Zbornik radova Prirodno-Matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 6 (1976)
Review of Research of Science—University of Novi Sad, Volume 6 (1976)

Nikolić-Despotović Danica

REPREZENTACIJA I OSOBINE JEDNE KLASE OPERATORA

U ovom radu data je reprezentacija jedne klase operatora u polju M operatora Mikusinskog. Ispitani su i uslovi pod kojima su operatorske funkcije predstavljene datom reprezentacijom neprekidne u datoj tački, u smislu neprekidnosti u operatorskom računu [5]. Problem neprekidnosti specijalnih klasa operatorskih funkcija raspravlja se i u radovima [6], [7] i [8], a ovaj rad proširuje rezultate dobivene u njima.

Reprezentacija jedne klase operatora

Obeležimo sa S onaj podskup polja operatora M čiji elementi imaju sledeću osobinu: *Reći ćemo da operator* $a=\frac{f}{g}\in M, f, g\in\mathcal{C}, g\neq 0$, *pripada podskupu* S *ako* f *i* g *imaju apsolutno konvergentne Laplasove integrale u poluravni* $Re\ z>x_0\geqslant 0$, gde x_0 zavisi od f i g. Sa indukovanim operacijama iz polja M skup S je polje, a poznato je da je $S\neq M$ [2].

Neka je $a=\frac{f}{g}\in S$. *Funkciju kompleksne promenljive* $z=x+iy$.

$$\bar{a}(z)=\frac{f^*(z)}{g^*(z)}$$

gde je

$$f^*(z)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}dt \text{ i } g^*(z)=\int_0^\infty g(t)\,e^{-zt}dt$$

nazvaćemo tada Laplasovom transformacijom operatora a. Na taj način svakom operatoru $a\in S$ odgovara funkcija $\bar{a}(z)$ i mi tad pišemo $a\div\bar{a}(z)$. Obeležimo sa $\bar{S}$ sliku polja S pri transformaciji $\bar{a}\div\bar{a}(z)$; elementi skupa S su funkcije $\bar{a}(z)=\frac{f^*(z)}{g^*(z)}$. *Ditkin je dokazao da transformacijom* $a\div\bar{a}(z)$ *uspostavljen je izomorfizam između polja* S *i* $\bar{S}$ *u oznaci*

$$S\div\bar{S}\ [2].$$

Tako npr. ako su a i b kompleksni brojevi i $Re\, b>0$, $c\in R$, s operator diferenciranja u polju M i ${}_1F_1$ konfluentna hipergeometrijska Kumerova funkcija [1] [4] [3] pri izomorfizmu $S\dot{\div}\bar{S}$ operatoru $\frac{s^{a-b}}{(s-c)^a}=\left\{\frac{t^{b-1}}{\Gamma(b)^1}F_1(a,\, b;\, ct)\right\}$ odgovara funkcija $\frac{z^{a-b}}{(z-c)^a}$ (vidi npr [3] i [8]).

Lema. Neka su $\lambda\in R$, $o<\nu<1$ *i* $\Phi(\alpha,\ -\nu;\ z)$ *Wrightova funkcija* [9], *tada operator* $\frac{1}{(s^\nu+\lambda)^n}$, $n=1,\ 2,\dots,$ *ima reprezentaciju*

$$(1)\quad \frac{1}{(s^\nu+\lambda)^n}=s\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,\frac{x^n}{n!}\,{}_1F_1(n,n+1;-\lambda x)\,\frac{dx}{\nu x}\right\}$$

$$=st^\nu\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda x}\,\frac{dx}{\nu x}\right\}$$

$$=s\left\{\int_0^\infty \Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda x}\,dx\right\}.$$

Sem toga, važi sledeća relacija

$$(2)\quad \frac{1}{(s^\nu+\lambda)^n}=\frac{1}{\lambda^n}-s^\nu\left[\frac{1}{\lambda(s^\nu+\lambda)^n}+\frac{1}{\lambda^2(s^\nu+\lambda)^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\lambda^n(s^\nu+\lambda)}\right].$$

Dokaz. Obeležimo sa $G_n(t)$ funkciju definisanu na sledeći način

$$G_n(t)=\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,\frac{x^n}{n!}\,{}_1F_1(n,n+1;-\lambda x)\,\frac{dx}{\nu x}$$

Ovako definisana funkcija ima smisla za svako $n\in N$. To sledi iz ovih osobina Wrightove funkcije (vidi npr. [6]).

$$(\mathrm{A})\quad \left|\Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,\frac{t^\nu}{x}\right|\leqslant A(\nu),\ tx^{-1/\nu}\geqslant 0.$$

$$(\mathrm{B})\quad \Phi(0,-\nu;\ -xt^{-\nu})\sim\sqrt{a}\,t^{-\frac{\nu}{2(1-\nu)}}\,x^{-\frac{1}{2(1-\nu)}}\exp\left(-at^{-\frac{\nu}{1-\nu}}x^{\frac{1}{1-\nu}}\right),\ x\to\infty$$

gde je $a=(1-\nu)^{\frac{\nu}{1-\nu}}$

kao i osobina funkcije ${}_1F_1$ ([1] str. 266 i 268).

(C) Ako je $\lambda>0$ i $x\to\infty$, tada je

$${}_1F_1(n,\ n+1;\ -\lambda x)=ne^{-\lambda x}(-\lambda x)^{-1}\,[1+0\,(|\lambda x|^{-1})].$$

Ako je $\lambda<0$ i $x\to\infty$, tada je

$$ {}_1F_1(n,\ n+1;\ -\lambda x)=n!\,(\lambda x)^{-n}\,[1+0\,(|\lambda x|^{-1})] $$

(D) Ako je $k=(1-n)/2$ i ako je $k(-\lambda x)$ ograničeno, tada je

$$ {}_1F_1(n,n+1;-\lambda x)=n!\,[(-\lambda x)\,k]^{-n/2}e^{-\lambda x/2}\,\mathcal{J}_n(2\sqrt{k(-\lambda x)})+0\,(|k|^{-1}), $$

gde je $\mathcal{J}_n(x)$ Besselova funkcija n-tog reda.

Primenom matematičke indukcije dokazaćemo da reprezentacija (1) važi za svako $n\in N$. Proverimo najpre datu reprezentaciju za $n=1$, odnosno pokažimo da je

$$ (1+\lambda l^{\nu})\,G_1=l^{\nu-1} $$

gde je l operator integraljenja u polju M.
Kako je

$$ G_1=\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,x\,{}_1F_1(1,2;-\lambda x)\frac{dx}{\nu x}\right\} $$

$$ (3)\qquad =\left\{-x\,{}_1F_1(1,2;-\lambda x)\,\Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\Big|_{x=0}^{\infty}+\int_0^\infty e^{-\lambda x}\Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\,xd\right\} $$

$$ =l^{\nu}\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\,e^{-\lambda x}\frac{dx}{\nu x}\right\} $$

$$ =\left\{-1/\lambda\, e^{-\lambda x}\,\Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\Big|_{x=0}^{\infty}-1/\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{dx}{\nu x}\right\} $$

$$ =\frac{l}{\lambda}-\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{dx}{\nu x}\right\}, $$

to iz relacije (3) sledi da je

$$ \lambda l\,G_1=l^{\nu+1}-\left\{\int_0^\infty \Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\,e^{-\lambda x}\,dx\right\}\cdot $$

$$ =l^{\nu+1}-G_1 $$

Stoga je

$$ (1+\lambda l^{\nu})\,G_1=l^{\nu+1}, $$

odnosno reprezentacija (1) važi za $n=1$.

Pretpostavimo da reprezentacija (1) važi za $n=k$, odnosno da je

$$ (4)\quad (1+\lambda l^{\nu})^k\,G_k=l^{k\nu+1}\quad \text{ili}\quad G_k=\frac{l}{(s^{\nu}+\lambda)^k}\cdot $$

Tada je

$$G_{k+1}=\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,{}_1F_1(k+1,k+2;-\lambda x)\frac{dx}{\nu x}\right\}$$

$$=\left\{\frac{-x^{k+1}}{(k+1)!}\,{}_1F_1(k+1,k+2;-\lambda x)\,\Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\Big|_{x=0}^{\infty}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^k}{k!}\,dx\right\}$$

$$=l^\nu\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^k}{k!}\frac{dx}{\nu x}\right\},$$

pri čemu smo se koristili osobinom ([1] str. 242) da je

$$[x^{k+1}\,{}_1F_1(k+1,k+2;-\lambda x)]'=(k+1)\,x^k\,{}_1F_1(k+2,k+2;-\lambda x).$$
$$=(k+1)\,x^k\,e^{-\lambda x}.$$

Stoga je

$$\lambda l^\nu G_{k+1}=\left\{\lambda\int_0^\infty \Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,{}_1F_1(k+1,k+2;-\lambda x)\,dx\right\}$$

$$=\left\{\int_0^\infty \Phi(1,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^k}{(k+1)!}(k+1)\,[{}_1F_1(k,k+1;-\lambda x)-e^{-\lambda x}]\,dx\right\}$$

$$=l^\nu\left\{\int_0^\infty \Phi(0,-\nu;-xt^{-\nu})\frac{x^k}{k!}\,{}_1F_1(k,k+1;-\lambda x)\frac{dx}{\nu x}\right\}-G_{k+1}$$

$$=l^\nu\,G_k-G_{k+1}$$

ili

$$G_{k+1}\,(1+\lambda l^\nu)=l^\nu G_k$$

a na osnovu reprezentacije (4) tada je

$$G_{k+1}=\frac{l}{(s^\nu+\lambda)^{k+1}}.$$

Prema tome reprezentacija (1) važi za svako $k\in N$.

U dokazu drugog dela leme koristićemo se sledećom vezom ([1] str. 252)

$$\frac{z}{c}\,{}_1F_1(a+1,c+1;z)={}_1F_1(a+1,c,z)-{}_1F_1(a,c;z).$$

Stoga je

$$x\,{}_1F_1(n, n+1; -\lambda x)=\frac{n}{\lambda}\left({}_1F_1(n-1, n; -\lambda x)-e^{-\lambda x}\right)$$

$$x\,{}_1F_1(n-1, n; -\lambda x)=\frac{n-1}{\lambda}\left({}_1F_1(n-2, n-1; -\lambda x)-e^{-\lambda x}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x\,{}_1F_1(1, 2; -\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\left({}_1F_1(0,1; -\lambda x)-e^{-\lambda x}\right).$$

Koristeći zadnje relacije, a na osnovu dokazanog prvog dela leme zaključujemo da je

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{\lambda} G_{n-1}\, s^{\nu} - \frac{1}{\lambda} G_n. \\ &= \frac{1}{\lambda^2} G_{n-2} - s^{\nu}\left(\frac{1}{\lambda} G_n + \frac{1}{\lambda^2} G_{n-1}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= l\,\frac{1}{\lambda^n} - s^{\nu}\left(\frac{1}{\lambda} G_n + \frac{1}{\lambda^2} G_{n-1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^n} G_1\right), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Posledica leme. Na osnovu izomorfizma polja S i $\overline{S}$, $S \doteq \overline{S}$, i reprezentacije (1), analogno kao u [3], sledi:

Neka je a kompleksan broj takav da Re $a>0$ *i neka je* $0<\nu<1$. *Tada je operator* $\frac{1}{(s^{\nu}+\lambda)^a} \in S$ *moguće prikazati u obliku*

$$\frac{1}{(s^{\nu}+\lambda)^a} = s\left\{\int_0^{\infty} \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})\,\frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\,{}_1F_1(a, a+1; -\lambda x)\,\frac{dx}{\nu x}\right\}$$

$$= s\left\{\int_0^{\infty} \Phi(1, -\nu; -xt^{-\nu})\,\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\,e^{-\lambda x}\,dx\right\}.$$

Neprekidnost u tački jedne klase operatorskih funkcija

Neka je data klasa operatorskih funkcija oblika

$$Q_n(x)=\frac{1}{(\alpha(x)\,s^{\nu}+\beta(x))^n},\quad n\in N,\ 0<\nu<1, \tag{5}$$

gde su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ realne, numeričke neprekidne funkcije nad intervalom $I=[c, d]$. Neka $x_0 \in I$ i $\alpha(x_0)=0$, $\beta(x_0)\neq 0$. Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za neprekidnost u tački x_0 klase operatorskih funkcija (5).

Teorema. *Neka su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(i) $\alpha=\alpha(x)$ i $\beta=\beta(x)$ *jesu realne, neprekidne funkcije dok je* $x \in I$

(ii) $x_0 \in I$, x_0 *izolovana nula funkcije* $\alpha(x)$, $\alpha(x_0)=0$ $\beta(x_0)\neq 0$.

Potreban i dovoljan uslov da operatorske funkcije (5) *budu neprekidne u tački* $x=x_0$ *jeste da postoji okolina* V_0 *tačke* x_0 *u kojoj je* $\gamma(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}>0$, *dok* $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$.

Dokaz. *Uslov teoreme je dovoljan.*

Na osnovu relacije (2) operatorska funkcija (5) može se prikazati u obliku

$$Q_n(x)=\frac{1}{\beta^n}-\frac{\alpha}{\beta}s^\nu\left[\frac{1}{(\alpha s^\nu+\beta)^n}+\frac{1}{\beta(\alpha s^\nu+\beta^{n-1})}+\cdots+\frac{1}{\beta^{n-1}(\alpha s^\nu+\beta)}\right].$$

Ako postoji okolina tačke x_0, V_0 u kojoj je $\gamma(x)>0$ dok $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$, operatorska funkcija

$$Q_1(x)=\frac{1}{\alpha s^\nu+\beta}$$

neprekidna je u tački $x=x_0$ [6], a na osnovu zadnjeg razvoja operatorske funkcije (5) sledi: kad $x \to x_0$ i $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$, tada

$$Q_n(x) \to Q_n(x_0)=\frac{1}{\beta^n(x_0)}$$

odnosno $Q_n(x)$ je neprekidna funkcija u tački $x=x_0$.

Uslov teoreme je potreban.

Postoji zatvorena okolina $\overline{V}(x_0)$ u kojoj $\beta(x)$ ne menja znak i $\beta(x)\neq 0$. Za svaku drugu okolinu $V_n \subset \overline{V}(x_0)$ postojalo bi tada bar jedno $x_n \in V_n$ za koje je $\gamma(x_n)<0$. Međutim, kako po pretpostavci teoreme $|\gamma(x_n)|$ nije ograničeno kad $x \to x_0$, to bi tada $\gamma(x_n) \to -\infty$ kada $x_n \to x_0$. Wrightova funkcija ima osobinu da je za $0<x<\infty$, $t>0$, $\Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})>0$, te zato za svako $A>0$, i $A<C<B$ je

$$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\gamma x}\frac{dx}{\nu x} \geq \int_A^B \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\gamma x}\frac{dx}{\nu x}=$$

$$=\frac{C^{n-1}}{(n-1)!}e^{-C\gamma}\int_A^B \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})\frac{dx}{\nu x}.$$

Kada bi $Q_n(x)$ bila neprekidna u tački $x=x_0$, postojala bi tada $f \in \mathcal{C}$, $f \not\equiv 0$, tako da za $T \in R^+$ je $f\, Q_n(x) \in \mathcal{C}_{[0,T]X\{x_0\}}$ te bi tada i

$$f\left\{\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu})\, e^{-\gamma x} \frac{x^{n-1}\, dx}{(n-1)!\, \nu x}\right\}$$

bila ograničena funkcija za $0 \leqslant t \leqslant T$, $x=x_0$. Međutim, za $0<u<T$ je

$$\left|\int_0^T f(T-y)\left[\int_0^\infty e^{-\gamma x}\, \Phi(0, -\nu; -xy^{-\nu}) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dx}{\nu x}\right] dy\right| =$$

$$= \left|f(u)\int_0^T dy \int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -xy^{-\nu})\, e^{-\gamma x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dx}{\nu x}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|f(u)\right| \frac{C^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\gamma C} \int_0^T dy \int_A^B \Phi(0, -\nu; -xy^{-\nu}) \frac{dx}{\nu x},$$

a kako $\gamma \to -\infty$ kad $x_n \to x_0$ to predhodnim izrazom ne može biti tada predstavljena ograničena funkcija, odnosno, kad $x_n \to x_0$, $x_n \in V_n \setminus \{x_0\}$ tada za ma kako veliko N važi

$$\frac{C^{n-1}}{(n-1)!}\, |f(u)|\, e^{-\gamma C} \int_0^T dy \int_A^B \Phi(0, -\nu; -xy^{-\nu}) \frac{dx}{\nu x} > N.$$

Ovo bi stoga bilo u kontradikciji sa činjenicom da je $f\, Q_n(x)$ ograničena funkcija. Prema tome pretpostavka od koje smo pošli nije tačna, odnosno funkcija (5) je neprekidna u tački $x=x_0$ u smislu neprekidnosti u operatorskom računu [5].

LITERATURA

[1] Bateman, H., Erdélyi, A.,: *Higher transcendental functions*, Vol. 1, „Наука", Москва (1973).

[2] Диткин, В. А., Прудников, А П.,: *Операционное исчисление*, Москва ,,Высшая школа" (1975).

[3] Erdélyi, A.: *Operational calculus and generalized functions*, Holt Rinehart and Winston, New York (1962).

[4] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G.: *Tables of Integral transforms*, voll. Mc. G. H. New York (1954).

[5] Mikusinski, J.,: *Operational calculus*, Pergamon Press (1959).

[6] Despotović, D., Stanković, B.,: *Continuite d'une fonction operatoire*, Publ. Math. Inst. Beograd T. 7 (21), (1967) pp. 197—203.

[7] Nikolić-Despotović, D.: *The continuity of a class of operational functions*, Publ. Math. Ins. Beograd, T. 10 (24) p. 125—131 (1970).

[8] Nikolić-Despotović, D.: *Neprekidnost u tački jedne klase operatorskih funkcija*, Zbornik radova PMF Novi Sad, 5.(1975).

[9] Stanković, B.: *On the function of E. M. Wright*, Publ. Math. Inst. Beograd T. 10 (1970) p. 243—246.

Nikolić-Despotović Danica

THE REPRESENTATION AND THE PROPERTIES OF A CLASS OF OPERATORS

Summary

The field M of Mikusinski operators is the extension of the integral domain $\mathcal{C}$ [5]. In this paper, the two following basic problems are investigated in the field M.

(a) The representation of a class of operators in the field M.

(b) The continuity in the point of a class of operational functions in the sense of continuity in operational calculus [5].

As applications the following results were obtained.

Lemma. Let $\lambda \in R$, $0 < \nu < 1$, $\Phi(\alpha, -\nu; z)$ *be the function of E. M. Wright and* ${}_1F_1(n, n+1; z)$ *be the confluent hypergeometric function. Then the following representation is valued*

$$\frac{1}{(s^\nu+\lambda)^n} = s\left\{\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -xt^{-\nu}) \frac{x^n}{n!}\, {}_1F_1(n, n+1; -\lambda x) \frac{dx}{\nu x}\right\}$$

$$= s\left\{\int_0^\infty \Phi(1, -\nu; -xt^{-\nu}) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

where s *is a differential operator in* M.

Let us consider the class of operational functions of the following form

$$Q_n(x) = \frac{1}{(\alpha(x)\, s^\nu + \beta(x))^n} \quad n \in N \tag{1}$$

where $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ are numerical continuous functions on the interval $I = [c, d]$ and $x_0 \in I$, $\alpha(x_0) = 0$, $\beta(x_0) \neq 0$.

Theorem. *The necessary and sufficient condition for the operational function* (1) *to be continuous in the point* $x = x_0$, *is the existence of a neighbourhood* $V_0(x_0)$ *in which*

$$\gamma = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} > 0, \text{ while } x \in V_0 \setminus \{x_0\}.$$