Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 7 (1977)
Ежегодник Естественно-математического факультета — Универзитет в Новом Саде, Том 7 (1977)

Ушан Янез, Жарков Добривой

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ АССОЦИАТИВНОСТИ НА АЛГЕБРЕ ИНФИНИТАРНЫХ КВАЗИГРУПП

(Сообщено 29. 8. 1975*)

1° Введение

Речь идет о решении системы

$$\widehat{j\in\{2,\ldots,n\}}\; X_1\left[X_2\left(a_1^{\infty}\right),\, b_1^{\infty}\right]=X_{2j-1}\left[a_1^{j-1},\, X_{2j}\left(a_j^{\infty},\, b_1^{j-1}\right),\, b_j^{\infty}\right]$$

на алгебре инфинитарных квазигрупп типов ω и $\omega+m$, введенных в [2].

2° Вспомогательные результаты

Используем следующие положения:

Р. 1 [3] Если n-квазигруппы A_i, $i\in N_{2n}$, удовлетворяют системе

$$\text{(A)}\qquad \widehat{j\in\{2,\ldots,n\}}\; X_1\left[X_2\left(a_1^{n}\right),\, a_{n+1}^{2n-1}\right]=X_{2j-1}\left[a_1^{j-1},\, X_{2j}\left(a_j^{j+n-1}\right),\, a_{j+n}^{2n-1}\right],$$

то справедливы равенства

$$(\tilde a_1)\qquad A_{2j-1}\left(a_1^{n}\right)=\overset{n-1}{B}\left(\left\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_i\right\}_{i=1}^{j-1},\, T_{2j-1}^{(j)}a_j,\, \left\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n)}a_i\right\}_{i=j+1}^{n}\right),$$

$$(\tilde a_2)\qquad A_{2j}\left(a_1^{n}\right)=T_{2i-1}^{(j)-1}\overset{n-1}{B}\left(\left\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_{i-j+1}\right\}_{i=j}^{n},\, \left\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n)}a_{n+(i-j)}\right\}_{i=2}^{j}\right),$$

где B — группа, построенная через формулы теоремы о четырех квазигруппах, например из равенства

$$A_1^{(L,2)}\left[A_2^{(L,2)}(x,y),z\right]=A_{2n-1}\left[\overset{n-2}{k},x,A_{2n}(y,\overset{n-2}{k},z)\right];$$

$$T_i^{(t)}x=A_i\left(\overset{t-1}{k},x,\overset{n-t}{k}\right),\ A_1^{(L,d)}\,a_1^{d})=A_1\left(a_1,\overset{n-d}{k},a_2^{d}\right),\ A_2^{(L,d)}\left(a_1^{d}\right)=$$

$$A_2\left(\overset{n-d}{k},a_1^{d}\right),\ A_i^{(R,d)}\left(a_1^{d}\right)=A_i\left(a_1^{d},\overset{n-d}{k}\right),\quad i\in\{1,2\},\, k\in Q.$$

$$\overset{n-1}{B}\left(x_1^{n}\right)\left[B\left(B\ldots\left(B\left(x_1^{2}\right),x_3\right),\ldots\right),x_n\right].$$

---

* На Конгрессе ДМФА Югославии, Нови Сад, 28. 8. — 2. 9. 1975.

Р. 2 [3] Если A_i, $i \in N_{2n}$ удовлетворяют системе (A), то справедливо положение

$$(\forall i \in N_n)\left(T^{(i)}_{2i-1} T^{(n)}_{2i} k = T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} k = e\right);$$

e — единица группы B из Р. 1, построенной через $k \in Q$.

3° Решение системы

Лемма. Если квазигруппы A_i, $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ удовлетворяют системе

$$(\text{Б}) \qquad \widehat{_{j\in\{2,\ldots,n\}}} X_1 \left[X_2 \left(a_1^n, a_{n+1}^\infty\right), b_1^{n-1}, b_n^\infty\right] = X_{2j-1}\left(a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j, a_{n+1}^\infty, b_1^{j-1}), b_j^{n-1}, b_n^\infty\right], \text{ то}$$

$$(a_1) \qquad A_{2j-1}\left(a_1^\infty\right) S\left[\overset{n-1}{B}\left(\left\{T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} a_i\right\}_{i=1}^{j-1}, T^{(j)}_{2j-1} a_j, \left\{T^{(i)}_{1i-1} T^{(\omega+(i-1))}_{2i} a_i\right\}_{i=j+1}^n\right), a_{n+1}^\infty\right],$$

$$(a_2) \qquad A_{2j}\left(a_1^\infty, b_1^{j-1}\right) = T^{(j)-1}_{2j-1} \overset{n-1}{B}\left[\left\{T^{(i)}_{2i-1} T^{(1)}_{2i} a_{i-j+1}\right\}_{i=j}^{n-1}, T_1^{(1)} D\left(a_{n-j+1}^\infty\right), \left\{T^{(i)}_{2i-1} T^{(\omega+(i-1))}_{2i} b_{i-1}\right\}_{i=2}^j\right];$$

$D\left(x_1^\infty\right) = A_2^{(L,\infty-(n-1))}\left(x_1^\infty\right) = A_2\left(\overset{n-1}{k}, x_1^\infty\right)$, B — группа, построенная способом из Р. 1 при $a_{n+1} = k$ и $b_n = k$; $S\left(x_1^\infty\right) = A_{2n-1}\left(\overset{n-1}{k}, T^{(n)-1}_{2n-1} x_1, x_2^\infty\right) = A_{2n-1}^{(L,\infty-(n-1))}\left(T^{(n)-1}_{2n-1} x_1, x_2^\infty\right)$, $T^{(\omega+(j-1))}_{2j} x = \bar{T}^{(n)}_{2j} x$, $\bar{A}_{2j}\left(a_j^n, b_1^{j-1}\right) = A_{2j}\left(Q_j^n, \overset{\infty}{k}, b_1^{j-1}\right)$, $k \in Q$.

Доказательство

I Рассмотрим сначала систему

$$(\text{Б}_1) \quad \widehat{_{j\in\{2,\ldots,n\}}} X_1\left[X_2\left(a_1^n, a_{n+1}^\infty\right), b_1^{n-1}\right] = X_{2j-1}\left[a_1^{j-1}, X_{2j}\left(a_j^n, a_{n+1}^\infty, b_1^{j-1}\right), b_j^{n-1}\right].$$

Пусть A_i, $i \in N_{2n}$ удовлетворяют системе (Б_1). Пусть далее

$$\bar{A}_{2j}\left(a_j^n, b_1^{j-1}\right) = A_{2j}\left(a_j^n, \overset{\infty}{k}, b_1^{j-1}\right) \qquad \text{и}$$

$$(a) \qquad T^{(\omega+(j-1))}_{2j} - \bar{T}^{(n)}_{2j};$$

$|A_{2j}| = \omega + (j-1)$.

Если в $(\bar{\text{Б}}_1)$ — (Б_1), в которую положены A_i — положим $a_{n+1}^\infty = (k, k, \ldots) = \overset{\infty}{k}$, учитывая Р. 1и (a), находим формулы для A_{2j-1}, т. е. формулы

$$(\bar{a}_1) \qquad A_{2j-1}\left(a_1^n\right) = \overset{n-1}{B}\left(\left\{T^{(i)}_{2i-1} T^{(i)}_{2i} a_i\right\}_{i=1}^{j-1}, T^{(j)}_{2j-1} a_j, \left\{T^{(i)}_{2i-1} T^{(\omega+(i-1))}_{2i} a_i\right\}_{i=j+1}^n\right]\right).$$

Если далее в ($\bar{Б}_1$) положим $a_1^{j-1} = \overset{j-1}{k}$ и $b_j^{n-1} = \overset{n-1}{k}$, учитывая только что полученную формулу для A_1 и Р. 2, то получаем

$$\text{(б)} \qquad A_{2j}(a_j^n, a_{n+1}^\infty, b_1^{j-1}) = T_{2j-1}^{(j)-1}\overset{j-1}{B}\left[T_1^{(1)}A_2(\overset{j-1}{k}, a_j^n, a_{n+1}^\infty),\right.$$
$$\left.\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(\omega+(i-1))}b_{i-1}\}_{i=2}^{j}\right].$$

Если ($\bar{а}_1$) и (б) положим в ($\bar{Б}_1$), а затем $b_1^{n-1} = k^{n-1}$, учитывая Р. 2 и обозначение

$$A_2^{(L,\infty-(j-1))}(a_j^\infty) = A_2(\overset{j-1}{k}, a_j^n, a_{n+1}^\infty),$$

получаем

$$\text{(с)} \qquad T_1^{(1)}A_2(a_1^\infty) = \overset{j-1}{B}\left[\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_i\}_{i=1}^{j-1}, T_1^{(1)}A_2^{(L,\infty-(j-1))}(a_j^\infty)\right].$$

Если в (с) положим $j=s$ и $j=s+1$, сначала получаем, что

$$T_1^{(1)}A_2^{(L,\infty-(s-1))}(a_s^\infty) = B\left[T_{2s-1}^{(s)}T_{2s}^{(1)}a_s, T_1^{(1)}A_2^{(L,\infty-s)}(a_{s+1}^\infty)\right],$$

а затем, учитывая, что $j \in \{1, \ldots, n\}$, равенство

$$\text{(д)} \qquad A_2^{(L,\infty-(j-1))}(a_1^\infty) = T_1^{(1)-1}\overset{n-j}{B}\left[\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_{i-j+1}\}_{i=j}^{n-1},\right.$$
$$\left.T_1^{(1)}A_2^{(L,\infty-(n-1))}(a_{n-j+1}^\infty)\right].$$

Если (д) положим в (б), находим формулы для A_{2j}, $j \in \{1, \ldots, n\}$. т. е. формулы

$$(\bar{а}_2) \qquad A_{2j}(a_1^\infty, b_1^{j-1}) = T_{2j-1}^{(j)-1}\overset{n-1}{B}\left[\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_{i-j+1}\}_{i=j}^{n-1}, T_1^{(1)}D(a_{n-j+1}^\infty),\right.$$
$$\left.\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(\omega+(i-1))}b_{i-1}\}_{i=2}^{j}\right] *$$

где

$$D(a_{n-j+1}^\infty) = A_2(\overset{n-1}{k}, a_{n-j+1}^\infty).$$

II Далее рассмотрим систему (Б).

Если в ($\bar{Б}$) — (Б), в которую положены A_i — положим $b_n^\infty = (k, k, \ldots) = \overset{\infty}{k}$, то ($\bar{Б}$) становится системой равенств ($\bar{Б}_1$). Таким образом формулы для A_{2j}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, являются уже формулами ($\bar{а}_2$), где B построена способом из Р. 1, используя $k \in Q$.

Через ($\bar{Б}_2$) обозначим систему равенств, полученную из ($\bar{Б}$) заменяя $a_{n+1}^\infty = \overset{\infty}{k}$ и $b_n^\infty = \overset{\infty}{k}$; в доказательстве теоремы используется один и тот же $k \in Q$. Только что полученные финитарные операции — ретракты операции A_i — обозначим через $\bar{A}_i$.

---

* В самом деле, речь идет о (a_2)

Из

$$A_1\left[\bar{A}_2\left(x_1^n\right),\, x_{n+1}^{2n-1},\, x_{2n}^{\infty}\right]=A_{2n-1}\left[x_1^{n-1},\, \bar{A}_{2n}\left(x_n^{2n-1}\right),\, x_{2n}^{\infty}\right]$$

получаем, что

$$A_1\left(\bar{T}_2^{(n)}x_n,\, x_{n+1}^{2n-1},\, x_{2n}^{\infty}\right)=A_{2n-1}\left[\overset{n-1}{k},\, \bar{A}_{2n}\left(x_n^{2n-1}\right),\, x_{2n}^{\infty}\right]=$$
$$=A_{2n-1}^{(L,\infty-(n-1))}\left[\bar{A}_{2n}\left(x_n^{2n-1}\right),\, x_{2n}^{\infty}\right]$$

и что

$$T_{2n-1}^{(n)}\bar{A}_{2n}\left(x_n^{2n-1}\right)=\bar{A}_1\left(\bar{T}_2^{(n)}x_n,\, x_{n+1}^{2n-1}\right)$$

т. е. что справедливо

$$\text{(e)}\qquad A_1\left(x_1^n,\, x_{n+1}^{\infty}\right)=A_{2n-1}^{(L,\infty-(n-1))}\left[T_{2n-1}^{(n)-1}\bar{A}_1\left(x_1^n\right),\, x_{n+1}^{\infty}\right].$$

Далее, для любого $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, из

$$A_{2i-1}\left[x_1^{i-1},\, \bar{A}_{2i}\left(x_i,\, x_{i+1}^{i+n-1}\right),\, x_{i+n},\, x_{i+n+1}^{2n-1},\, x_{2n}^{\infty}\right]=$$
$$A_{2(i+1)-1}\left[x_1^{i-1},\, x_i,\, \bar{A}_{2(i+1)}\left(x_{i+1}^{i+n-1},\, x_{i+n}\right),\, x_{i+n+1}^{2n-1},\, x_{2n}^{\infty}\right]$$

и $x_{i+1}^{i+n-1}=\overset{n-1}{k}$, получаем, что справедливо

$$(\text{ф}_1)\qquad A_{2i-1}\left(x_1^n,\, x_{n+1}^{\infty}\right)=A_{2(i+1)-1}\left(x_1^{i-1},\, \bar{T}_{2i}^{(1)-1}x_i,\, \bar{T}_{2(i+1)}^{(n)}x_{i+1},\, x_{i+2}^n,\, x_{n+1}^{\infty}\right)\quad \text{и}$$

$$(\text{ф}_2)\qquad \bar{A}_{2i-1}\left(x_1^n\right)=\bar{A}_{2(i+1)-1}\left(x_1^{i-1},\, \bar{T}_{2i}^{(1)-1}x_i,\, \bar{T}_{2(i+1)}^{(n)}x_{i+1},\, x_{i+2}^n\right).$$

Учитывая (е), (ф$_1$) и (ф$_2$), находим, что для любого $j\in\{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство

$$\text{(г)}\qquad A_{2j-1}\left(x_1^{\infty}\right)=A_{2n-1}^{(L,\infty-(n-1))}\left[T_{2n-1}^{(n)-1}\bar{A}_{2j-1}\left(x_1^n\right),\, x_{n+1}^{\infty}\right]^{*},$$

где $\bar{A}_{2j-1}\left(x_1^n\right)=A_{2j-1}\left(x_1^n,\, \overset{\infty}{k}\right)$.

Наконец, учитывая ($\bar{a}_1$) и (г), получаем, что справедливы и формулы (a_1).

Учитывая лемму и факт, что квазигруппы типа ω существуют [2], проверкой находим, что справедлива следующая

Теорема I. Система (Б) имеет решение на любом Q, если $kQ\leqslant kR$**. Координаты любого решения системы (Б) получаются через формулы

$$(a_1')\qquad A_{2j-1}\left(x_1^{\infty}\right)=S\left[\overset{n-1}{B}\left(\alpha_1^{j-1}x_1^{j-1},\, \beta_j x_j,\, \alpha_{j+n}^{2n-1}x_{j+1}^{n}\right),\, x_{n+1}^{\infty}\right]$$

$$(a_2')\qquad A_{2j}\left(x_1^{\infty},\, y_1^{j-1}\right)=\beta_j^{-1}\overset{n-1}{B}\left[\alpha_j^{n-1}x_1^{n-j},\, D\left(x_{n-j+1}^{\infty}\right),\, \alpha_{n+1}^{j+n-1}y_1^{j-1}\right];$$

$\alpha_i,\, \beta_j\in Q!$, B — любая группа, D — любая инфинитарная квазигруппа типа ω, S — любая инфинитарная 1—лупа типа ω.

* $A_{2n-1}^{(L,\infty-(n-1))}\left(T_{2n-1}^{(n)-1}x_1,\, x_2^{\infty}\right)=S\left(x_1^{\infty}\right)$ является инфинитарной 1-лупой с единицей $k\in Q$, типа ω.

** R — множество всех действительнх чисел.

4° О точности, с которой определены порождающие квазигруппы в решениях

Сначала рассмотрим систему уравнений (Б1). В 3° доказано, что любое решение системы (Б1) получается через формулы

$$(\mathrm{a}_1'') \qquad A_{2j-1}(x_1^n) = \overset{n-1}{B}\left(\alpha_1^{j-1} x_1^{j-1}, \beta_j x_j, \alpha_{j+n}^{2n-1} x_{j+1}^n\right)$$

$$(\mathrm{a}_2') \qquad A_{2j}(x_1^\infty, y_1^{j-1}) = \beta_j^{-1}\overset{n-1}{B}\left[\alpha_j^{n-1} x_1^{n-1}, D(x_{n-j+1}^\infty), \alpha_{n+1}^{j+n-1} y_1^{j-1}\right],$$

где $\alpha_i, \beta_j \in Q!$, B — любая группа, а D — любая инфинитарная квазигруппа типа ω.

Докажем следующее положение

Теорема 2. Если A_{2j-1} и A_{2j} , $j \in \{1, \dots, n\}$, определены через группу B способом из (a_1'') и (a_2'), то A_{2j-1} и A_{2j} выражаются таким же образом через любую из групп $\bar{B}$ если только $\bar{B}$ главноизотопна группе B. Отвечающие подстановки и квазигруппы D в упомянутых выражениях операций A_{2j-1} и A_{2j} через B и $\bar{B}$ являются в отношении эквивалентности $\sim_B$, определенной, в частности*, через

$$\mathcal{A} \sim_B \mathcal{B} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists a, b \in Q)\left(\mathcal{A}(x_1^n) = B\left[a, B(\mathcal{B}(x_1^n), b)\right]\right),$$

где $n \in N \cup \{\infty\}$.

Доказательство

Пусть A_{2j-1} выражается через группу B и через группу $\bar{B}$, способом (a_1''). Учитывая (a_1''), получаем, что B и $\bar{B}$ являются главноизотопными группами. Как известно ([7], стр. 17), справедливо равенство

$$(\text{и}) \qquad \bar{B}(x, y) = B(x, Ly),$$

$$Ly = B(\bar{e}^{-1}, y),$$

$\bar{e}$ — единица группы $\bar{B}$, -1 из группы B.

Пусть A_{2j-1} выражаерся через $\bar{B}$, а B — любая группа, являющаяся ее главным изотопом. Учитывая (и) и (a_1''), получаем

$$(\mathrm{j}_1) \qquad A_{2j-1}(x_1^n) = \overset{n-1}{\bar{B}}\left(\bar{\alpha}_1^{j-1} x_1^{j-1}, \bar{\beta}_j x_j, \bar{\alpha}_{j+n}^{2n-1} x_{j+1}^n\right) =$$

$$\overset{n-1}{B}\left(\bar{\alpha}_1 x_1, L\bar{\alpha}_2^{j-1} x_2^{j-1}, L\bar{\beta}_j x_j, L\bar{\alpha}_{j+n}^{2n-1} x_{j+1}^n\right) =$$

$$\overset{n-1}{B}\left(\alpha_1^{j-1} x_1^{j-1}, \beta_j x_j, \alpha_{j+n}^{2n-1} x_{j+1}^n\right);$$

α_i, β_j надо определить.

---

* [8], стр. 81–82.

Так как существуют нетривиальные главные автотопы группы, то надо учитывать и возможность

$$\text{(к)} \qquad \overset{n-1}{B}(x_1^n) = \overset{n-1}{B}(\xi_1^n x_1^n),$$

где $\xi_i \in Q!$. ξ_i — автотопные подстановки группы B (и $\overline{B}$). Поэтому справедливы равенства

$$\xi_i x = B(t, \varphi_i x) = B(\varphi_i' x, t),$$

где φ_i и φ_i' автоморфизмы группы B, $t \in Q$ [7]. Если в (к) ξ_i сначала выражаются через

$$\xi_i x = B(k_i, \varphi_i x),$$

то справедливы равенства

$$B[\overset{n-1}{B}(x_1^n), e] = \overset{n-1}{B}(\xi_1^n x_1^n) = B[\overset{n-1}{B}(\{\varphi_i' x_i\}_{i=1}^n), k],$$

где $k = \overset{n-1}{B}(k_1^n)$, e — единица группы B. Отсюда, так как справедливо

$$B[\overset{n-1}{B}(\alpha_1^n x_1^n), a] = B[\overset{n-1}{B}(\beta_1^n x_1^n), b] \Rightarrow (\forall i)(\alpha_i = \beta_i \wedge a = b),^*$$

то $\varphi_i' = I$ для любого $i \in N_n$ и $k = e$, т. е. φ_i — внутренние автоморфизмы группы B, и поэтому — ξ_i выражаются только через произведения трансляции группы B.

Таким образом, из (к) и (j₁) получаем, что α_i, β_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, встречающиеся в (j₁), выражаются через отвечающие $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_j$ следующим образом

$$\text{(л)} \qquad \alpha_1 = \xi_1 \overline{\alpha}_1,\ \alpha_i = \xi_i L \overline{\alpha}_i \quad \text{для} \quad i \neq 1,\ \beta_1 = \xi_1 \overline{\beta}_1,\ \beta_j = \xi_j L \overline{\beta}_j$$

для $j \neq 1$,
т. е что

$$\alpha_i x = B[a_i, B(\overline{\alpha}_i x, b_i)] \text{ и } \beta_j x = B[p_j, B(\overline{\beta}_j x, q_j)],$$

или

$$(\overline{\text{л}}) \qquad \alpha_i \sim_B \overline{\alpha}_i \quad \text{и} \quad \beta_j \sim_B \overline{\beta}_j.$$

Учитывая далее (a_2'), (и), (к) и (л), получаем, что

$$\text{(j}_2\text{)} \qquad A_{2j}(x_1^\infty, y_1^{j-1}) = \overline{\beta}_j^{-1} \overset{n-1}{\overline{B}} [\overline{\alpha}_1^{n-j} x_1^{n-j}, \overline{D}(x_{n-j+1}^\infty), \overline{\alpha}_{n+1}^{j+n-1} y_1^{j-1}] =$$

$$\overline{\beta}_j^{-1} \overset{n-1}{B} [\overline{\alpha}_j x_1, L \overline{\alpha}_{j+1}^{n-1} x_2^{n-j}, L\overline{D}(x_{n-j+1}^\infty), L\overline{\alpha}_{n+1}^{j+n-1} y_1^{j-1}] =$$

$$\beta_j^{-1} \xi_j \overset{n-1}{B} [L^{**} \overline{\alpha}_j^{n-1} x_1^{n-j}, L\overline{D}(x_{n-j+1}^\infty), L\overline{\alpha}_{n+1}^{j+n-1} y_1^{j-1}] =$$

$$\beta_j^{-1} \overset{n-1}{B} [\varsigma_1^{n-j} L \overline{\alpha}_j^{n-1} x_1^{n-j}, \varsigma_{n-j+1} L\overline{D}(x_{n-j+1}^\infty), \varsigma_{n-j+2}^{n} L\overline{\alpha}_{n+1}^{j+n-1} y_1^{j-1}].^{***}$$

---

* [8], стр. 38; α_i, β_j — автоморфизмы группы B.

** Для $j \neq 1$; если $j = 1$, то $\overline{\beta}_1^{-1} = \beta_1^{-1} \xi_1$.

*** $\varsigma_i = \zeta_i \xi_j^{(i)}$, $\xi_j \overset{n-1}{B}(x_1^n) = \overset{n-1}{B}(\{\xi_j^{(i)} x_i\}_{i=1}^n)$, $\overset{n-1}{B}(x_1^n) = \overset{n-1}{B}(\zeta_1^n x_1^n)$.

Отсюда находим, что $(\overline{\text{л}})$ справедливо для всех $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$; в частности для D и $\overline{D}$, т. е. в частности справедливо и

$$D \sim_B \overline{D}.$$

Попутно мы получили, что от выражения операции A_{2j-1}, A_{2j} через $\overline{B}$ и $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_j$, можно перейти к выражению через B и α_i, β_j, где В любой главный изотоп группы $\overline{B}$, и если в (л)* положим $(\xi_1^n) = (\zeta_1^n) = (\overset{n}{\mathrm{I}})$; I — единичная подстановка множества Q.

Попутно получено и новое доказательство основного результата работы [5]. И больше того: получено и то, что каждое решение и системы, рассматриваемые в [3,5], выражаем через любую группу из множества между собой главноизотопных, если только оно выражается через одну, из этого множества. Надо упомянуть, что результат подобным способом переносится и на системы из [4] и [9].

А теперь рассмотрим систему (Б). В 3° доказано, что любое решение системы (Б) получается через формулы (a_1') и (a_2'), где α_i, $\beta_j \in Q!$, B — любая группа, D — любая инфинитарная квазигруппа типа ω и S — любая инфинитарная 1-лупа типа ω.

Пусть одни и те же операции A_{2j-1}, A_{2j} определены через $(B, S, D, \alpha_i, \beta_j)$ и $(\overline{B}, \overline{S}, \overline{D}, \overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_j)$. Из (a_1') получаем, что

1) B и $\overline{B}$ изоморфные группы; и

2) S и $\overline{S}$ изотопные, где изотопия имеет вид $\overline{S}(x_1^{\sim}) = S(\varphi x_1, x_2^{\sim}), \varphi \in Q!$

Учитывая полученное и тот факт, что (Б) становится системой $(Б_1)$ если положим $b_{n+1}^{\sim} = \tilde{k}$, находим, что справедливо и следующее положение

Теорема 3. В одном и том же решении пусть A_{2j-1} и A_{2j} выражены через (B, S) и $(\overline{B}, \overline{S})$, образом (a_1') и (a_2'). Тогда B и $\overline{B}$ изоморфные группы, а S и $\overline{S}$ изотопные вида $S(x_1^{\infty}) = \overline{S}(\varphi x_1, x_2^{\infty})$; $\varphi \in Q!$. Если, далее, A_{2j-1} и A_{2j} выражаются через $(B, S, D, \alpha_i, \beta_j)$ и $(\overline{B}, S, \overline{D}, \overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_j)$ образом (a_1') ии (a_2'), т. е. если S одна и та же в этих выражениях, то $\overline{B}$ может быть любая из главноизотопных групп группе B, а $\alpha_i \sim_B \overline{\alpha}_i$, $\beta_j \sim_B \overline{\beta}_j$, $D \sim_B \overline{D}$.

Как и в [5] (лемма 5), получаем, что если B и $\overline{B}$ главноизотопные группы, то $\mathcal{A} \sim_B \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \sim_{\overline{B}} \mathcal{B}$.

Заметки

Наше внимание обращено к следующим задачам:

1. Решить систему

$$\widehat{j \in \{2, \ldots, n+d\}} \; X_1 [X_2(a_1^n), a_{n+1}^q] = X_{2j-1} [a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{n+j}^q],$$
$$q \in (N \setminus \{1, \ldots, 2n+d-2\}) \cup \{\infty\}, \; d \in N \cup \{0\}.$$

---

* Пополненную отвечающими следствиями, получающимися из (j_2)

Для $q=2n+d-1$ и $d=0$ система рассмотрена в [3], а для $q=2n+d-1$ и $d\in N$ система рассмотрена в [9].

2. Рассмотреть систему (Б), в которой $j\in N\setminus\{1\}$.

3. Решить систему

$$\widehat{j\in\{2,\ldots,n\}}\ X_1\left[X_2\left(a_1^\infty\right),\ b_1^\infty\right]=X_{2j-1}\left[a_1^{j-1},\ X_{2j}\left(a_j^\infty\right),\ b_1^\infty\right]$$

на алгебре инфинитарных квазигрупп.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мадевски Ж., Трпеновски Б., Чупона Г., *За инфинитарните асоцијативни операции*, Бил. Друшт. мат. и физ. од СР Македонија, кн. XV 1964, 19—22.

[2] Belousov V. D., Stojaković Z. M., *On infinitary quasigroups*, Publ. Inst. Math., T. 16 (30), 1973, 31—42.

[3] Ушан Я., *Об одной системе функциональных уравнений общей n-арной ассоциативности на алгебре n-арных квазигрупп*, Math. Balk., 2 (1972), 288—295.

[4] Ушан Я., Дйонин В., *Решение системы функциональных уравнений*

$$\widehat{j\in\{2,\ldots,n\}}\ X_1\left[X_2\left(a_1^{n+d}\right),\ a_{n+d+1}^{2n+d-1}\right]=\ldots$$

на алгебре квазигрупп, Мат. весник 11 (26), Sv. 3, 1974, 215—221.

[5] Ушан Я., *О точности с которой определены группа и подстановки в решении...*, Publ. Inst. Math., Nouv. ser., tome 17 (31), 1974, 173—182.

[6] Ушан Я., *Ассоциативные в целом системы n-арных квазигрупп*, Publ. Inst. Math., Nouv. sér., tome 19(33), 1975, 155—165.

[7] Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*, Наука, Москва, 1967.

[8] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигруппы*, „Штиница", Кишенев, 1972.

[9] Дйонин В., *Решение системы функциональных уравнений*

$$\widehat{j\in\{2,\ldots,n+d\}}\ X_1\left[X_2\left(a_1^{n}\right),\ a_{n+1}^{2n+d-1}\right]=\ldots,$$

Mat. vesnik, 12 (27), Sv. 2, 1975, 135—142.

Janez Ušan, Dobrivoje Žarkov

O JEDNOM SISTEMU FUNKCIONALNIH JEDNAČINA OPŠTE ASOCIJATIVNOSTI NA ALGEBRI INFINITARNIH KVAZIGRUPA

Rezime

Nalazi se opšte rešenje i utvrđuje tačnost sa kojom su određene generatorne kvazigrupe rešenja (— kvazigrupe sa kojima se izražavaju komponente rešenja) sistema funkcionalnih jednačina

$$\widehat{j\in\{2,\ldots,n\}}\ X_1\left[X_2\left(a_1^\infty\right),\ b_1^\infty\right]=X_{2j-1}\left[a_1^{j-1},\ X_{2j}\left(a_j^\infty,\ b_1^{j-1}\right)\ b_j^\infty\right]$$

na algebri infinitarnih kvazigrupa tipova ω i $\omega+m$.