Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

Pap Endre

NEKI PRILOZI TEORIJI n-KONVEKSNIH FUNKCIJA

0. U radu [3] definisali smo n-konveksnu funkciju nad polugrupom. Ispitan je odnos između n-konveksnosti i p-konveksnosti, gde je p faktor broja n. Dokaz teoreme 2. iz rada [3] izveden je Cauchy-evom indukcijom. U ovom radu dokaz ćemo dati običnom potpunom indukcijom i to na dva različita načina, koristeći ideje J. Aczél-a [1] date za realne funkcije. Na taj način ilustrujemo mogućnosti dokazivanja i pri ovako opštoj definiciji konveksnosti funkcija. U radu [3] su dati i neki primeri primene teoreme 2. iz [3] U ovom radu dajemo još jedan nov primer primene.

Na kraju rada navodimo nekoliko načina za generisanje novih n-konveksnih funkcija iz zadatih.

1. Ponovićemo neke osnovne oznake i definicije iz rada [3]. Neka je $(X,*)$ komutativna polugrupa. Uzimamo da je

$$\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 * \ldots * x_n \quad \text{i}$$

$$n[x] \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x * \ldots * x}_{n}.$$

Funkcija $\gamma_n : X \to X$ za dato $n \in N$, jeste *funkcija antistepenovanja reda* n ako važi

$$(\mathrm{A}_1) \quad \gamma_n(x) * \gamma_n(y) = \gamma_n(x * y),$$

$$(\mathrm{A}_2) \quad n[\gamma_n(x)] = x, \text{ za sve } x, y \in X.$$

Neka je $(X_1, *)$ komutativna polugrupa sa funkcijom antistepenovanja γ_n, a $(X_2, \oplus)$ je parcijalno uređena komutativna polugrupa sa funkcijom antistepenovanja δ_n. Funkcija $f: A \to X_2$ je *n-konveksna funkcija* nad skupom $A \subset X_1$, sa osobinom da za sve $x_i \in A$ i $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$(\mathrm{K}) \quad \gamma_n\left(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i\right) \in A, \text{ ako:}$$

ili zadovoljava sledeću nejednakost

$$f(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i)) \leqslant \delta_n(\mathop{\oplus}_{i=1}^{n} f(x_i))$$

ili leva i desna strana u prethodnoj nejednakosti nisu uporedljive, za sve $x_i \in A$ i $i=1, 2, \ldots, n$.

2. U ovom delu ćemo dati dva različita dokaza teoreme 2. iz rada [3].

Teorema (Teorema 2. — [3]). *Neka je* $(X_1, *)$ *komutativna polugrupa sa funkcijama antistepenovanja* γ_n *za sve* $n \in N$ *i neka je* $(X_2, \oplus)$ *skup realnih brojeva* R (*ili skup* R^+ *nenegativnih realnih brojeva*) *sa uobičajenom operacijom sabiranja* (*množenja*). *Tada iz 2-konveksnosti funkcionale* $f: A \to R$ (R^+) *nad* $A \subset X_1$ *sa osobinom* (K) *za sve* $n \in N$, *sledi njena n-konveksnost nad* A *za sve* $n \in N$.

Prvi dokaz. Koristeći jednakost

$$(n+1)\,[\gamma_{n+1}(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i))] = \gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)$$

lako je dokazati da važi

$$\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i) = \gamma_2(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i) * \gamma_n(x_{n+1}) * ((n-1)[\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)])).$$

Po pretpostavci teoreme njeno tvrđenje je tačno za 2, a po induktivnoj pretpostavci za n. Koristeći prvu pretpostavku jedan put, a drugu dvaput dobijamo

$$f(\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)) = f(\gamma_2(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i) * \gamma_n(x_{n+1} * (n-1)[\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)]))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(f(\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i)) + f(\gamma_n(x_{n+1} * (n-1)\,[(\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)]))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}(\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) + (n-1) f(\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i))).$$

Odatle sledi tačnost tvrđenja za $n+1$.

Drugi dokaz. Koristeći jednakost

$$(n^2-1)[\gamma_{n+1}\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)] = (n-1)[\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i)]$$

lako je dokazati da važi

$$\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i) = \gamma_n((n-1)[\gamma_n(\mathop{*}_{i=1}^{n} x_i)] * \gamma_n(\gamma_{n+1}(\mathop{*}_{i=1}^{n+1} x_i) * (n-1)\,[x_{n+1}])).$$

Po induktivnoj pretpostavci tvrđenje teoreme je tačno za n. Triput primenjujući ovu pretpostavku dobijamo

$$f(\gamma_{n+1}(\overset{n+1}{\underset{i=1}{*}} x_i))=f(\gamma_n((n-1)[\gamma_n(\overset{n}{\underset{i=1}{*}} x_i)]*\gamma_n(\gamma_{n+1}(\overset{n+1}{\underset{i=1}{*}} x_i)*(n-1)[x_{n+1}])))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}((n-1)f(\gamma_n(\overset{n}{\underset{i=1}{*}} x_i))+f(\gamma_{n+1}(\overset{n+1}{\underset{i=1}{*}} x_i)*(n-1)[x_{n+1}]))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}((n-1)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)+f(\gamma_{n+1}(\overset{n+1}{\underset{i=1}{*}} x_i))+(n-1)f(x_{n+1})).$$

Odatle sledi tačnost teoreme za $n+1$.

Primetimo da se u drugom dokazu pri prelazu na $n+1$ nije koristila 2-kon veksnost funkcije (kao u prvom dokazu), već samo n-konveksnost.

3. Daćemo jednu novu primenu prethodne teoreme.

Teorema 1. *Za svaki asocijativni komutativan grupoid sa sredinom M* (eng. mean grupoid — L. Fuchs [2]) *postoji injektivno preslikavanje u skup realnih brojeva koje očuvava poredak i takvo da je*

$$f(\overset{n}{\underset{i+1}{*}} x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1}$$

za sve $x_i \in M$ i $i=1, 2, \ldots, n$ i svako $n \in N$.

Dokaz. Kako je $x^2=x$ za svako $x \in M$, to je sa $\gamma_2(x)=x$ za $x \in M$ definisano antistepenovanja reda 2 nad M. Na osnovu teoreme 15. iz [2], str. 183 (1) je tačno za $n=2$, što možemo i ovako zapisati

$$f(\gamma_2(x\,y))=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) \text{ za } x, y \in M.$$

To znači da su funkcije f i $-f$ 2-konveksne.

Primetimo da je nad M definisano antistepenovanje proizvoljnog reda $n \in N$ sa $\gamma_n(x)=x$ za $x \in M$. To sledi iz jednakosti $x^n=x$ za $n\geqslant 2$. Kako su ispunjeni svi uslovi prethodno dokazane teoreme, to zaključujemo da su funkcije f i $-f$ n-konveksne za svako $n \in N$. Odatle sledi tačnost jednakosti (1).

4. Navešćemo dva načina za generisanje novih n-konveksnih funkcija iz poznatih.

Teorema 2. *Neka je funkcija $f: A_1 \to X_2$ n-konveksna nad $A_1 \subset X_1$, a funkcija $g: A_2 \to X_2$ n-konveksna nad $A_2 \subset X_1$ i $A=A_1 \cap A_2$ nije prazan skup, tada je funkcija*

$$F(x)=f(x) \oplus g(x) \quad (x \in A)$$

n-konveksna nad A.

Teorema 3. *Neka je* $(X_1, *)$ *komutativna polugrupa sa antistepenovanjem* γ_n, $(X_2, \oplus)$ *parcijalno uređena komutativna polugrupa sa antistepenovanjem* δ_n *i* $(X_3, \odot)$ *parcijalno uređena komutativna polugrupa sa antistepenovanjem* ε_n. *Neka je* $f: A_1 \to X_2$ *n-konveksna funkcija nad* $A \subset X_1$, *a* $g: A_2 \to X_3$ *n-konveksna funkcija nad* $A_2 \subset X_2$, $f(A_1) \subset A_2$ *i iz* $x \leqslant y$ *za* $x, y \in A_2$ *sledi* $g(x) \leqslant g(y)$. *Tada je i funkcija* $G(x) = g(f(x))$ *n-konveksna funkcija nad* A_1

LITERATURA

[1] J. Aczél, *Nejednakosti i njihova primena u elementarnom rešavanju zadataka sa maksimumom i minimumom*, Mat. bibl. 18, Beograd, 1961.

[2] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, 1963.

[3] E. Pap, *n-convex functions on a semigroup with a root function*, Zbornik PMF u N. Sadu 6, 1976, 7–13.

Pap Endre

SOME REMARKS ON THE THEORY OF n-CONVEX FUNCTIONS

Summary

We have defined in paper [3] the notion of n-convex functions. We give in this paper two different proofs of theorem 2. from [3]. We also give a new application of this theorem. We generate new n-convex functions from the given n-convex functions.