Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

Ratko Tošić

NEKE OSOBINE MONOTONIH BULOVIH FUNKCIJA NAD KONAČNIM BULOVIM ALGEBRAMA

U ovom radu ispituju se neke osobine monotonih Bulovih funkcija nad konačnim Bulovim algebrama.

Sa B označavamo Bulovu algebru sa 2^q elemenata, a sa B_2^q njenu izomorfnu vektorsku reprezentaciju, tzv. B-modul opisan u [4]. Vektori $\Delta_k=(\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \ldots, \delta_{kq})$, $k=1, 2, \ldots, q$, čine bazu B-modula i oni su atomi konačne Bulove algebre $(B_2^q, V, \cdot, ', 0, 1)$. Proizvoljan element $a \in B_2^q$ može se predstaviti u obliku:

$$a = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k a^k \tag{1}$$

gde je $a^k \in B_2$, $k=1, 2, \ldots, q$, i

$$a^k = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a \geqslant \Delta_k \\ 0, & \text{ako } a \not\geqslant \Delta_k \end{cases} \tag{2}$$

pri čemu je, za $\alpha \in B_2$ i $a \in B_2^q$

$$\alpha a = a\alpha = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha=0 \\ a, & \text{za } \alpha=1 \end{cases}. \tag{3}$$

Ulogu jedinice u B-modulu ima vektor $1=(1, 1, \ldots, 1)$ a nule vektor $0=(0, 0, \ldots, 0)$. Upotreba istih oznaka za jedinicu i nulu u algebrama B_2 i B_2^q neće dovoditi do zabune, jer će se iz konteksta videti o kojim je elementima reč.

Dalje, za proizvoljne $a, b \in B_2^q$, imamo:

$$a \vee b = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^k \vee b^k) \tag{4}$$

$$ab = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^k b^k) \tag{5}$$

$$a' = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^k)' \tag{6}$$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\}) (a^k \leqslant b^k). \tag{7}$$

Svaka Bulova funkcija $f{:}B^n \to B$ može se predstaviti u obliku:

$$(8) \qquad f(X) = \vee_{k=1}^{q} \Delta_k f^k(X^k)$$

gde je $f^k{:}B_2^n \to B_2$ takva da je, za svaki $X \in B^n$

$$(9) \qquad f^k(X^k) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } f(X) \geqslant \Delta_k \\ 0, \text{ ako } \quad f(X) \ngeqslant \Delta_k \end{cases}.$$

U skladu sa izloženim, svaka Bulova funkcija nad konačnom Bulovom algebrom B može se predstaviti u obliku uređene q-torke $(f^1, f^2, \ldots f^q)$ logičkih funkcija $f^k{:}B_2^n \to B_2$ za koje kažemo da su njene komponente.

Definicija 1. *Za Bulovu funkciju $f{:}B^n \to B$ kažemo da je izotona (antitona) u odnosu na promenljivu x_i ako i samo ako $b_i \leqslant c_i$ povlači*

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}\, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant f(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i\, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant f(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)).$$

Za funkciju, koja je bilo izotona bilo antitona u odnosu na promenljivu x_i, kažemo da je monotona u odnosu na tu promenljivu. Funkciju koja je monotona (izotona, antitona) u odnosu na sve svoje promenljive nazivamo monotonom (izotonom, antitonom,).

Sledeća lema omogućava da se osobine monotonih Bulovih funkcija nad proizvoljnom konačnom Bulovom algebrom ispituju pomoću monotonih funkcija nad dvoelementnom Bulovom algebrom.

Lema 1. *Bulova funkcija $f{:}B^n \to B$ je monotona ako i samo ako su sve njene komponente $f^k{:}B_2 \to B_2^n$ monotone funkcije.*

Dokaz. Dajemo dokaz za izotone Bulove funkcije. Dokaz za antitone funkcije je potpuno analogan (što je slučaj i sa svim teoremama u ovom članku).

(i) Uslov je potreban. Pretpostavimo da je funkcjia f izotona, tj. da $X \leqslant Y$ (X, $Y \in B^n$) povlači $f(X) \leqslant f(Y)$.

Ako je sada $X^k \leqslant Y^k$, za svako $k = 1, 2, \ldots, q$, onda je $X \leqslant Y$ (zbog (7)) odakle $f(X) \leqslant f(Y)$ (na osnovu pretpostavke), što povlači, opet na osnovu (7), $f^k(X^k) \leqslant f^k(Y^k)$, za svako $k = 1, 2, \ldots, q$.

(ii) Uslov je dovoljan. Pretpostavimo da za svako $k = 1, 2, \ldots, q$, $X^k \leqslant Y^k$ povlači $f^k(X^k) \leqslant f^k(Y^k)$. Tada iz $X \leqslant Y$ sledi, na osnovu (7), $X^k \leqslant Y^k$, za svako $k = 1, 2, \ldots, q$, odakle, po pretpostavci $f^k(X^k) \leqslant f^k(Y^k)$, i sada, opet zbog (7) $f(X) \leqslant f(Y)$.

Sledeća teorema uopštava jedan rezultat koji je dao Scognamiglio (1960, [7]) za Bulove funkcije od jedne promenljive.

Teorema 1. *Domen vrednosti izotone Bulove funkcije $f{:}B^n \to B$ je interval $[f(0, 0, \ldots, 0), f(1, 1, \ldots, 1)]$ i poklapa se sa skupom svih onih elemenata $a \in B$ za koje je $f(a, a, \ldots, a) = a$.*

Dokaz. Kako je funkcija izotona, to je, za svako $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$

$$(10) \qquad f(0, 0, \ldots, 0) \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(1, 1, \ldots, 1).$$

S druge strane, prema teoremi 2.1. iz [8], za svako a iz intervala $[f(0,0,\ldots,0), f(1,,1\ldots,1)]$ je $f(a,a,\ldots,a)=a$, čime je teorema dokazana.

Andreoli je dokazao u [1] da je za svaku Bulovu funkciju $f{:}B\to B$, funkcija $f(f(x))$ izotona Bulova funkcija. U sledećoj teoremi uopštavamo taj rezultat na funkcije od n promenljivih.

Teorema 2. *Za svaku Bulovu funkciju $f{:}B^n\to B$, funkcija*

$$(\ldots((f(x_1,x_2,\ldots,x_n))_1^2)_2^2\ldots)_n^2 \tag{11}$$

je izotona Bulova funkcija, gde je

$$(g(x_1,x_2,\ldots,x_n))_i^2=g(x_1,\ldots,x_{i-1},g(x_1,\ldots,x_n),\ldots,x_n). \tag{12}$$

Dokaz. Dokazaćemo, u stvari, da je za svako $m\in\{1,2,\ldots,n\}$, funkcija $(\ldots((f(x_1,x_2,\ldots,x_n))_1^2)_2^2\ldots)_m^2$ izotona u odnosu na promenljive $x_1,x_2,\ldots,x_m$.

Za $m=1$, posmatramo funkciju

$$g_1(x_1,\ldots,x_n)=(f(x_1,\ldots x_n))_1^2=f(f(x_1,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n). \tag{13}$$

Primenjujući na nju poznati identitet

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1f(1,x_2,\ldots,x_n)\vee x_1'f(0,x_2,\ldots,x_n) \tag{14}$$

imamo:

$$g_1(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)f(1,x_2,\ldots,x_n)\vee f'(x_1,\ldots,x_n)f(0,x_2,\ldots,x_n) \tag{15}$$

i razvijajući dalje $f(x_1,\ldots,x_n)$ i $f'(x_1,\ldots,x_n)$ po formuli (14), posle niza transformacija, dobija se:

$$g_1(x_1,\ldots,x_n)=x_1'f(0,x_2,\ldots,x_n)f(1,x_2,\ldots,x_n)\vee$$
$$x_1(f(0,x_2,\ldots,x_n)\vee f(1,x_2,\ldots x_n)).$$

Imajući u vidu da je uvek

$$f(0,x_2,\ldots,x_n)f(1,x_2,\ldots,x_n)\leqslant f(0,x_2,\ldots,x_n)\vee f(1,x_2,\ldots,x_n),$$

to je, na osnovu poznate teoreme, funkcija $g_1(x_1,\ldots,x_n)$ izotona u odnosu na promenljivu x_1.

Pretpostavimo sada da je funkcija

$$g_r(x_1,\ldots,x_n)=(\ldots((f(x_1,\ldots,x_n))_1^2\ldots)_{r-1}^2)_r^2 \tag{16}$$

izotona u odnosu na promenljive $x_1,x_2,\ldots,x_r$, i posmatrajmo funkciju

$$g_{r+1}(x_1,\ldots,x_n)=(\ldots((f(x_1,\ldots,x_n))_1^2\ldots)_r^2)_{r+1}^2=(g_r(x_1,\ldots,x_n))_{r+1}^2 \tag{17}$$
$$=g_r(x_1,\ldots,x_r,g_r(x_1,\ldots,x_n),x_{r+1},\ldots,x_n).$$

Izotonost funkcije (17) u odnosu na promenljivu x_{r+1} sledi na osnovu činjenice da se ona, nakon razvijanja po formuli (14), može napisati u obliku

$$g_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= x'_{r+1}\, g_r(x_1, \ldots, x_r, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)\, g_r(x_1, \ldots, x_r, 1, \ldots, x_n) \vee$$

$$x_{r+1}\,(g_r(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, x_n) \vee g_r(x_1, \ldots, x_r, 1, \ldots x_n))$$

i da je uvek

$$g_1(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, x_n)\, g_r(x_1, \ldots, x_r, 1, \ldots, x_n) \leqslant$$

$$g_r(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, x_n) \vee g_r(x_1, \ldots, x_r, 1, \ldots, x_n).$$

Izotonost funkcije (17), u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_r$, sledi na osnovu činjenice da je ta funkcija dobijena supstitucijama izotonih funkcija u odnosu na iste promenljive (naime, funkcija g_r je, po pretpostavci indukcije, izotona u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_r$, a i svaka promenljiva (projekcija) je izotona funkcija u odnosu na sve promenljive). Ovim je dokaz teoreme završen.

Teorema 3. *Bulova funkcija $f: B^n \to B$ je izotona ako i samo ako je*

(18) $$f(x_1, \ldots, x_n) = ((\ldots(f(x_1, \ldots, x_n))_1^2)_2^2 \ldots)_n^2.$$

Napomena. Poznat je specijalan slučaj ove teoreme za Bulove funkcje od jedne promenljive, umesto (18) tamo figuriše

(19) $$f(x) = f(f(x))$$

i ovu relaciju su, u vezi sa izotonijom funkcija od jedne promenljive, ispitivali E. Schröder u [6] i Andreoli u [1].

Dokaz. Da je uslov potreban, sledi na osnovu prethodne teoreme. Dokazaćemo sada da je uslov i dovoljan. S obzirom na relacije (1) — (9) i lemu 1, dovoljno je dati dokaz za logičke funkcije $f: B_2^n \to B_2$.

Neka je funkcija $f: B_2^n \to B_2$ izotona. Posmatrajmo minimalnu disjunktivnu kanonsku formu (MDKF) te funkcije. Iz teorije logičkih funkcija poznato je da se u MDKF izotone logičke funckije nijedna promenljiva ne pojavljuje sa znakom negacije. To znači da se. za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, MDKF funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ može napisati u obliku

(20) $$x_i P_{i1} \vee x_i P_{i2} \vee \ldots \vee x_i P_{im_i} Q_{i1} \vee Q_{i2} \vee \ldots \vee Q_{ir_i}$$

gde su $P_{i1}, \ldots, P_{im_i}, Q_{i1}, \ldots, Q_{ir_i}$, elementarne konjukcije od kojih nijedna ne sadrži faktor x_i (nije isključeno da je neki od skupova $\{P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im_i}\}$ i $\{Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ir_i}\}$ prazan).

Izdvajajući promenljivu x_1, MDKF funkcije f može se napisati u obliku

(21) $$x_1 (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t})$$

Zamenjujući u (21) x_1 celim izrazom (21), dobijamo:

$$(f(x_1, \ldots, x_n))_1^2 = f(f(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= (x_1 (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t})) (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t})$$

$$= x_1 (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}) (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}) = x_1 (\vee_{s=1}^{m_1} P_{1s}) \vee (\vee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}).$$

tj. funkcija f_1^2 ima analitički izraz identičan sa MDKF funkcije f, dakle, te dve funkcije imaju istu MDKF, što znači da su međusobno jednake.

Iterirajući gornji postupak dobijamo:

$$f = (f)_1^2 = ((f)_1^2)_2^2 = \ldots = (\ldots((f)_1^2)_2^2 \ldots)_n^2,$$

čime je dokaz završen.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Andreoli, G., *Formazioni algebrice booleane monotone*, Ricerca (Napoli), 1 (1961), 1–9.

[2] Gilezan, K. i Latinović, B., *Bulova algebra i primene*, Beograd, 1977.

[3] Gluškov, V. M., *Sintez cifrovyh avtomatov*, Moskva, 1962.

[4] Metelka, J., *Vektorielles Modell der endlichen Booleschen Algebren*, Acta Universitatis Palackiane Olomoucensis, Tom 21, 1966.

[5] Rudeanu, S., *Boolean functions and equations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam/London, 1974.

[6] Schröder, E., *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, (Leipzig, vol. 1 (1890), vol. 2 (1891), vol. 3 (1905); Reprint, Chelsea, Bronx NY, 1966.

[7] Scognamiglio, G., *Elementi uniti ed antiuniti delle funzioni monovalenti algebrice di Boole*, Giorn. Mat. Battaglini 88 (1960), 135–154.

[8] Tošić, R., *Constant-preserving Boolean functions over the finite Boolean algebras* (u štampi).

[9] Vavilov, E. N., Portnoj, G. P., *Sintez shem elektronyh cifrovyh mašin*, Moskva, 1963.

Ratko Tošić

SOME PROPERTIES OF THE MONOTONE BOOLEAN FUNCTIONS OVER THE FINITE BOOLEAN ALGEBRAS

Summary

In this paper, using componentwise treatment, the following theorems concerning the Boolean functions over the finite Boolean algebra B are proved:

Theorem 1. *The range of an isotone Boolean function* $f: B^n \to B$ *is the interval* $[f(0, \ldots, 0), f(1, \ldots, 1)]$ *and coincides with the set of all* $a \in B$ *such that* $f(a, \ldots, a) = a$.

Theorem 2. *For every Boolean function* $f: B^n \to B$, *the function* $(\ldots((f(x_1, \ldots, x_n))_1^2)_2^2 \ldots)_n^2$ *is an isotone Boolean function, where*

$$(g(x, \ldots, x))_i^2 = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_n).$$

Theorem 3. *A Boolean function* $f: B^n \to B$ *is isotone if and only if* $f(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots((f(x_1, \ldots, x_n))_1^2)_2^2 \ldots)_n^2$.

The theorems are generalizations of results well known for Boolean functions of one variable.