u $t=0$. U § 3 dokazana je inverzna monotonija matrice A_h, i određena vrednost λ_0 za koju važi $\lambda_0 \leq \lambda_h$, gde je λ_h najmanja pozitivna karakteristična vrednost za $A_h x = \lambda B_h x$. Koristeći se rezultatima teorema 2 i 3 mogu se rešiti mnogi problemi vezani za rešavanje (DRWA): egzistencija i jednoznačnost rešenja x_h od (DRWA) konvergencija postupka paralelne sečice, nejednačina stabilnosti, konvergencija diskretnog rešenja x_h ka kontinualnom rešenju od (RWA).

Rezultat teoreme 1 u ekvidistantnom slučaju nalazi se u [1*e*], ali dokaz iz [1*e*] nije moguće primeniti na neekvidistantan slučaj.

Ovaj rad sadrži deo moje doktorske disertacije, koju sam započeo pod rukovodstvom profesora dr Ericha Bohla u Matematičkom institutu univerziteta u Münsteru, SR Nemačka. Zahvaljujem se Institutu za matematiku PMF-a u Novom Sadu i SIZ-i za naučni rad SAP Vojvodine, koji su mi omogućili i finansirali osmomesečni boravak u Münsteru.