Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

Katarina Surla

NUMERIČKO REŠAVANJE FREDHOLMOVE INTEGRALNE JEDNAČINE PRIMENOM SPLAJN APROKSIMACIJA

Posmatrajmo Fredholmovu linearnu integralnu jednačinu druge vrste

$$u(s)=\int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt+f(s);\quad a\leqslant s,\ t\leqslant b \tag{1}$$

gde je $f(s)\in C[a,b]$, a $K(s,t)\in C([a,b]\times[a,b])$, a, b realni brojevi. Neka je za $u\in C=C[a,b]$, $\|u\|=\max_s u(s)$, a za $z\in R_n$, $\|z\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n} z_i$ Označimo sa Δ mrežu

$$\Delta: a=s_1<s_2<\ldots<s_n=b$$

Uvedimo restrikcioni operator $r_n: C\to R_n$ definisan za svako u $u\in C$ sa

$$r_n u=\{u(s_i)\} \tag{2}$$

i operator analitičkog produženja $p_n: R_n\to C$ definisan za svako $z\in R_n$ sa

$$p_n z=S_\Delta(z,s), \tag{3}$$

gde je $S_\Delta(z,s)$ splajn trećeg stepena formiran na mreži Δ sa ordinatama $z(s_i)$ [1].

Normu linearnog (ograničenog) operatora $L: Y\to Z$ definišemo sa

$$\|L\|=\sup_{y\in Y}\frac{\|Ly\|_Z}{\|y\|_Y} \tag{4}$$

Za operator K definisan za $u\in C$ sa

$$Ku=\int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt \quad \text{imamo} \tag{5}$$

$$\|K\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,dt \tag{6}$$

$$\|r_n\|=1$$

Pretpostavimo u daljem da se Ku ne može tačno odrediti, pa ćemo operator K aproksimirati operatorima K_m koje dobijamo kada integral u (5) zamenimo nekom Newton-Cotes-ovom kvadraturnom formulom. Za $u \in C$ operator K_m definišemo sa

$$K_m u = \sum_{j=0}^{2^m+1} d_{mj} K(s, t_j)\, u(t_j) \tag{7}$$

pri čemu je m određeno sa

(8) $\|r_n K_m u - r_n K_{m-1} u\| \leqslant \varepsilon$, gde je $\varepsilon > 0$ unapred zadato, d_{mj} su težinski koeficijenti primenjene kvadraturne formule.

Prema (7) je $\|K_m\| \leqslant \|K\|$.

Rešenje jednačine (1) tražimo u n fiksiranih tačaka mreže Δ. Pri tome ćemo rešenje u svakoj tački tražiti nestacionarnim iterativnim postupkom definisanim sa

$$\begin{cases} r_n z_0 = r_n f, \quad z_0 = f \\ r_n z_1 = r_n K_{m_1} z_0 + r_n f \\ r_n z_k = r_n K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} + r_n f, \quad \text{za } k = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

gde su r_n, p_n, K_{m_k} operatori definisani sa (2), (3) i (7) respektivno. Pri tom se pretpostavlja da je $m_k \leqslant \log_2(\mathrm{NMAX}-1)$, NMAX je prirodan broj unapred zadat.

Da bismo pokazali konvergenciju postupka (9) i dali ocenu greške, formiraćemo pomoćne nizove iteracija:

$$r_n u_k = r_n K u_{k-1} + r_n f, \quad u_0 = f \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

$$r_n \bar{z}_k = r_n K_{l_k} \bar{z}_{k-1} + r_n f, \quad \bar{z}_0 = f \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

Niz $\bar{z}_k$ postoji, ali se ne može efektivno izračunati prema (11), jer za neko k može biti $n < 2^{l_k} + 1$. Zato se i uvodi operator p_n. Bez ograničenja opštosti možemo uzeti da je $m_k = l_k$.

Za formiranje niza (9) potrebno je postaviti granične uslove za splajn. Oni se odnose na prve odnosno druge izvode, u zavisnosti od toga da li je splajn zadat preko prvih odnosno drugih izvoda [1]. Mi ćemo pretpostaviti da je splajn zadat na intervalu $[s_{j-1}, s_j]$ sa

$$S_\Delta(z, s) = M_{j-1} \frac{(s_j - s)^3}{6h_j} + M_j \frac{(s - s_{j-1})^3}{6h_j} + \left(z_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6}\right) \frac{s_j - s}{h_j} + \left(z_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right) \frac{s - s_{j-1}}{h_j} \tag{12}$$

gde je

$$z_j = z(s_j)$$

$$M_j = S''_\Delta(z, s_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$h_j = s_j - s_{j-1}$$

Iz neprekidnosti prvog izvoda funkcija (12) u tačkama s_j, dobija se sistem od $n-2$ jednačine za određivanje konstanti M_j $(j=1, 2, \dots, n)$ Preostale dve jednačine se dobijaju iz tzv. graničnih uslova:

$$(13)\quad \begin{cases} \text{za } s=a \\ \text{(i)} \quad 2M_1+M_2=\dfrac{6}{h_2}\left(\dfrac{z_2-z_1}{h_2}-z_1'\right) \\ \text{(ii)} \quad 2M_1=2z_1'' \\ \text{(iii)} \quad 2M_1+\lambda_1 M_2=d_1 \\ \text{za } s=b \\ \text{(i)} \quad M_{n-1}+2M_n=\dfrac{6}{h_n}\left(z_n'-\dfrac{z_m-z_{n-1}}{h_n}\right) \\ \text{(ii)} \quad 2M_n=2z \\ \text{(iii)} \quad \mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n \end{cases}$$

gde su λ_1, d_1, μ_n, d_n realni brojevi.
Navedimo i teoremu 1. koju ćemo koristiti u daljem radu.

Teorema 1. Neka je $f \in C^4[a, b]$ i neka niz mreža splajna

$$\Delta_k : a=x_{k_0}<x_{k_1}<\dots<x_{k_{N_k}}=b$$

zadovoljava uslove:

$$\lim_{N_k\to\infty} \|\Delta_k\|\to 0, \quad \frac{\|\Delta_k\|}{\min\limits_j h_{k_j}} \leqslant \beta < \infty, \quad \|\Delta_k\| = \max_{1\leqslant j\leqslant N_k} h_{k_j}$$

Tada za interpolacioni splajn $S_{\Delta_k}(f, x)$ koji zadovoljava granične (13.i) ili (13.ii), kao i za periodičan splajn ako je $f(x)$ periodična funkcija, važi

$$f(x)-S_{\Delta_k}(f, x)=0\,(\|\Delta_k\|^4), \text{ ravnomerno po } x \in [a, b].$$

Dokaz. Prema [1] (str. 37 i str. 36) je

$$|f''(x)-S''_{\Delta_k}(f, x)| \leqslant \frac{5}{6}\|\Delta_k\|^2 (3+G) \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(4)}(x)|, \text{ gde je}$$

$G=8(1-2\beta)(1+\beta)\beta^2$. Primenom Rolle-ove teoreme, uz dve uzastopne integracije (kao u dokazu teoreme 2.3.3 [1]), dobijamo

$$|f(x)-S_{\Delta k}(f, x)| \leqslant \frac{5\|\Delta_k\|^4}{12}(3+G) \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(4)}(x)|$$

Teorema 2. Neka je za rešavanje jednačine (1) primenjen iterativni postupak (9) sa Simpsonovom kvadraturnom formulom i neka je:

a) $f(s) \in C^4[a, b]$, $K(s, t) \in C^4([a, b] \times [a, b])$

b) $\|K\|<1$

c) $S_\Delta(z, s)$ zadovoljava granične uslove (13.i) ili (13.ii)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta\|\to 0,\ \dfrac{\|\Delta\|}{\min\limits_j h_j}\leqslant\beta<\infty$

e) $\dfrac{\partial^4}{\partial t^4}[K(s_i, t)\bar{z}_p(t)]\quad (p=0, 1, \ldots, k-1),\ (i=1, 2, \ldots, n)$

ne menja znak na intervalu $[a, b]$

Tada se rešenje u^* jednačine (1) može približno odrediti preko niza (9) i pri tom važi ocena

$$\|r_n u^*-r_n z_k\|\leqslant\|f\|\frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|}+\varepsilon\frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|}+0(\|\Delta\|^4),\ \text{i} \tag{14}$$

$$\|u(s)-z_k(s)\|\to 0 \text{ kad } n\to\infty,\ k\to\infty \text{ i } \varepsilon\to 0$$

Dokaz.

$$\|r_n u^*-r_n z_k\|\leqslant\|r_n u^*-r_n u_k\|+\|r_n u_k-r_n\bar{z}_k\|+\|r_n\bar{z}_k-r_n z_k\| \tag{15}$$

$$\|r_n u^*-r_n u_k\|\leqslant\|u^*-u_k\|\leqslant\|f\|\frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} \tag{16}$$

Indukcijom se može pokazati da je

$$\|r_n u_k-r_n\bar{z}_k\|\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\|K\|^j\|r_n(K\bar{z}_{k-j-1}-K_{m_{k-j-1}}\bar{z}_{k-j-1})\|$$

Kako je prema uslovima a) i e), teoremi 3.1 [4] i izlaznom kriterijumu (8)

$$\|r_n(K\bar{z}_k-K_{m_k}\bar{z}_k)\|\leqslant\varepsilon$$

imamo da je

$$\|r_n u_k-r_n\bar{z}_k\|\leqslant\varepsilon\frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} \tag{17}$$

$z_k=\bar{z}_k$ za $k=0, 1$.

Iz uslova a) sledi da je $z_k(s)\in C^4[a, b]$ $(k=1, 2, \ldots)$ pa je prema teoremi 1.

$$\|r_n\bar{z}_2-r_n z_2\|\leqslant\|r_n K_{m_2}(\bar{z}_1-p_n r_n\bar{z}_1)\|\leqslant\|K\|0(\|\Delta\|^4)$$

Pretpostavimo da je $\|r_n z_{k-1}-r_n\bar{z}_{k-1}\|\leqslant\|z_{k-1}-\bar{z}_{k-1}\|=0(\|\Delta\|^4)$ pa pokažimo da to tvrđenje važi za k. Na osnovu pretpostavke i teoreme 1. imamo

$$\|r_n\bar{z}_k-r_n z_k\|=\|r_n K_{m_k}(\bar{z}_{k-1}+z_{k-1}-z_{k-1}-p_n r_n z_{k-1})\|=0(\|\Delta\|^4) \tag{18}$$

Zamenom (16), (17), i (18) u (15) dobijamo tvrđenje teoreme.

Kako, prema teoremi 3.12.1 [1], brzina konvergencije kubnog splajna ne može biti veća od $0(\|\Delta\|^4)$ to za ε treba uzeti veličinu reda $\|\Delta\|^4$. Uslov e) teoreme 2. je dosta oštar. Corollary 3.2 [4] može donekle pojednostaviti proveravanje tog uslova. U sledećoj teoremi uslov e) je izostavljen, ali tada izlazni kriterijum (8) važi asimptotski.

Teorema 3. Neka je za rešavanje jednačine (1) primenjen iterativni postupak (9) i neka je

a) $f(s) \in C^5[a, b]$, $K(s, t) \in C^5([a, b] x [a, b])$

b) $\|K\|<1$

c) $S_\Delta(z, s)$ zadovoljava granične uslove (13.i) ili (13.ii)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta\| \to 0, \quad \dfrac{\|\Delta\|}{\min\limits_j h_j} \leqslant \beta < \infty$

e) $\left[\dfrac{\partial^3}{\partial t^3} K(s, t)\, \bar{z}_p(t)\right]_{t=a} \neq \left[\dfrac{\partial^3}{\partial t^3} K(s, t)\, \bar{z}_p(t)\right]_{t=b}, \quad (p=0, 1, \ldots, K-1)$

Tada se rešenje u^* jednačine (1) može približno odrediti preko niza z_k, pri čemu važi:

(19) $$\|r_n(u^* - z_k)\| \leqslant \|f\| \frac{\|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} + \frac{\varepsilon}{15} \frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + 0\left(\max\left(\|\Delta\|^4,\ 2^{-5m_k}\right)\right)$$

i $\|u^* - z_k\| \to 0$ kad $k \to \infty$, $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $m_k \to \infty$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2. Ovde se samo na osnovu teoreme 1. i 2. [5] relacija (17) zamenjuje sa

$$\|r_n u_k - r_n \bar{z}_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{15} \frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + 0\left(2^{-5m_k}\right)$$

jer je za Simpsonovu kvadraturnu formulu $l=4$, a veličina $o((2m)^{-l})$ u teoremi 2. [5] je reda $(2m)^{-l-1}$.

Teorema 4. Neka je za rešavanje jednačine (1) upotrebljen iterativni niz (9), c tim što se izlazni kriterijum (8) zamenjuje kriterijumom

$$\begin{cases} \text{(a)} & r_n(K_m u - K_{m-1}u)/r_n(K_{m+1}u - K_m u) \text{ se ponaša kao stepen broja 2.} \\ \text{(b)} & \dfrac{(r_n(K_m u - K_{m+1}u))^2}{|\, r_n(K_{m-1}u - K_m u)\,|} \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Neka važe ostale pretpostavke teoreme 3. Tada važi ocena

$$\|r_n(u^* - z_k)\| \leqslant \frac{\|f\|\ \|K\|^{k+1}}{1-\|K\|} + \frac{16\,\varepsilon}{15} \frac{1-\|K\|^k}{1-\|K\|} + 0\left(max\left(\|\Delta\|^4, 2^{-5\,(m_k+1)}\right)\right)$$

Dokazuje se na osnovu teoreme 2. [5].

Primedba 1. Teoreme 2. 3. i 4. važe i za granične uslove (13.iii) ukoliko mreža splajna i granični uslovi zadovoljavaju pretpostavke teoreme 2, 9.4.[1].

Primedba 2. Kada su jezgro i slobodan član periodične funkcije sa periodom $b-a$, treba koristiti periodični splajn [1]. Teoreme 2. 3. 4. važe i u tom slučaju, s tim što se izostavljaju uslovi c).

Primedba 3. Za realizaciju algoritma (9) možemo upotrebiti bilo koju Newton-Cotes-ovu kvadraturnu formulu ili splajn višeg reda. Dokazi konvergencije i ocena greške se mogu dobiti na sličan način, kao u teoremama 2. 3. i 4, korišćenjem rezultata [1], [4], [5].

Primedba 4. Algoritam (9) je pogodan za rešavanje graničnih zadataka drugog reda preko Green-ove funkcije. No, tada je konvergencija splajna slabija zbog prekida prvog izvoda Green-ove funkcije (teorema 2.3.1. [1]).

U sledećim primerima je korišćen izlazni kriterijum *I*. Računanje je završeno ili kada za neko k taj kriterijum nije zadovoljen do NMAX čvorova, ili kada je

$$\|r_n z_k - r_n z_{k-1}\| \leqslant \delta, \quad \delta > 0 \quad \text{unapred zadato.} \tag{20}$$

Primer 1. ([2])

$$K(s, t) = \frac{2}{e^{10}-1} e^{5(s+t)}, \quad f(s) = s, \quad 0 \leqslant s, t \leqslant 1$$

$$\varepsilon = 10^{-4}, \ \delta = 10^{-6}, \ \text{NMAX} = 513, \ h_j = 0.05 \ (j = 1, 2, \ldots, 20)$$

Računanje je završeno po kriterijumu (20) za $k=9$. Tačno rešenje je

$$u^*(s) = s + \frac{4e^5+1}{10} \frac{1}{e^{10}-1} e^{5s}$$

Rezultati su prikazani u tabeli 1.

Primer 2.

$$K(s, t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{4+(s-t)^2}, \quad -1 \leqslant s, t \leqslant 1$$

$$f(s) = \frac{s+1}{\pi}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{s-1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s+1}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{4+(s-1)^2}{4+(s+1)^2}$$

$$u^*(s) = s+1$$

$$\varepsilon = 10^{-4}, \ \delta = 10^{-6}, \ \text{NMAX} = 513, \ h_j = 0.1 \ (j = 1, 2, \ldots, 20)$$

Računanje je prekinuto po kriterijumu (20) za $k=11$, (tabela 2.).

Tabela 1.

s_i	$u^*(s_i)$	$z_9(s_i)$
0.0	0.0026998	0.0027005
0.05	0.0534667	0.0534667
0.10	0.1044513	0.1044514
0.15	0.1557155	0.1557156
0.20	0.2073389	0.2073390
0.25	0.2594234	0.2594235
0.30	0.3120998	0.3120999
0.35	0.3655366	0.3655368
0.45	0.4199493	0.4199495
0.45	0.4756153	0.4756157
0.50	0.5328908	0.5328913

Tabela 2.

s_i	$z_{11}(s_i)$
−1.00	0.0000005
−0.80	0.2000003
−0.60	0.4000005
−0.40	0.6000009
−0.20	0.8000004
0.00	1.0000010
0.20	1.2000003
0.40	1.4000010
0.60	1.6000013
0.80	1.8000007
1.00	2.0000000

LITERATURA

[1] Alberg D. Ž., Nil'son E., Uloš D. Ž., *Teorija splajnov i ee priloženija*, Moskva 1972.

[2] Atkinson Kendall, *An Automatic Program for Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 2, No 2, june 1976, p. 154—171.

[3] Noble Ben, *Error Analysis of Collocation Methods for Solving Fredholm Integral Equations*, Topics in Numer. Anal. Academic Press, New York, 1972.

[4] Rowland J. H. and Miel G. J., *Exit criteria for Newton-Cotes quadrature rules*, Siam J. Numer. Anal. Vol. 14. No 6. Dec. 1977.

[5] Surla Katarina, *O izlaznom kriterijumu za interpolacione kvadraturne formule* (predato u štampu).

[6] Herceg D., Koprivica K., Pejović P., *Jedan prilaz numeričkom rešavanju Fredholmove integralne jednačine druge vrste pomoću računara*, Mat. vesn., 12 (27), 1975., 257—263.

Katarina Surla

THE NUMERICAL SOLUTION OF FREDHOLM'S INTEGRAL EQUATION BY MEANS OF SPLINE APPROXIMATIONS

Summary

In this paper a nonstationary iterative method of solving equation (1) is given. The integral is replaced by a quadrature formula and the calculation procedure is ended when the output criteria [5] is satisfied. In order to apply the above criteria a spline approximation is introduced. The existence of convergency of the procedure is proved and the error estimation is given. The above is illustrated on several worked-out examples obtained by the V 73 machine.