Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

S. Pilipović

PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA ČIJI ELEMENTI IMAJU LAGUERRE-ovu EKSPANZIJU — SEKVENCIJALNI PRILAZ

U svojoj monografiji [4] Zemanian je, sa stanovišta funkcionalnog prilaza teoriji, proučavao prostore uopštenih funkcija tipa $\mathcal{A}'$ čiji elementi se mogu razviti u red. U [2] su ispitivani opštiji prostori od prostora tipa $\mathcal{A}'$ sa stanovišta sekvencijalne teorije. Primer prostora $\mathcal{A}'$ je prostor uopštenih funkcija, označimo ga sa L', čiji elementi se mogu razviti u red po Laguerre-ovoj kompletnoj ortonormiranoj bazi prostora $L_2\,(0, \infty)$.

U ovom radu će biti ispitan taj prostor. Između ostalog pokazaćemo da svaka uopštena funkcija iz L' posmatrana kao distribucija jeste temperirana distribucija posmatrana nad intervalom $(0, \infty)$. Takođe ćemo pokazati da je svaka neprekidna funkcija sporog rasta definisana nad intervalom $(0, \infty)$ uopštena funkcija iz L'.

Osnovni pojmovi i definicije

U radu [2] smo sa stanovišta sekvencijalne teorije razvili teoriju prostora uopštenih funkcija koji su opštiji od prostora $\mathcal{A}'$. Prostor uopštenih funkcija, čiji elementi imaju Laguerre-ovu ekspanziju, primer je prostora $\mathcal{A}'$. Zbog toga ćemo iz [2] preneti osnovne pojmove i definicije koje se odnose na L' i to za jednodimenzionalni slučaj.

Neka je sa Ψ_n označena kompletna ortonormirana baza prostora $L_2\,(0, \infty)$ oblika

$$\Psi_n\,(x)=e^{-x/2}L_n\,(x),\ n\in N_0,\ \text{gde su}$$

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{n-m}(-x)^m/m!$$

polinomi Laguerre-a.

Linearni diferencijalni operator koji generiše L' je oblika

$$\mathcal{R}=e^{x/2}Dxe^{-x}De^{x/2}.$$

Niz sopstvenih vrednosti operatora $\mathcal{R}$ je $\lambda_n=-n,\ n\in N_0$ ([4]), tj. $\mathcal{R}\Psi_n=\lambda_n\Psi_n$.

Niz $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$ *se naziva* $\mathcal{R}$*-fundamentalan ako postoji konvergentan niz* $\{\sum_{n=0}^{\nu} c_n \Psi_n\}$ *u* $L_2(0, \infty)$ *i ako postoji* $k \in N_0$ *tako da je*

$$\mathcal{R}^k \sum_{n=1}^{\nu} c_n \Psi_n = \sum_{n=1}^{\nu} a_n \Psi_n \quad (\nu \in N)$$

Kažemo da su dva $\mathcal{R}$*-fundamentalna niza* $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$ i $\{\sum_{n=0}^{\nu'} b_n \Psi_n\}$ *ekvivalentna ako je* $a_n = b_n$ *za svako* $n \in N_0$.

Dobijene klase ekvivalencije nazivamo *uopštene funkcije* iz L'. Skup uopštenih funkcija L', u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja sa skalarom iz skupa kompleksnih brojeva L', ima strukturu vektorskog prostora [2]. Elemenat f iz L', predstavljen $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$ označavaćemo sa

$$\mathcal{R}^k F + c_0 \Psi_0, \quad \text{gde je} \quad F \overset{2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n.$$

Ako je $f \in L'$ predstavljen $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$, onda definišemo $\mathcal{R} f$ kao elemenat iz L' koji je reprezetnovan $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom $\{\mathcal{R} \sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$.

Kažemo da niz uopštenih funkcija f_n *iz* L' *konvergira (jako) ka* $f \in L'$ *ako postoji niz kvadrat integrabilnih funkcija* F_n *i kvadrat integrabilna funkcija* F *tako da za neko* $k \in N_0$

$$\mathcal{R}^k F_n + c_{n0} \Psi_0 = f_n, \quad \mathcal{R}^k F + c_0 \Psi_0 = f \quad \text{i}$$

$$F_n \overset{2}{\to} F, \; c_{n0} \to c_0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

$\mathcal{R}$-fundamentalan niz $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$, koji predstavlja uopštenu funkciju f, konvergira ka f i pišemo $f \overset{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n$. Ako nema mesta pogrešnoj interpretaciji, umesto $\overset{L'}{=}$ ćemo pisati $=$.

U [2] je pokazano da važe sledeća tvrđenja:

Teorema I. *Ako za neko* $k \in N_0$ *i niz kompleksnih brojeva* a_n, $n \in N_0$

(1) $$|a_n| < M \tilde{n}^k \; (M > 0 \text{ i } \tilde{n} = n \text{ za } n \neq 0, \; \tilde{n} = 1 \text{ za } n = 0)$$

onda postoji uopštena funkcija f *iz* L' *tako da je*

(2) $$f \overset{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n.$$

Obrnuto, ako $f \in L'$, onda postoji niz kompleksnih brojeva a_n, $n \in N_0$, koji za neko $k \in N_0$ zadovoljava (1) *tako da važi* (2).

Teorema II. *Potreban i dovoljan uslov da niz $f_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \Psi_p$ iz L' konvergira ka $f = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \Psi_p \in L'$ jeste da za neko $k \in N_0$ i $M > 0$ važi*

$$| a_{np} | < M \tilde{n}^k \text{ i } a_{np} \to a_p \text{ za svako } p \in N_0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Kažemo da kompleksnoznačna funkcija $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n$ iz $L_2(0, \infty)$ je iz skupa osnovnih funkcija L ako i samo ako za svako $k \in N_0$ važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} | a_n |^2 < \infty.$$

Unutrašnji proizvod uopštene funkcije $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n$ iz L' i test funkcije $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Psi_n$ iz L se definiše kao

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Osobine prostora L'

Neka je $\mathcal{B}$ linearni diferencijalni operator oblika

$$\mathcal{B} = e^{-x/2} D x e^{x/2} \text{ i } \mathcal{B}' = x e^{x/2} (-D) e^{-x/2}.$$

Definišimo na L' operator $\mathcal{B}$ na sledeći način: Ako $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n$, onda u smislu konvergencije u L' niz $\mathcal{B} \sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n$ konvergira ka nekom elementu $g \in L'$. Stavimo da je

$$\mathcal{B} f = g, \quad \mathcal{B}^0 f = f \text{ i } \mathcal{B}^{k+1} f = \mathcal{B} \mathcal{B}^k f.$$

Pošto je $(n+1)(a_n - a_{n+1}) = (\mathcal{B} f, \Psi_n) = (f, \mathcal{B}' \Psi_n)$, sledi da je

$$f \stackrel{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1}) \Psi_n.$$

U L' možemo definisati množenje sa polinomom. Definišimo da je xf granica u L' niza $x \sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n$ koji konvergira u L'. Iz identiteta za $x \Psi_n$ sledi

$$xf \stackrel{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-(n+1) a_{n+1} + (2n+1) a_n - n a_{n-1}) \Psi_n \quad (a_{-1} = 0).$$

Koristeći teoremu I odnosno teoremu II dobijamo

Tvrđenje 1. Ako $f \in L'$ onda za svaki polinom $P(x)$

$$P(x) f \in L' \text{ i } P(\mathcal{B}) f \in L'.$$

Ako niz f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$, onda

$$P(x) f_n \xrightarrow{L'} P(x) \text{ i } P(\mathcal{B}) f_n \xrightarrow{L'} P(\mathcal{B}) f \text{ kad } n \to \infty.$$

Označimo sa $\mathcal{S}'(0, \infty)$ potprostor Schwartz-ovih distribucija $\mathcal{D}'(0, \infty)$ čiji elementi se dobijaju kad se temperirane distribucije posmatraju nad intervalom $(0, \infty)$. Na osnovu [1] (theorem 7.3.1. i theorem 7.5.1.):

Distribucija f definisana nad $(0, \infty)$ je iz $\mathcal{S}'(0, \infty)$ ako postoje $m, r \in N$, $K>0$ i postoji neprekidna funkcija G tako da je $f=G^{(m)}$ i $|G|(1+x)^{-r}<K$ (izvod je u distribucionom smislu);

Niz f_n iz $\mathcal{S}'(0, \infty)$ konvergira ka $f \in \mathcal{S}'(0, \infty)$ ako postoje brojevi $m, r \in N_0$ i postoje neprekidne funkcije G_n, $n \in N$, i G tako da je $G_n^{(m)}=f_n$, $G^{(m)}=f$ i niz $(1+x)^{-r} G_n$ je ograničen i uniformno konvergira ka $(1+x)^{-r} G$ u intervalu $(0, \infty)$.

Pošto iz kvadratne konvergencije sledi temperirana, a iz temperirane sledi distribuciona konvergencija, i pošto je niz $\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n$ niz glatkih funkcija, na osnovu [1] (3.9.3.) — sledi da je nad intervalom $(0, \infty)$ $\mathcal{R}$-fundamentalan niz $\{\sum_{n=0}^{\nu} a_n \Psi_n\}$ fundamentalan, što znači da određuje određenu Schwartz-ovu distribuciju iz $\mathcal{D}'(0, \infty)$. Označimo je sa $\tilde{f}$. Pokažimo da važi tvrđenje

Tvrđenje 2. Ako $f \in L'$ onda $\tilde{f} \in \mathcal{S}'(0, \infty)$. Ako niz f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$, onda $\tilde{f}_n$ konvergira ka $\tilde{f}$ u smislu konvergencije u $\mathcal{S}'(0, \infty)$.

Dokaz: Kad operator $\mathcal{R}$ primenjujemo na fundamentalan niz, znači u distribucionom smislu, označavamo ga sa $\tilde{\mathcal{R}}$. U njemu se pojavljuje distribucioni izvod i množenje distribucije polinomom, što su regularne operacije, jer je $\tilde{\mathcal{R}} = xD^2 + D - 1/4$.

Ako $f \in L'$, onda je $f = \mathcal{R}^k F + c_0 \Psi_0$ za neko $k \in N_0$ i neko $F \in L_2(0, \infty)$. Funkcija

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & x \in (0, \infty) \\ F(-x) & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

je iz $L_2(-\infty, \infty)$, a odatle sledi da je $\tilde{\mathcal{R}}^k F_1$ temperirana distribucija.

Na osnovu [1], (theorem 7.3.1.) sledi da postoji neprekidna funkcija G definisana nad intervalom $(-\infty, \infty)$ tako da je

$$\tilde{\mathcal{R}}^k F_1 = G^{(m)}$$

za neko $m \in N_0$ i da je G sporo rastuća, što znači da postoji $r \in N_0$, tako da je $(1+x)^{-r} G$ ograničena funkcija.

Pošto je $\Psi_0 = e^{-x/2} = (-2)^m (e^{-x/2})^{(m)}$, znači da ie Ψ_0 iz $\mathcal{S}'(0, \infty)$, a odatle sledi da je $f \in \mathcal{S}'(0, \infty)$.

Ako $f_n \xrightarrow{L'} f$, onda je $f_n = \mathcal{R}^k F_n + c_{n0}\Psi_0$, $f = \mathcal{R}^k F + c_0 \Psi_0$ za neko $k \in N_0$ i neke F_n, $F \in L_2(0, \infty)$ i $F_n \xrightarrow{2} F$, $c_{n0} \to c_0$ kad $n \to \infty$.

Stavimo da je

$$F_{n1} = \begin{cases} F_n(x) & x \in (0, \infty) \\ F_n(-x) & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad \text{i} \quad F_1 = \begin{cases} F(x) & x \in (0, \infty) \\ F(-x) & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Pošto $F_{n1} \xrightarrow{2} F_1$, znači da je $\tilde{\mathcal{R}}^k F_{n1}$ niz temperiranih distribucija koji temperirano konvergira ka temperiranoj distribuciji $\tilde{\mathcal{R}}^k F_1$ ([1] odeljak 7.5.). Na osnovu [1] (theorem 7.5.1.) postoje neprekidne funkcije G_n i G tako da za neko m, $r \in N_0$ je

$$G_n^{(m)} = \tilde{\mathcal{R}}^k F_{n1}, \quad G^{(m)} = \tilde{\mathcal{R}}^k F_1$$

i niz $(1+x)^{-r} G_n$ je ograničen i uniformno konvergira nad intervalom $(-\infty, \infty)$ ka funkciji $(1+x)^{-r} G$.

Nad intervalom $(0, \infty)$ važi

$$G_n^{(m)} = f_n - c_{n0}\Psi_0 \;\text{ i }\; G^{(m)} = f - c_0 \Psi_0$$

a odatle sledi drugi deo tvrđenja.

Ako je F neprekidna funkcija u intervalu $(0, \infty)$, onda definišemo $\mathcal{B}^{-1}$ na sledeći način:

$$\mathcal{B}^{-1} F = (e^{-x/2}/x) \int_0^x e^{t/2} F(t)\, dt \quad \text{i} \quad \mathcal{B}^{-k} F = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{B}^{-k+1} F.$$

Jasno je da je $\mathcal{B}^k \mathcal{B}^{-k} F = F$.

Direktnom integracijom i pogodnim majoracijama se pokazuje

Tvrdenje 3. (a) $\mathcal{B}^{-1} 1 \in L_2(0, \infty)$. (b) $\mathcal{B}^{-1} x^n < K_n (1+x)^{n-1}$ $n \in N_0$ i $K_n > 0$. (c) *Ako* $F \in L_2(0, \infty)$, *onda* $\mathcal{B}^{-1} F \in L_2(0, \infty)$.

Dokazaćemo samo (c). To tvrđenje sledi iz nejednakosti

$$\left| \frac{e^{-x/2}}{x} \int_0^x e^{t/2} F(t)\, dt \right|^2 \leq \frac{e^{-x}}{x^2} \int_0^x e^t\, dt \int_0^x | F(t) |^2\, dt$$

deleći putanju integracije na intervale (o, a) i (a, ∞).

Sad možemo da pokažemo da važi

Tvrdenje 4. Ako je neprekidna funkcija G definisana nad $(0, \infty)$, *takva da je za neko* $r \in N_0$ i $K > 0$

$$(1+x)^{-r} |G| < K,$$

onda $G \in L'$.

Ako je niz neprekidnih funkcija G_n definisanih nad intervalom $(0, \infty)$ *takav da za neko* $r \in N_0$ i $K>0$ je

$(1+x)^{-r}|G_n|<K$ *i* $(1+x)^{-r}G_n$ *konvergira uniformno ka* $(1+x)^{-r}G$, *onda* G_n *konvergira ka* G *u smislu konvergencije u* L'.

Dokaz: Primenjujući operator $\mathcal{B}^{-1}$ dovoljan broj puta, neka to bude s puta, na osnovu tvrđenja 3. sledi da

$$\mathcal{B}^{-s}G \in L_2(0, \infty).$$

Primenjujući operator $\mathcal{B}$ s puta u uopštenom smislu na $\mathcal{B}^{-s}G$ dobijamo da su koeficijenti od $\mathcal{B}^s\mathcal{B}^{-s}G$, označimo ih sa a_n, dati formulom $a_n= =(\mathcal{B}^s\mathcal{B}^{-s}G, \Psi_n)^*=(\mathcal{B}^{-s}G, \mathcal{B}'^s\Psi_n)^{**}=(G, \Psi_n)$.

Jednakost * je na osnovu definicije uopštenog operatora, a ** na osnovu parcijalne integracije.

Za drugi deo teoreme stavimo da je $H_n=G_n-G$. Iz ograničenosti i uniformne konvergencije sledi da je

$$|H_n|<\varepsilon_n(1+x)^r \text{ i } |G|<K(1+x)^r.$$

Primenjujući operator $\mathcal{B}^{-1}$ s puta dobijamo da je

$$\mathcal{B}^{-s}H_n\leqslant\varepsilon_n F_0 \quad (F_0 \in L_2(0, \infty)) \text{ i } \mathcal{B}^{-s}G \in L_2(0, \infty).$$

Odatle sledi da

$$\mathcal{B}^{-s}H_n \xrightarrow{2} 0$$

a odatle da $\mathcal{B}^{-s}G_n \xrightarrow{L'} \mathcal{B}^{-s}G$.

Primenjujući operator $\mathcal{B}$ s puta u uopštenom smislu, dobijamo drugi deo tvrđenja.

Ovo tvrđenje se može dokazati i direktnim računanjem koeficijenata (G, Ψ_n) korišćenjem pogodnih majoracija.

Pokažimo da je razlaganje sporo rastuće funkcije G jedinstveno. Za to ćemo koristiti tvrđenje o momentu čiji je elementaran dokaz dat u [3]. Navedimo je.

Tvrđenje o momentu 5. [3] *Ako za proizvoljnu funkciju* $g(x)$ *postoji* $\alpha>0$, *tako da* $g(x)e^{\alpha|x|} \in L_1(-\infty, \infty)$, *i ako su svi momenti*

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)\,\mathrm{d}x$$

jednaki nuli, onda je g jednako nula skoro svuda.

Tvrđenje 6. Razvoj funkcije G iz tvrđenja 4. *je jedinstven.*

Dokaz: Pretpostavimo da G nije jednako 0 skoro svuda a da je

$$(G, \Psi_n)=0 \text{ za svako } n \in N_0. \tag{1}$$

Iz (1) sledi da su za funkciju $g(x)=G(x)\,e^{-x/2}$ svi momenti jednaki 0. Definišimo funkciju $g_1(x)$ na sledeći način:

$$g_1(x)=\begin{cases} g(x) & x\in(0,\infty) \\ g(-x) & x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

Funkcija g_1 je neprekidna funkcija za koju su svi momenti 0 i za koju $e^{\alpha|x|}g_1(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ za $0<\alpha<1/2$. Na osnovu tvrđenja o momentu dobijamo da je $g_1=0$ skoro svuda odnosno da je $G=0$ skoro svuda.

Slično tvrđenju 6., može se pokazati da je razvoj po Laguerre-ovoj kompletnoj ortonormiranoj bazi jedinstven za širu klasu funkcija jer se uslovi da je funkcija neprekidna i sporog rasta mogu oslabiti. Tako dobijeni razvoji mogu biti elementi prostora L', ali ne moraju, što je interesantno pitanje u koje ovde nećemo ulaziti.

LITERATURA

[1] P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions — the sequential approacoh*, Warszawa, 1973.

[2] E. Pap, S. Pilipović, *Sequential theory of some spaces of generalized functions*, (u štampi).

[3] Z. Sadlok, Z. Tyc, *On exponential distributions I*, (u štampi).

[4] A. H. Zemanian, *Generalized Integral Transformations* (na ruskom), Moskva, 1974.

S. Pilipović

THE SPACE OF GENERALIZED FUNCTIONS WHOSE ELEMENTS HAVE LAGUERRE'S EXPANSION – THE SEQUENTIAL APPROACH

Summary

Using the functional approach to the theory, Zemanian [4] has studied $\mathcal{A}'$-type spaces of generalized functions whose elements may be expanded into series. In [2] we have studied these spaces (and more general spaces) using the sequential approach similarly as in [1]. An example of this kind of space is the space of generalized functions L' whose elements have Laguerre's expansion into series. In this paper, we study L' space. We indicate that every generalized function from L' represents a tempered distribution observed in the interval $(0,\infty)$. We also indicate that every continuous function of power growth observed in $(0,\infty)$ is a generalized function from L'.