Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

Takači Arpad

O POLJU EKSPONENCIJALNIH OPERATORA

U radu (1) R. Struble je ispitivao polje „eksponencijalnih operatora" $\mathcal{M}_{Exp}$ i (između ostalog) utvrdio da ono sadrži sve distribucije na koje se može primeniti Laplace-ova transformacija u smislu /2/. U ovom radu daćemo jednu ekvivalentnu definiciju polja $\mathcal{M}_{Exp}$ i pokazaćemo vezu jednog podskupa Laplace-transformabilnih distribucija i jednog podskupa polja $\mathcal{M}_{Exp}$.

Prijatna nam je dužnost da se zahvalimo dr Danici Nikolić-Despotović za savete i primedbe.

1. **Neki rezultati R. Stuble-a (/1/)**

Definicija 1. Neka je *Exp* skup glatkih funkcija $f(t)$, definisanih nad skupom realnih brojeva R, koje zadovoljavaju uslove

(1) $$|f^{(k)}(t)| \leqslant C_{f,\,k} e^{-b_f|t|}, \quad t \in R, \ k=0, 1, 2, \ldots$$

gde su $C_{f,\,k}$ i b_f pozitivne konstante koje zavise od f i k, odnosno od f respektivno.

Kao i obično, $f^{(k)}(t)$ označava k-ti izvod funkcije $f(t)$.

Skup *Exp* je komutativan prsten bez delioca nule u odnosu na operacije sabiranja i konvolucije

(2) $$f*g\,(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g\,(t-u)\, du \, f, g \in Exp, t \in R.$$

Ako funkcija $f(t)$ pripada prstenu *Exp*, tada ona ima Fourier-ovu transformaciju

(3) $$\mathcal{F} f(z) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

gde je z kompleksna promenljiva. Funkcija $f(z)$ je analitička u beskonačnoj traci N_{b_f}, gde je

$$N_{b_f} \triangleq \{z, \mid Im\, z \mid < b_f\},$$

a b_f pozitivna konstanta iz relacije (1). Osim toga $f(z)$ opada brže nego proizvoljan stepen od $1/|z|$ kada $|Re\, z| \to \infty$ i z ostaje u traci N_{b_f}.

Simetrizacijom prstena Exp dobija se polje $\mathcal{M}_{Exp}$, čije je elemente R. Struble nazvao „eksponencijalnim operatorima". Poznato je da su elementi $\mathcal{M}_{Exp}$ oblika f/g, gde $g \neq 0$ i $f, g \in Exp$. Dva elementa f/g i h/k iz $\mathcal{M}_{Exp}$ su jednaka tada i samo tada ako važi $f*k=g*h$, i naravno f, g, h, k svi pripadaju prstenu Exp. Primećujemo da se Exp može uzajamno jednoznačno uroniti u $\mathcal{M}_{Exp}$: funkciji $f \in Exp$ odgovara operator $F \in \mathcal{M}_{Exp}$ ako je $F=(f*g)/g$ za sve $g \in Exp$. Poslednju jednakost možemo pisati: $F(g)=f*g$ i u tom slučaju kažemo da je operator F definisan funkcijom $f(t)$.

Definišimo preslikavanje $\mathcal{F}_1$ na sledeći način:

$$\mathcal{F}_1 : x=f/g \to \mathcal{F}_1 x=\mathcal{F} f(z)/\mathcal{F} g(z), \quad f, g \in Exp, \; g \neq 0 \tag{4}$$

tj. operatoru x pridružujemo funkciju $\mathcal{F}_1 x=H(z)$, koja je prema prethodnom meromorfna u traci N_{b_H}, gde $b_H=\min(b_f, b_g)$. Ovo preslikavanje ćemo zvati Fourier-ovom transformacijom jer se njegova restrikcija na operatore definisane glatkim funkcijama poklapa sa transformacijom (3); iz istog razloga ćemo u (4) umesto $\mathcal{F}_1$ pisati prosto $\mathcal{F}$.

Neka je $\mathcal{D}$ prostor glatkih funkcija na R sa kompaktnim nosačima snabdeven uobičajenom topologijom striktnog induktivnog limesa (/3/, strana 165.), a $\mathcal{D}'$ prostor distribucija. Ako $T \in \mathcal{D}'$ ima osobinu da $T*f(t) \in Exp$ za sve $f \in \mathcal{D}$, tada ćemo operator $T*f/f$, $f \in \mathcal{D}$, $f \neq 0$ identifikovati sa distribucijom T. Podprostor takvih distribucija obeležićemo sa $\mathcal{D}'_{Exp}$ i $\mathcal{D}'_{Exp}$ se može uroniti u polje $\mathcal{D}_{Exp}$.

Ultradistribucija koja se dobija kao Fourier-ova transformacija od $T \in \mathcal{M}_{Exp}$ (u smislu /4/) poklapa se sa Fourier-ovom transformacijom (4) odgovarajućeg eksponencijalnog operatora. Štaviše, lako je pokazati da je ta ultradistribucija analitička funkcija u nekoj traci N_b, $b>0$, čija je osa simetrije realna osa. Važi i obrnuto. Naime, ako je jedna funkcija analitička u nekoj traci N_b, $b>0$, tada je ona Fourier-ova transformacija neke distribucije T iz $\mathcal{D}'_{Exp}$. Ako $\mathcal{F}T$ osim analitičnosti u traci N_b zadovoljava i uslov

$$|\mathcal{F}T(z)| \leqslant P(|z|), \quad z \in N_b$$

gde je $P(|z|)$ neki polinom, onda je funkcija $F(z) \triangleq \mathcal{F}T(-iz)$ analitička u traci čija je osa simetrije imaginarna osa. Osim toga je $|F(z)| \leqslant P(|-iz|)=P(|z|)$, dok $-iz \in N_b$. Dakle, $F(z)$ zadovoljava uslove Teoreme 3.6.1. u /2/, s. 96., prema kojoj je $F(z)$ Laplace-ova transformacija neke distribucije iz prostora $\mathcal{L}'(-b, b)$. Zbog same definicije $F(z)$ ta distribucija je upravo T.

Na osnovu ovog razmatranja svaka distribucija koja pripada nekom prostoru $\mathcal{L}'(-b, b)$, $b>0$. pripada i skupu $\mathcal{D}'_{Exp}$. Važi i više od toga. Ako je distribucija $S(t) \in \mathcal{L}'(w, z)$, $w<z$, tada $S(t-c) \in \mathcal{L}'(-c, c)$, gde $c=(w+z)/2$, i prema prethodnom distribucija $S_1(t) \triangleq S(t-c)$ pripada $\mathcal{D}'_{Exp} \subset \mathcal{M}_{Exp}$. Pošto je

$$\mathcal{L}_{II}\{S_1(t)\}(S)=\mathcal{L}_{II}\{S(t-c)\}(S)=e^{-sc}\mathcal{L}\{S(t)\}(S), \quad w<Re\, s<t,$$

to zaključujemo da skup $\mathcal{D}'_{Exp}$ sadrži sve Laplace-transformabilne distribucije. $\mathcal{L}_{II}$ je simbol za dvostranu Laplace-ovu transformaciju distribucija u smislu (2).

2. Prsten C neprekidnih eksponencijalno opadajućih funkcija

Definicija 2. Neka je C skup neprekidnih funkcija $f(t)$ na R, sa osobinom da postoje pozitivni brojevi K i b koji zavise od f, takvi da je

$$|f(t)| \leqslant K e^{-b \cdot |t|}, \quad t \in R. \tag{5}$$

Pokazaćemo da je operacija konvolucije (6) unutrašnja:

$$f*g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, du, \quad t \in R, f, g \in C. \tag{6}$$

Neka je $|f(t)| \leqslant K_1 e^{-b_1 \cdot |t|}$, $|g(t)| \leqslant K_2 e^{-b_2 \cdot |t|}$ i $h(t)=f*g(t)$. Pre svega $h(t)$ postoji za sve $t \in R$ i $h(t)$ je neprekidna funkcija na R. Neka je $b_1 > b_2 > 0$ (što ne umanjuje opštost dokaza) i imamo:

I $t \geqslant 0$

$$|h(t)| \leqslant K_1 K_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b_1 |u|} \cdot e^{-b_2 |t-u|}\, du \leqslant K_1 K_2 \Big[e^{-b_2 t} \int_{-\infty}^{0} e^{b_1 u} \cdot e^{b_2 u} du +$$

$$+ e^{-b_2 t} \int_{0}^{t} e^{-b_1 u} e^{b_2 u}\, du + e^{b_2 t} \int_{t}^{\infty} e^{-b_1 u} \cdot e^{-b_2 u}\, du\Big] \leqslant K_1 K_2 \left[(3b_1 - b_2)/(b_1^2 - b_2^2)\right] e^{-b_2 |t|}.$$

II $t < 0$

$$|h(t)| \leqslant K_1 K_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b_1 |u|} e^{-b_2 |t-u|}\, du \leqslant K_1 K_2 \Big[e^{-b_2 t} \int_{-\infty}^{t} e^{-b_2 u} \cdot e^{b_1 u}\, du +$$

$$+ e^{b_2 t} \int_{t}^{0} e^{b_1 u} \cdot e^{-b_2 u}\, du + e^{b_2 t} \int_{0}^{\infty} e^{-b_1 u} \cdot e^{-b_2 u}\, du\Big] \leqslant K_1 K_2 \left[(3b_1 - b_2)/(b_1^2 - b_2^2)\right] e^{-b_2 |t|}.$$

Vidimo da je $|h(t)| \leqslant K e^{-b_2 \cdot |t|}$ za sve $t \in R$, gde je $K = K_1 K_2 (3b_1 - 3b_2)/ /(b_1^2 - b_2^2)$. Na osnovu ovog razmatranja možemo formulisati sledeće tvrđenje:

Stav 1. Skup C je komutativan prsten bez jediničnog elementa u odnosu na sabiranje funkcija i konvoluciju (6).

Važna osobina prstena C je da nema delioca nule u odnosu na konvoluciju*. Sledeće tvrđenje je potrebno u daljem radu.

Stav 2. Ako je $f(t) \in C$, a $g(t) \in Exp$, tada je funkcija $h(t) \triangleq f*g(t)$ takođe funkcija iz prstena Exp.

Dokaz. Na osnovu /6/, Satz 11, s. 118 sledi da je $h(t)$ glatka funkcija i da je

$$h^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g^{(n)}(t-u)\, du, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in R.$$

Na osnovu uslova (5) za $f(t)$ i uslova (1) za $g(t)$, analogno razmatranju pred Stav 1, pokazuje se da $h^{(n)}(t)$ zadovoljava nejednakosti tipa (1).

---

* Jer je Fourier-ova transformacija elementa iz C analitička funkcija u nekoj traci N_b

Posledica ovih stavova je da možemo definisati polje K koje se dobija simetrizacijom prstena C. Jednakost u K se definiše slično kao u polju $\mathcal{M}_{Exp}$: $f/g = h/k$ ako i samo ako je $f*k=g*h$ i sve funkcije f, g, h i k pripadaju prstenu C. Prsten C je širi nego prsten Exp; međutim, polje K nije šire od polja eksponencijalnih operatora. O tome govori

Teorema 1. Polje K je izomorfno pojlu $\mathcal{M}_{Exp}$.

Dokaz. Jasno je da važi relacija $\mathcal{M}_{Exp} \subset K$. Obrnuto, neka je $x/y \in K$, $x, y \in C$, $y \neq 0$. Ako $z \in Exp$, $z \neq 0$, tada $\frac{x}{y} = \frac{x*z}{y*z} = \frac{h_1}{h_2}$, i $h_1, h_2 \in Exp$ prema Stavu 2, tj. h_1/h_2 je eksponencijalni operator. Sa druge strane h_1/h_2 ne zavisi od funkcije $z \in Exp$, odnosno operatoru x/y iz polja K odgovora tačno jedan elemenat iz polja $\mathcal{M}_{Exp}$.

Primedba: U svom novijem radu (5) R. Struble je konstruisao širi skup operatora od polja $\mathcal{M}_{Exp}$, koji je preko Fourier-ove transformacije izomorfan sa skupom funkcija koje su definisane, merljive i konačne skoro svuda na R. Ovaj novi skup operatora dobija se simetrizacijom prstena L^2_*, čiji elementi su inverzne Fourier-ove transformacije funkcija iz skupa $L^2_\bullet$. $L^2_\bullet$ je aritmetički prsten L^2 funkcija $F(t)$ sa osobinom da je $\sup_{t \in R} |F(t) e^{t^2}| < \infty$.

3. O odnosu nekih distribucija i eksponencijalnih operatora

U ovom poglavlju daćemo nekoliko primera u kojima se bliže određuje veza nekih Laplace-transformabilnih distribucija (koje kao takve pripadaju prostoru $\mathcal{D}'_{Exp} \subset \mathcal{M}_{Exp}$) sa odgovarajućim eksponencijalnim operatorima. U prvom poglavlju bilo je rečeno da $T \in \mathcal{D}'$ pripada $\mathcal{D}'_{Exp}$ ako i samo ako $T*f \in Exp$ za sve $f \in \mathcal{D}$. Za operator F, gde je $F=(T*f)/f$, tada kažemo da je definisan distribucijom T.

Neka je $\delta_a(t)$ Dirac-ova mera

$$\langle \delta_a(t), f(t) \rangle \triangleq f(a), \quad a \in R, f(t) \in \mathcal{D}$$

a $D^n \delta_a(t)$ njen n-ti izvod u smislu distribucija.

Primer 1. Neka je s operator definisan sa $s \triangleq f'/f$ gde je $f \in \mathcal{D}$; operator s naziva se operator diferenciranja. Pošto je $D\delta_0 * f = f'$, to je $s = (D\delta_0 * f)/f$ tj. operator s definisan je distribucijom $D\delta_0(t)$. Analogno, operator $s^n \triangleq f^{(n)}/f$, $n \in N$, definisan je distribucijom $D^n \delta_0(t)$.

Sa druge strane je

$\mathcal{L}_{II}\{D^n \delta_0(t)\} = s^n$, gde je sada s kompleksna promenljiva i $-\infty < Re\, s < \infty$.

Primer 2. Obeležimo sa e^{-as} operator translacije, tj. $e^{-as} \triangleq f(t-a)/f(t)$ gde $f(t) \in \mathcal{D}$ i a realan broj. Pošto je $(\delta_a * f)(t) = f(t-a)$, to je operator e^{-as} definisan sa distribucijom $\delta_a(t)$. Sa druge strane je

$$\mathcal{L}_{II}\{\delta_a(t)\} = e^{-as}, \text{ za } -\infty < Re\, s < \infty.$$

Na osnovu ova dva primera neposredno sledi

Teorema 2. Operator $F \in \mathcal{M}_{Exp}$ određen sa

$$F=\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k f^{(k)}(t-b_k)\Big)/f(t),$$

gde je

$$a_k \in C,\ b_k \in R\ \ k=1, 2, \ldots, n,\ \ f(t) \in \mathcal{D},$$

definisan je distribucijom

$$T=\sum_{k=1}^{n} a_k D^k \delta_{b_k}.$$

Primetimo da je u ovoj teoremi $F=\sum_{k=1}^{n} a_k s^k e^{-b_k s}$ (s-operator diferenciranja), a da je Laplace-ova transformacija distribucije T $\mathcal{L}_{II}\{T\}=\sum_{k=1}^{n} a_k s^k e^{-b_k s}$ (s — kompleksna promenljiva). U stvari, ovakva veza važi uvek ako se radi o distribuciji čija je Laplace-ova transformacija racionalna funkcija po s i e^{-as} za različite realne brojeve a i osim toga je regularna u nekoj traci oko imaginarne ose. U tom slučaju ta distribucija pripada skupu $\mathcal{D}'_{Exp}$, a operator koji je definisan tom distribucijom izgleda formalno isto kao njena Laplace-ova transformacija, samo je s operator diferenciranja, a e^{-as} operator translacije.

Za ilustraciju ovog razmatranja posmatraćemo diferencijalno-diferentnu jednačinu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f^{(k)}(t-b_k)=\sum_{k=1}^{n} c_k D^k \delta_{d_k},\ a_k,\ c_k \in C,\ b_k,\ d_k \in R,\ n,\ m \in N \tag{7}$$

čija rešenja tražimo u skupu $\mathcal{D}'_{Exp}$.

Pretpostavimo da je funkcija kompleksne promenljive s

$$\mathcal{R}(s)=\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k s^k e^{-d_k s}\Big)/\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k s^k e^{-b_k s}\Big) \tag{8}$$

regularna funkcija u nekoj traci čija je osa simetrije imaginarna osa. Tada je operator $\mathcal{R}(s)$ iz (8), gde je sada s operator diferenciranja, a e^{-as} operator translacije (za različite a) definisan sa rešenjem jednačine (7), koje je u $\mathcal{D}'_{Exp}$ jedinstveno.

LITERATURA

[1] R. Struble, *A two sided operational calculus*, Studia mathematica, t. LX, fasc. 3, pp. 239—253 (1977).

[2] А. Г. Земанян, *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Изд. Наука, Москва 1974.

[3] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions*, Vol. 1, Addison-Wesley Publ. Comp. Reading, Mass., 1966.

[4] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Гос. изд. ф. м. лит, Москва 1958.

[5] R. Struble, *Operators on the real line R and on R^n*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences math., astr. et phys., Vol XXVI, No. 3, 1978.

[6] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace Transformation*, Verlag Birkhäuser Basel, 1950.

Takači Arpad

ON THE FIELD OF EXPONENTIAL OPERATORS

Abstract

In paper (1) R. Struble defined a ring of smooth functions *Exp* and its field of fractions $\mathcal{M}_{Exp}$ whose elements he called exponential operators. In this paper we define a ring of continuous functions which gives the same field $\mathcal{M}_{Exp}$. In part 3, a connection between some Laplace-transformable distributions and some exponential operators is analysed.