Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Bulletin des travaux de la Faculté des Sciences — Université de Novi Sad, Tome 9 (1979)

Stojan Bogdanović

(m, n)-IDEAUX ET LES DEMI-GROUPES (m, n)-REGULIERS

(Reçu Septembre le 3, 1979.)

Extrait: Dans ce travail nous caractérisons une classe de demi-groupe chez qui (m, n)-idéal de n'importe quel (m, n)-idéal de demi-groupe est un (m, n)-idéal de demi-groupe. Puis, on caractérise les demi-groupes (m, n)-réguliers au moyen de (m, n)-idéaux.

1. Introduction

S. Lajos, [5] a introduit la notion de (m, n)-idéal. Le sous-demi-groupe A de demi-groupe S est (m, n)-idéal de S si

$$A^m S A^n \subset A$$

$m, n \in N \cup \{0\}$, $(A^\circ S = SA^\circ = S)$. Il est clair qu'on généralise de cette manière les notions: L'idéal à gauche, l'idéal à droite et bi-idéal, [1].

Soit A une partie non vide de demi-groupe S, alors un (m, n)-idéal de S qui est engendré par A est

$$[A]_{(m, n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} \{A^i\} \cup A^m S A^n.$$

Un (m, n)-idéal principal de demi-groupe S qui est engendré par $a \in S$ est

$$[a]_{(m, n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} \{a^i\} \cup a^m S a^n.$$

Le sous-demi-groupe Q de demi-groupe S est un (m, n)-quasi-ideal de S si

$$Q^m S \cap S Q^n \subset Q$$

$m, n \in N$, [5]. De la facon similaire comme pour (m, n)-idéal on définit (m, n)-quasi-idéal de S qui est engendré avec une partie non vide A de S:

$$[A]_{(m, n)} = \bigcup_{i=1}^{max(m,n)} \{A^{max\,(m,\,n)}\} \cup (A^m S \cap S A^n).$$

Le demi-groupe S est (m, n)-regulier si

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a=a^m x a^n)$$

$m, n \in N\cup\{0\}$, $(a^\circ x=xa^\circ=x)$, (R. Croisot, [2]). Certaines particularités de demi--groupes (m, n)-réguliers par (m, n)-idéaux sont donné par D. N. Krgović, [4].

2. (m,n)-idéal de (m,n)-idéal

Le Théorème 9. S. Lajos, [6] donne une condition suffisante pour que (m, n)-idéal B de (m, n)-ideal A de demi-groupe S. soit (m, n) ideal de demi-groupe S. Nous caractérisons ici la classe de demi-groupe avec une telle propriété.

Lemme 2.1. Soit S un demi-groupe, A (m, n)-idéal de S et $B\subset A$. Alors

$$([B_A]_{(m, n)})^m S([B_A]_{(m, n)})^n=B^m S B^n$$

oú est

$$[B_A]_{(m, n)}=\bigcup_{i=1}^{m+n}\{B^i\}\cup B^m A B^n.$$

Preuve. Vérifier.

Théorème 2.1. Soit A un (m, n)-idéal de demi-groupe S. Alors, chaque (m, n)-idéal de A est un (m, n)-idéal de S si et seulement si pour chaque partie de (m, n)-idéal A est

$$B^m S B^n\subset[B_A]_{(m, n)} \tag{2.1}$$

oú est

$$[B_A]_{(m, n)}=\bigcup_{i=1}^{m+n}\{B^i\}\cup B^m A B^n.$$

Preuve. Soit A un (m, n)-idéal de demi-groupe S, B une partie de A et chaque (m, n)-idéal de A est un (m, n)-idéal de S. Alors $[B_A]_{(m, n)}$ soit un (m, n)--idéal de A et

$$([B_A]_{(m, n)})^m S([B_A]_{(m, n)})^n\subset[B_A]_{(m, n)} \tag{2.2}$$

D'après (2.2) et par le Lemme 2.1. nous avons que (2.1) soit valable.

Inversement, soit (2.1) pour chaque partie B de $(m,-n)$ idéal A de demi--groupe S et soit C un (m, n)-idéal de A. Alors

$$C^m S C^n\subset[C_A]_{(m, n)}=C\cup C^2\cup\ldots\cup C^{m+n}\cup C^m A C^n=C.$$

Donc, C est un (m, n)-idéal de S.

Corollaire 2.1. Soit A un idéal á gauche (á droite) de demi-groupe S. Alors, chaque idéal á gauche (á droite) de A est un idéal á gauche (á droite) de S si et seulement si pour chaque partie B de l'idéal á gauche (á drite) A est

$$SB\subset B\cup AB \quad , \quad (BS\subset B\cup BA).$$

Corollaire 2.2. Soit A un bi-idéal de demi-groupe S. Alors, chaque bi-idéal de A est un bi-idéal de S si et seulement si pour chaque partie B de bi--idéal A est

$$BSB \subset B \cup B^2 \cup BAB.$$

Nous avons la même chose pour (m, n)-quasi-idéaux.

Théorème 2.2. Soit Q un (m, n)-quasi-idéal de demi-groupe S. Alors, chaque (m, n)-quasi-idéal de Q est un (m, n)-quasi-idéal de S si et seulement si pour chaque partie D de (m, n)-quasi-idéal Q est

$$D^m S \subset [D_Q]_{(m, n)} \text{ et } SD^n \subset [D_Q]_{(m, n)}$$

oú est

$$[D_Q]_{(m, n)} = \bigcup_{i=1}^{k} \{D^i\} \cup (D^m Q \cap QD^n)$$

$k = \max(m, n)$.

Corollaire 2.3. Soit Q un quasi-idéal de demi-groupe S. Alors, chaque quasi-idéal de Q est un quasi-idéal de S si et seulement si pour chaque partie D de quasi-idéal Q est

$$DS \subset D \cup (DQ \cap QD) \quad \text{et} \quad SD \subset D \cup (DQ \cap QD).$$

3. (m,n)-réguliers demi-groupes

Par le théorème suivant on caractérise les demi-groupes (m, n)-réguliers.

Theorème 3.1. Soit S un demi-groupe. Alors, S est (m, n)-régulier si et seulement si

$$(\forall R \in \mathbf{R}_{(m,0)})(\forall L \in \mathbf{L}_{(0,n)})(R \cap L = R^m L^n) \tag{3.1}$$

oú $\mathbf{R}_{(m,0)}$ est l'ensemble de tous $(m, 0)$-idéaux de demi-groupe S et $\mathbf{L}_{(0,n)}$ est, l'ensemble de tous $(0, n)$-idéaux de S.

Preuve. Si $m=n=0$, alors (3.1) est valable, c'est-á-dire, chaque demi--groupe est $(0, 0)$-régulier. Si $m=0$, $n \neq 0$, alors $R=S$ et en utilisant (3.1) nous avons que

$$L = S \cap L = S^m L^n \subset SL^n \subset L$$

c'est-á-dire, S est $(0, n)$-régulier si et seulement si

$$(\forall L \in \mathbf{L}_{(0,n)})(L = SL^n)$$

ce qui est valable (Théorème 1. [4]). De la facon similaire pour $m \neq 0$, $n=0$ nous avons: S est $(m, 0)$-régulier si et seulement si

$$(\forall R \in \mathbf{R}_{(m,0)})(R = R^m S).$$

Pour $m \neq 0$, $n \neq 0$, pour n'importe lequel $R \in \mathbf{R}_{(m,0)}$ et $L \in \mathbf{L}_{(0,n)}$ est

$$R^m L^n \subset R \cap L. \tag{3.2}$$

Comme S est régulier, alors pour $a \in R \cap L$ nous avons que $a = a^m x a^n$, pour un certain $x \in S$, de cela provient que

$$\begin{aligned} a &= a^m x a^n \\ &= a^{2m-1} x a^n x a^n \\ &= a^{3m-2} x a^n x a^n x a^n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= a^{nm-(n-1)} (x a^n)^n \in R^{nm-(n-1)} L^n \subset R^m L^n. \end{aligned}$$

Donc,

$$R \cap L \subset R^m L^n. \tag{3.3}$$

De (3.2) et (3.3) nous avons (3.1).

Inversement, soit (3.1), alors

$$(\forall R \in \mathbf{R}_{(m,0)})(\forall L \in \mathbf{L}_{(0,n)})(R \cap L \subset RL). \tag{3.4}$$

Pour $R = [a]_{(m,0)}$, $L = S$ par (3.1) nous avons

$$[a]_{(m,0)} \subset ([a]_{(m,0)})^m S$$

et on a

$$[a]_{(m,0)} \subset a^m S \qquad \text{(Lemme 1.1.).}$$

cest-à-dire

$$[a]_{(m,0)} = a^m S. \tag{3.5}$$

De la facon similaire pour $R = S$, $L[a]_{(0,n)}$ nous avons

$$[a]_{(0,n)} = S a^n. \tag{3.6}$$

De (3.4), (3.5) et (3.6) nous avons

$$[a]_{(m,0)} \cap [a]_{(0,n)} = a^m S \cap S a^n \subset a^m S S a^n \subset a^m S a^n.$$

Donc, $a \in a^m S a^n$, c'est à dire S est un demi-geoupe (m, n)-régulier.

Si nous acceptons les résultats de R. Croisot, [2], nous pouvons conclure que le Théorème 3.1. et de l'intérét seulement dans le cas quand $m, n \in \{0, 1, 2\}$.

Pour $m = n = 1$ dans le Théorème 3.1. on obtient le Théorème de K. Iséki, [3].

Corollaire 3.1. Soit S un demi-groupe. Alors S est (m, n)-régulier si et seulement si

$$(\forall a \in S)([a]_{(m,0)} \cap [a]_{(0,n)} = ([a]_{(m,0)})^m ([a]_{(0,n)})^n$$

oú $[a]_{(m,0)}$ est $(m, 0)$-idéal principal de demi-groupe S engendré par $a \in S$ et $[a]_{(0,n)}$ est $(0, n)$-idéal principal de S.

Pour $m = n = 1$ dans le corollaire 3.1. on obtient le Théorème de S. Lajos, [7].

Nous donnons sans preuve

Théorème 3.2. Soit S un demi-groupe. Alors S est (m, n)-régulier si et seulement si

$$(\forall a \in S)([a]_{(m,\, n)} = a^m S a^n.$$

Pour $m=n=1$ dans le Théorème 3.2. on obtient le Théorème de S. Lajos, [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Amer. Math. Soc. 1961.

[2] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes reunions de demi-groupes simples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 70 (1953.), 361—379.

[3] K. Iséki, *A characterisation of regular semigroup*, Proc. Japan Acad. 32 (1956.), 676—677.

[4] D. N. Krgović, *On (m, n)-regular semigroups*, Publ. Inst. Math. Belgrade, 18 (32), 1975, 107—110.

[5] S. Lajos, *Generalized ideals in semigroups*, Acta Sci. Math. 22 (1961), 217—222.

[6] ———, *Notes on (m, n)-ideals II*, Proc. Japan Acad. 40 (1964.), 631—632.

[7] ———, *On characterisation of regular semigroupe*, Proc. Japan Acad. 44 (1968.), 325—326

Stojan Bogdanović

(m, n)-IDEALI I (m, n)-REGULARNE POLUGRUPE

Rezime

U ovom radu karakterišemo klasu polugrupa kod kojih je (m, n)-ideal proizvoljnog (m, n)-ideala polugrupe (m, n)-ideal polugrupe. Slično i za (m, n)-kvazi-ideale. Dalje, karakterišu se (m, n)-regularne polugrupe pomoću (m, n)-ideala pri čemu se uopštavaju teoreme K. Isékija, [3] i S. Lajosa, [7].