Zbornik radova Prirodno-Matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 6 (1976)
Reiview of Research Faculty of Science—University of Novi Sad, Volume 6 (1976)

B. Stanković

MAJORACIJA KOEFICIENATA TAJLOROVOG REDA KANONIČNOG ELEMENTA ALGEBARSKE FUNKCIJE

Posmatraćemo polinom po kompleksnim promenljivim u i z:

$$F(z,u) \equiv \sum_{k=0}^{n} P_k(z)\, u^k \equiv \sum_{j=0}^{m} Q_j(u)\, z^j, \tag{1}$$

gde su $P_k(z)$ polinomi po z, a $Q_j(u)$ polinomi po u. Naša osnovna pretpostavka je da je $F(z, u)$ nerazloživ polinom, tj. da se ne može napisati kao proizvod dva netrivijalna polinoma po u i z.

Obeležićemo sa $D(z)$ polinom koji se dobiva eliminacijom promenljive u iz jednačina:

$$F(z,u)=0 \qquad \frac{\partial F(z,u)}{\partial u}=0. \tag{2}$$

Skupovi S_1, S_2, S_3 i S su: $S_1 \equiv \{z, P_n(z)=0\}$, $S_2 \equiv \{z, D(z)=0\}$, $S_3 \equiv \equiv \{z, P_o(z)=0\}$ i $S=S_1 \cup S_2$.

Tačke iz S_2 su tačke grananja potpune analitičke funkcije definisane sa:

$$F(z,u) \equiv \sum_{k=0}^{n} P_k(z)\, u^k = 0, \tag{3}$$

a u okolini tačaka iz S_1 jedna ili više grana ove funkcije ne ostaje ograničena. U okolini svake tačke $z=a \notin S$ jednačina (3) ima n-različitih korena, pa time i n kanoničkih elemenata sa centrom kruga konvergencije u a. Neka je (K, g) kanonički elemenat tako odabran da je $g(a)=b \neq 0$ i $F(a, b)=0$. Za poluprečnik ρ kruga konvergencije K znamo da je $\rho \geqslant \min |a-z|$, $z \in S$.

Naš cilj je da dobijemo što bolju majoraciju koeficienata Tajlorovog reda za g. Potreba za takvom majoracijom javlja se pri korišćenju operatora J. Mikusinjskog [3] za približna rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Uvešćemo pojmove sa kojima ćemo se koristiti.

Neka, je $f(z)$ regularna funkcija u otvorenom skupu D i neka je $n(u) \equiv \equiv n(u, D, f)$ broj rešenja jednačine $f(z)=u$ koja leže u D. D. C. Spencer [4] je uveo površinski srednje p-valentnu funkciju u D (areally mean p-valent). To je regularna funkcija u D za koju je:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R n(re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta \leqslant pR^2, \quad 0<R.$$

M. Biernacki [1] sužava prethodnu klasu funkcija i uvodi kružno srednje p-valentne funkcije u D (circumferentially mean p-valent). To su funkcije koje su regularne u D i za koje

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\theta})\, d\theta \leqslant p, \quad R>0.$$

Primetimo da ako je za svaku konačnu vrednost u $n(u, D, f) \leqslant m$, tada je po obe definicije za p-valentnost $p \leqslant m$. Takav je slučaj za svaki kanonički elemenat definisan jednačinom (3).

U knjizi W. K. Hayman-a [2] može se naći sledeća teorema:

Teorema A. *Pretpostavimo da je* $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *površinski srednje* p*-valentna u krugu* $|z|<1$ *i da je* $M(r,f)\equiv \underset{|z|=r}{Max}|f(z)| \leqslant C(1-r)^{-\alpha}$, $0<r<1$, $C>0$, $\alpha>\frac{1}{2}$. *Tada je:* $|a_n| \leqslant A(p,\alpha)\, C\, n^{\alpha-1}$, $n\geqslant 1$.

Glavna teškoća u korišćenju ove teoreme je u tome što se za $A(p,\alpha)$ zna samo da je to konstanta koja zavisi od p i α i što o našoj funkciji g znamo jedino da definiše kanonički elemenat potpune analitičke funkcije definisane relacijom (3). Ne verujemo da se preko korišćenog dokaza ove teoreme može dobiti povoljna procena za $A(p,\alpha)$. Zato ćemo u ovome radu primeniti drugi prilaz proceni koeficienta a_n.

Tvrđenje. *Neka je* (K, g) *kanonički elemenat koji zadovoljava jednačinu* (3) *sa centrom u tački* $a \notin S_3$. *Neka je* $\rho = min\, |a-z|$, $z \in S \cup S_3$. *Tada za koeficienat* a_n *Tajlorovog reda kanoničkog elementa* (K, g) *važi:*

$$|a_n| \leqslant \frac{4}{\rho n} e^2 \left(1-\frac{2}{n+k+1}\right)^{k-1} (n+k)^{2m-1} |a_0|, \quad k\geqslant 0, \; n+k\geqslant 4.$$

U dokazu ovoga tvrđenja koristićemo se sledećim poznatim rezultatima:

Teorema B. ([2] *strana* 95) *Ako je* $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *kružno srednje* p*-valentna i* $f(z)\neq 0$ *za* $|z|<1$, *tada je:*

$$|f(z)| \leqslant |a_0|\, (1+r)^{2p}/(1-r)^{2p}, \quad |z|=r, \; 0<r<1.$$

Teorema C. *Neka je* $f(z)$ *površinski srednje* p*-valentna* u $|z|$ i $0<\lambda\leqslant 2$, *tada je:*

$$I_\lambda(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda\, d\theta$$

$$\leqslant M(r_0,f)^\lambda + p\lambda \int_{r_0}^{r} \frac{M(t,f)^\lambda}{t}\, dt, \quad 0<r_0<r<1,$$

(vidi [2] strana 45).

Pored ova dva rezultata koristićemo se i lemom koju ćemo dokazati:

Lema. Neka je $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *kružno srednje p-valentna funkcija i različita od nule u krugu* $|z|<1$, *tada je:*

$$|a_n| \leqslant 4\, e^2 \left(1-\frac{2}{n+k+1}\right)^{k-1} (n+k)^{2m-1}\, |a_0|, \quad k\geqslant 0, \quad n+k\geqslant 4.$$

Dokaz leme. — Iskoristimo navedene teoreme B i C i činjenicu: ako je funkcija kružno srednje p-valentna, tada je i površinski srednje p-valentna.

$$I(r,f) \leqslant M(r_0,f) + p\int_{r_0}^{r} \frac{M(t,f)}{t}\, dt$$

$$\leqslant |a_0| \left[\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^{2p} + \frac{p}{r_0}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2p} dt\right]$$

$$\leqslant |a_0| \left[\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^{2p} + \frac{2p}{r_0}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2p-2} \frac{2\,dt}{(1-t)^2}\right]$$

$$\leqslant |a_0| \left[\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^{2p}\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}-\frac{2p}{r_0(2p-1)}\right) + \frac{2p}{r_0(2p-1)}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2p-1}\right].$$

Ako izaberemo $r_0=\dfrac{59}{100}$, tada je $[(1+r_0)\,/\,(1-r_0)-2p/r_0\,(2p-1)]>0$, pa se $(1+r_0)/(1-r_0)$ može majorirati sa $(1+r)/(1-r)$ i tada je:

$$I(r,f) \leqslant 4|a_0| \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2p-1}.$$

Odaberimo $r=\dfrac{n+k-1}{n+k+1} \geqslant \dfrac{3}{5} > \dfrac{59}{100}$, jer je po pretpostavci $n+k\geqslant 4$. Sada je $\dfrac{1+r}{1-r}=n+k$ i $r^{-n}=r^{k-1}\left(1+\dfrac{2}{n+k-1}\right)^{n+k-1} \leqslant e^2\left(1-\dfrac{2}{n+k+1}\right)^{k-1}.$

Sada je lako dobiti majoraciju Tajlorovog koeficienta

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi_i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{1}{r^n}\, I(r,f).$$

Iz prethodnih nejednačina sledi:

$$|a_n| \leqslant 4e^2 \left(1 - \frac{2}{n+k+1}\right)^{k-1} (n+k)^{2m-1} |a_0|, \quad k \geqslant 0, \quad n+k \geqslant 4.$$

Dokaz tvrđenja. — Pretpostavili smo da je za odabrani kanonički elemenat (K, g) centar $a \notin S_3$. To se poluprečnik ρ može tako smanjiti da je $g(z) \neq 0$, $|z-a|<\rho \cdot \rho$ se može odrediti iz uslova $\rho \geqslant \min |a-z|$, $z \in S \cup S_3$, jer ako je $g(z_o)=0$, tada mora biti i $P_o(z_o)=0$.

Koristeći se transformacijom $\zeta = (z-a)/\rho$, tačka $z=a$ prelazi u $\zeta=0$, a krug $|z-a|<\rho$ u krug $|\zeta|<1$. Isto tako je i $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n \rho^n \zeta^n = G(\zeta)$. Funkcija $G(\zeta)$ zadovoljava uslove leme pa je:

$$|a_n \rho^n| \leqslant 4 e^2 \left(1 - \frac{2}{n+k+1}\right)^{k-1} (n+k)^{2m-1} |a_0|, \quad k \geqslant 0, \quad n+k \geqslant 4.$$

Iz ove nejednačine sledi i naše tvrđenje.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Biernacki, M. *Sur les fonctions en moyenne multivalentes,* Bull. Sci. Math. (2) 70 (1946) 51–76.

[2] Hayman, W. K. *Multivalent functions,* Cambridge University Press (1958).

[3] Mikusinski, J. *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles,* Studia Math. XII (1951), 227–270.

[4] Spencer, D. C. *On finitely mean valent functions,* Proc. Lond. Math. Soc. (2) 47 (1941), 201–211.

B. Stanković

ESTIMATE OF THE TAYLOR SERIES COEFFICIENTS OF A CANONICAL ELEMENT OF THE ALGEBRAIC FUNCTION

Abstract

We proved the following proposition which is prepared to be used in the construction of approximate solutions to a differential equation in the field of Mikusinski operators.

PROPOSITION. *Let* (K, g) *be a canonical element which satisfies the equation* (3), *with its centre in the point* $a \notin S_3$. *We suppose that the radius* ρ *of the circle* K *is:* $\rho = \min |z-a|$, $z \in S \cup S_3$, *then for the Taylor series coefficients* a_n *of the canonical element* (K, g) *we have:*

$$|a_n| \leqslant \frac{4}{\rho n} e^2 \left(1 - \frac{2}{n+k+1}\right)^{k-1} (n+k)^{2m-1} |a_0|, \quad k \geqslant 0, \quad n+k \geqslant 4.$$

The sets S_1, S_2, S_3 and S are defined in the following way: $S_1 \equiv \{z, P_n(z)=0$, $S_2 \equiv \{z, D(z)=0\}$, $S_3 \equiv \{z, P_0(z)=0\}$ i $S \equiv S_1 \cup S_2$. $D(z)$ is the polynomial obtained from equations (2).