Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 6 (1976)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 6 (1976)

Endre Pap

UNIFORMNA OGRANIČENOST FAMILIJE f-PREBROJIVO ADITIVNIH VIŠEZNAČNIH SKUPOVNIH FUNKCIJA SA VREDNOSTIMA U POLUGRUPI*

Abstrakt. U ovom radu se pomoću Dijagonalne teoreme izvodi važna teorema tipa Nikodyma o uniformnoj ograničenosti specijalnih višeznačnih skupovnih funkcija.

1. Uvod

Današnja strujanja u matematičkoj analizi sve se više približavaju strukturi polugrupe. Teoriju mere sa vrednostima u specijalnoj topološkoj polugrupi razvio je M. Sion [14], a nekih rezultata u tom pravcu ima i u radu P. Antosika [2]. L. Berg [3] uočava da se klasična analiza sa svojim pojmovima: skupovi, funkcije, granične vrednosti, neprekidnost, redovi, integrali, i, s druge strane, funkcionalna analiza (u širem smislu) sa svojim pojmovima: rastojanje, funkcionela, mera, distribucije, operatori, mogu objediniti polugrupom obogaćenom sa još nekom strukturom. Polugrupe su i ranije imale veliku primenu u funkcionalnoj analizi — E. Hille, P. Phillips [7], ali to je uglavnom analitička teorija polugrupa, vezana za operatore nad Banachovim prostorom.

Teorija skupovnih funkcija podstaknuta potrebama teorije mere i integrala razvila se danas u samostalnu matematičku disciplinu. Uopšte, pod skupovnom funkcijom podrazumevamo funkciju definisanu nad nekom familijom $\mathscr{H}$ podskupova datog skupa H a sa vrednostima u nekoj topološko-algebarskoj strukturi A. Današnja stremljenja idu kako ka generalizaciji strukture A i familije $\mathscr{H}$, tako i uzimanju što šire familije $\mathscr{M}$ skupovnih funkcija. Tako skupovne funkcije mogu imati za skup vrednosti: ne-negativne realne brojeve, realne brojeve, prošireni skup realnih brojeva (sa $+\infty$ ili $-\infty$), kompleksne brojeve, Banachov prostor (N. Dunford, J. Schwartz [6]), normirani vektorski prostor, lokalno konveksni vektorsko topološki prostor, grupu sa normom (J. Mikusiński [10], L. Drewnowski [4], [5]), topološku komutativnu grupu (P. Antosik [2]), semi-topološku grupu i polugrupu (P. Antosik [2]), komutativnu Hausdorffovu normalnu topološku polugrupu (M. Sion [14]), parcijalno uređenu komutativnu polugrupu (L. Berg [3]).

U ovom radu ćemo dokazati teoremu tipa Nikodyma o uniformnoj ograničenosti za specijalne višeznačne skupovne funkcije sa vrednostima u polugrupi sa uopštenom kvazi-normom. Osnovno sredstvo u dokazu će nam biti Dijagonalna teorema (v. [12]).

---

* Rad rađen u Matematičkom institutu, Beograd.

2. Uopštena kvazi-norma nad polugrupom

U ovom paragrafu ćemo definisati funkciju koja predstavlja uopštenje funkcionele iz rada [12].

Neka je $(X, *)$ polugrupa, a $(G, +)$ komutativna totalno uređena grupa. Apsolutna vrednost $|a|$ za elemenat $a \in G$ definisana je sa

$$|a| = \max(a, -a).$$

Definicija 1. *Funkcija* $f: X \to G$ *za koju važi*

$$(U_1) \quad f(x*y) \leqslant f(x)+f(y);$$

$$(U_2) \quad f(x*y) \geqslant |f(x)-f(y)|$$

za sve $x, y \in X$, *je uopštena kvazi-norma nad* X.

Uslovi (U_1) i (U_2) su nezavisni (primeri iz rada [12]). Očigledno je funkcionela iz rada [12] specijalan slučaj uopštene kvazi-norme (kada je G aditivna grupa realnih brojeva).

Uopštena kvazi-norma je „ne-negativna", tj. $f(x) \geqslant 0$ za sve $x \in X$, gde je 0 neutralni elemenat iz G. Dokaz je isti kao u [12].

Uočićemo još neke važne osobine uopštene kvazi-norme.

Primedba 1. Ako je X polugrupa sa neutralnim elementom e, tada se u definiciji 1 može dodati uslov

$$(U_3) \quad f(e)=0.$$

Primetićemo da se uslovi (N_k) $k=1, 2, 3$ iz rada P. Antosika [1] nad abelovom grupom, mogu proširiti na funkcije sa vrednostima u komutativnoj totalno uređenoj grupi. Tada su aksiomi (U_i) $i=1, 2, 3$ i (N_k) $k=1, 2, 3$ ekvivalentni nad abelovom grupom (dokaz isti kao u radu [12]).

Uvodimo uređajnu konvergenciju nizova u G (B. Z. Vulih [15]).

Definicija 2. *Niz* $\{x_n\}$ *elemenata iz totalno uređene grupe* G *uređajno je konvergentan sa granicom* $x \in G$, *u oznaci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *ako postoje dva monotona niza elemenata iz* G *opadajući* $\{z_n\}$ *i rastući* $\{y_n\}$, *takvi da je*

1) $$x = \inf_{n \in N} y_n = \sup_{n \in N} z_n,$$

2) $$z_n \leqslant x_n \leqslant y_n \quad za \ n=1, 2, \ldots .$$

Osobine uređajne konvergencije nizova mogu se naći npr. u monografiji B. Z. Vuliha [15], str. 38–45.

Definišemo sada funkciju $d: X \times X \to G$ na sledeći način

$$(1) \qquad d(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad \text{za } x, y \in X.$$

Funkcija d je pseudometrika (Đ. Kurepa [9]).

Definicija 3. *Niz* $\{x_n\} \subset X$ *konvergira ka elementu* $x \in X$ *ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$, *u oznaci* $d\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Očigledno, da granica iz definicije 3 u opštem slučaju nije jedinstvena. Ona je jedinstvena onda i samo onda ako je funkcija f injektivna.

3. Relacija ekvivalencije nas polugrupom

Nad polugrupom X definišemo relaciju ekvivalencije

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x)-f(y)=0.$$

Relacija $\sim$ je saglasna sa konvergencijom nizova — definicija 3, tj. za dva niza $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \subset X$ takva da je $x_n \sim x'_n$ za $n \in N$ uvek važi $x \sim x'$, gde je $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, x')=0$. Naime, neka niz $\{x_n\}$ konvergira ka $x \in X$, tada je očigledno svaki elemenat $x' \in X$, za koji važi $x' \sim x$, granica niza $\{x'_n\}$. Pokazaćemo da niz $\{x'_n\}$ ne može konvergirati ka elementu $y \in X$ koji nije u relaciji $\sim$ sa x. Po pretpostavci je

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)-f(x)|=0$$

i

$$\lim_{n\to\infty} |f(x'_n)-f(y)|=0.$$

No tada je (L. Fuchs [8], str. 30)

$$\lim_{n\to\infty} (|f(x_n)-f(x)|+|f(x'_n)-f(y)|)=0. \tag{2}$$

Kako je uvek

$$|f(x_n)-f(x)|+|f(x'_n)-f(y)| \geqslant |f(x)-f(y)|,$$

to na osnovu (2) sledi, zbog očuvanja relacije $\leqslant$ pri graničnom prilazu (B. Z. Vulih [15], str. 39), da je $f(x)=f(y)$, tj. $x \sim y$.

U opštem slučaju relacija $\sim$ nije saglasna sa operacijom $*$ u polugrupi X (primer $(Z,+)$ sa apsolutnom vrednošću). Zato ćemo se ubuduće ograničiti samo na one slučajeve za koje je relacija $\sim$ saglasna sa operacijom $*$, tj. iz $x_1 \sim x'_1$ i $x_2 \sim x'_2$ za $x_1, x'_1, x_2, x'_2 \in X$ sledi $x_1 * x_2 \sim x'_1 * x'_2$.

Klase ekvivalencije ćemo obeležavati njihovim predstavnicima.

Sada možemo govoriti o jedinstvenoj granici u opštijem smislu, tj. kada niz $\{x_n\} \subset X$ konvergira ka elementu $x \in X$ po definiciji 3, tada mislimo da niz klasa ekvivalencije $\{x_n\} \subset X/\sim$ konvergira ka jednoj klasi ekvivalencije $x \in X/\sim$. U slučaju da je funkcija f injektivna, klase ekvivalencije se svode na elemente skupa X.

U polugrupu X možemo uvesti i pojam konvergentnog reda (za slučaj saglasnosti relacije $\sim$ i operacije $*$) na sledeći način: Neka $x_j \in X$ ($j \in N$). Ako je za neki elemenat $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathop{*}_{j=1}^{n} x_j, x)=0,$$

tada kažemo da je granica niza $\{\mathop{*}_{j=1}^{n} x_j\}$ konvergentan red sa „sumom" x (koja nije u opštem slučaju jednoznačno određena). Prenesemo li sve u količnik polugrupu $X/_\sim$, dobijamo definiciju konvergentnog reda kao granicu niza klasa ekvivalencija $\{\mathop{*}_{j=1}^{n} x_j\}$ sa jedinstvenom „sumom" — klasom ekvivalencije x.

4. Dijagonalna teorema

U ovom paragrafu ćemo, zahvaljujući dosadašnjim razmatranjima, dati jednu generalizaciju Dijagonalne teoreme iz rada [12]. Nad G postoji antistepenovanje γ_2 reda 2 (primedba 2).

Dijagonalna teorema. *Neka* $x_{ij} \in X/_\sim$ $(i, j \in N)$ *i* za $f(y)=0$ je $d-\lim_{j\to\infty} x_{ij}=y$ *za* $i=1, 2, \ldots$ *i postoji*

$$f(\mathop{*}_{j\in K} x_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(\mathop{*}_{s=1}^{n} x_{ij_s})$$

za svako $i \in N$ *i svaki skup* $K \subset N$, *gde je* $\{j_s\}$ *rastući niz svih elemenata iz* K. *Tada postoji beskonačan skup* $I \subset N$ *i njegov podskup* J (*konačan ili beskonačan*) *takvi da za sve* $i \in I$ *važi*

$$f(\mathop{*}_{j\in J} x_{ij}) \geqslant \gamma_2 (f(x_{ii})).$$

Primedba 2. U prethodnoj Dijagonalnoj teoremi pretpostavljeno je da nad G postoji funkcija antistepenovanja γ_2 reda 2, tj. funkcije γ_2: $G \to G$ za koju važi:

$$(A_1)\ \gamma_2(a+b)=\gamma_2(a)+\gamma_2(b) \text{ za sve } a, b \in G;$$

$$(A_2)\ \gamma_2(a+a)=a \text{ za sve } a \in G.$$

U vezi antistepenovanja (v. [13]).

Primedba 3. U slučaju da je $(G, +)$ aditivna grupa realnih brojeva, prethodna Dijagonalna teorema se svodi na Dijagonalnu teoremu I iz rada [12]. Ako osim prethodnog važi i da je $(X, *)$ abelova grupa, dobijamo Dijagonalnu teoremu P. Antosika [1].

Dokaz Dijagonalne teoreme. Možemo pretpostaviti ako postoji konačan skup J takav da je

$$f(\mathop{*}_{j\in J} x_{ij}) \geqslant \gamma_2 (f(x_{ii}))$$

za svako $i \in J$, tada postoji pozitivan ceo broj r veći od svakog elementa iz J da je

$$f(\underset{j \in J}{*} x_{ij}) < \gamma_2 (f(x_{ii}))$$

za $i > r$. U suprotnom slučaju teorema je trivijalno zadovoljena. Na osnovu ove dodatne pretpostavke, odabiramo niz $i_1, i_2, \ldots$ prirodnih brojeva i konstruišemo niz $b_1, b_2, \ldots$ pozitivnih elemenata iz G tako da je

$$f(\overset{n=1}{\underset{k=1}{*}} x_{i_n i_k}) = \gamma_2 (f(x_{i_n i_n})) + (-b_n) \text{ i}$$

$$f(x_{i_n i_{n+q}}) < \gamma_2^q (b_n)$$

za ma koje $n, q \in N$, a γ_2^q označava q-trostruku uzastopnu kompoziciju γ_2.

Na osnovu prethodnog i nejednakosti

$$\sum_{k=n+1}^{p} f(x_{i_n i_k}) < b_n - \gamma_2^p (\mathrm{b}_n) \text{ za } p \geq i_n$$

dolazimo do nejednakosti

$$f(\overset{p}{\underset{k=1}{*}} x_{i_n i_k}) > \gamma_2 (f(x_{i_n i_n})) \quad \text{za } p \in N.$$

Priđemo li granici za $p \to \infty$, dobijamo tvrđenje teoreme za $J = I = \{i_1, i_2, \ldots\}$.

5. Uniformna ograničenost

Neka je R σ-prsten skupova, tj. za svaki niz $\{A_n\} \subset R$ važi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R$ i $A \setminus B \in R$ za $A, B \in R$.

Posmatraćemo višeznačne skupovne funkcije μ: $R \to X/_{\sim}$ (za slučaj saglasnosti relacije $\sim$ i operacije $*$). Funkcija μ je *aditivna* ako je

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) * \mu(B) \text{ (skupovna jednakost)}$$

za $A \cap B = \varnothing$ i $A, B \in R$.

Funkcija μ je *f-prebrojivo aditivna* ako za svaki disjunktan niz $\{E_n\} \subset R$ ($E_n \cap E_m = \varnothing$ za sve $n, m \in N$ i $n \neq m$) važi

$$\lim_{k \to \infty} f(\overset{k}{\underset{n=1}{*}} \mu(E_n)) = f(\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)).$$

Funkcija μ je *f-ekshaustivna* ako je

$$\lim_{n \to \infty} f(\mu(E_n)) = 0,$$

za svaki disjunktan niz $\{E_n\} \subset R$.

Sa $\mathcal{F}_0$ označićemo familiju svih aditivnih f-prebrojivo aditivnih f-ekshaustivnih višeznačnih skupovnih funkcija iz σ-prstena R u količnik polugrupu $X/\sim$. Neka u G postoji antistepenovanje reda 2.

Sada možemo formulisati glavni rezultat.

Teorema. *Neka je $\mathcal{F}$ podfamilija familije $\mathcal{F}_0$ takva da za neko $g \in G$ ($g > 0$) postoji $k_E \in N$ za svako $E \in R$ tako da je*

$$f(\mu(E)) < k_E\, g \quad za\ \mu \in \mathcal{F}\ (k_E\, g = \underbrace{g + \ldots + g}_{k_E}).$$

Tada postoji $r \in N$ takvo da je

$$f(\mu(E)) < r\, g \quad za\ \mu \in \mathcal{F} \text{ i } E \in R.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno od tvrdenja teoreme. Neka je Γ_j kolekcija svih $E \in R$ takvih da je

$$f(\mu(E)) > 2^j g \text{ za } \mu \in \mathcal{F}.$$

Kolekcije Γ_j zadovoljavaju uslove leme Mikusinskog.

Lema (J. Mikusiński [10])*. *Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ neprazne kolekcije nepraznih skupova, koji pripadaju prstenu skupova Σ, takve da ako je skup iz Γ_{j+1} unija dva disjunktna skupa, koji pripadaju Σ, tada bar jedan od njih pripada Γ_j. Tada postoji, ili*

1) *podniz $\{\Gamma_{mj}\}$ iz kojeg se mogu izvaditi skupovi $E_j \in \Gamma_{mj}$ koji su svi disjunktni, ili*

2) *podniz $\{\Gamma_{nj}\}$ iz kojeg se mogu izvaditi skupovi $E_j \in \Gamma_{nj}$ takvi da je $E_{j+1} \subset E_j$.*

Može se pokazati da u oba slučaja leme postoji disjunktan niz $\{E_j\} \subset R$ i niz $\{\mu_i\} \subset \mathcal{F}$ tako da je:

$$f(\mu_j(E_j)) > j\, g \quad \text{za} \quad j \in N.$$

Uzimamo da je $x_{ij} = \mu_i(E_j)$. Kako je $\{\mu_i\} \subset \mathcal{F}_0$, to su zadovoljeni svi uslovi za Dijagonalnu teoremu. Zato postoji beskonačan skup $I \subset N$ i njegov podskup $J \subset I$ takvi da je za sve $i \in I$

$$f(\mu_i(\bigcup_{j \in J} E_j)) \geqslant \gamma_2(f(\mu_i(E_i)).$$

Na osnovu posledice leme Mikusińskog dobijamo dalje

$$f(\mu_i(E)) > \gamma_2(i\, g) \quad \text{za} \quad i \in I,$$

gde smo stavili $\bigcup_{j \in J} E_j = E \in R$. Uzimajući da je

$$i' = \begin{cases} i, \text{ ako je } i \text{ parno} \\ i-1, \text{ ako je } i \text{ neparno,} \end{cases}$$

* U originalu je Σ algebra skupova.

dolazimo do relacije

$$f(\mu_i(E)) > \frac{i'}{2} g \qquad \text{za sve } i \in I,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme da je $\{\mu_i\} \subset \mathcal{F}$. To znači da bar jedna kolekcija Γ_i mora biti prazna. Time je završen dokaz teoreme.

Primedba 4. U slučaju da su funkcije $\mu: R \to X/\sim$ i f: $X \to P$ surjekcije, gde je $P = \{g \mid g \in G, g \geqslant 0\}$, tada se uslov f-prebrojive aditivnosti može oslabiti, dovoljna je egzistencija

$$\lim_{k \to \infty} f(\overset{k}{\underset{n=1}{*}} \mu(E_n))$$

za svaki disjunktan niz $\{E_n\} \subset R$.

Drago mi je što se na kraju mogu zahvaliti akademiku prof. dr Bogoljubu Stankoviću na korisnim savetima.

LITERATURA

[1] P. Antosik, *On the Mikusiński Diagonal Theorem*, Bull, Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 19 (1971), 305–310.

[2] P. Antosik, *The Uniform Approach to Nikodym and Witali-Hahn-Saks Type Theorems*, Studia math. (u štampi).

[3] L. Berg, *Analysis in geordneten, kommutativen Halbgruppen mit Nullelement* (proširenje predavanja održanog u Akademiji DDR), 1974.

[4] L. Drewnowski, *Topological rings of sets, Continuous set functions, Integrations, I, II, III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 20 (1972), 269–285, 439–445.

[5] L. Drewnowski, *Uniform boundedness principle for finitely additive vector measures*, ibid., 21 (1973), 115–118.

[6] N. Dunford, J. Schwartz, *Линейные операторы I*, Москва, 1962.

[7] E. Hille, E. S. Phillips, *Функциональный анализ и полугруппы*, Москва, 1962.

[8] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, 1963.

[9] Đ. Kurepa, *Tableau ramifiés d'ensembles, Espaces pseudodistanciés*, C. R. 198 (1938), 1563–1565.

[10] J. Mikusiński, *On a theorem of Nikodym on bounded measure*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 19 (1971), 441–443.

[11] E. Pap, *O Dijagonalnoj teoremi*, Mat. ves. 10 (25) (1973), 391–399.

[12] E. Pap, *A generalization of the Diagonal theorem on a block-matrix*, Mat. ves. 11 (26) (1974), 66–71.

[13] E. Pap, *n-convex functions on a semigroup with a root function*, Zbornik radova PMF br. 6, 1976.

[14] M. Sion, *A Theory of Semigroup Walued Measures*, Springer-Verlag, 1973

[15] Б. З. Вулих, *Введение в теорию полуупорядоченных проетранств*, Москва, 1961.

Endre Pap

UNIFORM BOUNDEDNESS OF A FAMILY OF f-COUNTABLE ADDITIVE MULTIVALUED SET FUNCTIONS WITH VALUES IN A SEMIGROUP

Summary

Let $(X, \star)$ be a semigroup and $(G, +)$ a commutative fully ordered group. The absolute $|a|$ of an element $a \in G$ is defined as $|a| = \max(a, -a)$.

Definition 1. The function $f: X \to G$ with the following properties

$$(U_1)\quad f(x*y) \leqslant f(x) + f(y);$$

$$(U_2)\quad f(x*y) \geqslant |f(x) - f(y)|$$

for all $x, y \in X$ is called a general quasi-norm on X.

The convergence of sequences in X is induced by the function

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad (d\text{— lim})$$

(definition 3) using the convergence of sequences in G (definition 2).

Next we suppose that on G there exists a root function γ_2, i. e., $\gamma_2: G \to G$ and hold that

$$(A_1)\quad \gamma_2(a+b) = \gamma_2(a) + \gamma_2(b)$$

$$(A_2)\quad \gamma_2(a+a) = a$$

for all $a, b \in G$.

We define an equivalence relation on X

$$x \sim y \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) - f(y) = 0$$

Diagonal theorem. Let $x_{ij} \in X/_\sim (i, j \in N)$ and $d\text{—}\lim\limits_{n\to\infty} x_{ij} = y$, $f(y) = 0$, for $i = 1, 2, \ldots$ and there exists

$$f(\underset{j \in K}{*} x_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} x_{ij_s})$$

for each $i \in N$ and each $K \subset N$, where $\{j_s\}$ is the increasing sequence of all elements of K. Then there exist an infinite set $I \subset N$ and a subset J (finite or infinite) such that, for all $i \in I$, we have

$$f(\underset{j \in J}{*} x_{ij}) \geqslant \gamma_2(f(x_{ii})).$$

Let R be a σ-ring of sets. A multivalued set function $\mu: R \to X/_\sim$ is a member of the family $\mathcal{F}_0$ if it satisfies

1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) * \mu(B)$ (set equality) for $A \cap B = \varnothing$ and $A, B \in R$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f(\overset{k}{\underset{n=1}{*}} \mu(E_n)) = f(\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n))$

for each disjoint sequence $\{E_n\} \subset R$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mu(E_n)) = 0$ for each disjoint sequence $\{E_n\} \subset R$.

Theorem. Let $\mathcal{F}$ be a subfamily of the family $\mathcal{F}_0$ such that for some $g \in G$ $(g > 0)$ there exist $k_E \in N$ for all $E \in R$ such that

$$f(\mu(E)) < k_E g \quad \text{for} \quad \mu \in \mathcal{F}$$

$(k_E g = \underbrace{g + \ldots + g}_{k_E})$.

Then there exists $r \in N$ such that

$$f(\mu(E)) < r g \quad \text{for} \quad \mu \in \mathcal{F} \quad \text{and} \quad E \in R.$$