Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 5 (1975)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 5 (1975)

Bogoljub Stanković

O JEDNOJ KLASI OPERATORA

Uvod

U polju operatora J. Mikusinjskog [2] snabdevenom strukturom konvergentne klase ([2], str. 144.) važnu ulogu igraju redovi oblika:

(1) $$\sum_{k\geqq 0} \frac{(-\lambda)^k}{k!} s^{\alpha k}, \quad 0<\alpha<1,$$

gde je λ kompleksan broj, a s operator diferenciranja. Takav red definiše eksponencijalni operator $exp\ (-\lambda s^\alpha)$ koji se javlja pri rešavanju numeričkih parcijalnih diferencijalnih jednačina pomoću operatora J. Mikusinjskog ([2], str. 439—453.).

Dva se osnovna problema postavljaju za ovaj red: Za koje λ on konvergira i kada predstavlja elemenat iz $\mathscr{C}$. Ova dva pitanja su u literaturi odvojeno raspravljana, raznim metodama. Konvergencija je raspravljana za širu klasu redova (vidi [1], [3] i [4]) i ti se rezultati mogu primeniti i na red (1). Kada je redom (1) definisan elemenat iz $\mathscr{C}$, pokazao je J. Mikusinjski ([2], str. 400—404.). Naš. cilj je da u kratkom dokazu damo odgovor istovremeno na oba pitanja. Ovaj dokaz može biti, pored navedenog, interesantan kada se ne želi ulaziti u opštu teoriju redova, već samo ograničiti na redove oblika (1).

Da bi smo olakšali čitanje, izložićemo obeležavanje i rezultate koje ćemo koristiti.

1. Oznake i rezultati koji se koriste

$\mathscr{C}$ je prsten neprekidnih funkcija koje preslikavaju interval $[0, \infty)$ u skup kompleksnih brojeva. Dve unutrašnje operacije su sabiranje i kompozicija. Za dve neprekidne funkcije f i g kompozicija je definisana: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-u)\ g(u)\ du$. Odgovarajući elemenat u $\mathscr{C}$ za neprekidnu funkciju $f(t)$ obeležićemo sa f ili $\{f(t)\}$.

Polazeći od prstena $\mathscr{C}$ koji je bez delioca nule i bez jediničnog elementa, dobiva se polje $\mathscr{M}$ operatora J. Mikusinjskog.

U dokazu služićemo se celom funkcijom E.M. Wrighta:

$$\phi(\beta, -\alpha; z) = \sum_{n \geqq 0} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta - \alpha n)}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

E.M. Wright [6] je pokazao da za $z = -y$, $|\arg y| \leqslant \min\left\{\frac{3}{2}\pi(1-\alpha), \pi\right\} - \varepsilon$

(3) $$\phi(\beta, -\alpha; z) \sim Y^{\frac{1}{2}-\beta} e^{-Y}, \qquad Y = (1-\alpha)(\alpha^\alpha y)^{1/(1-\alpha)}.$$

Mi ćemo se koristiti funkcimjom:

(4) $$F(\beta, \lambda, t) = \begin{cases} t^{-\beta-1}\phi(-\beta, -\alpha; -\lambda t^{-\alpha}), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

koja ima sledeće osobine:

1. Za β kompleksno i $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}(1\text{-}\alpha)$, $\lambda \neq 0$, $F(\beta, \lambda, t)$ je elemenat iz $\mathscr{C}$.

2. Za svako $t \geqslant 0$ $F(\beta, \lambda, t)$ je regularna funcija po λ u oblasti $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}(1\text{-}\alpha)$, $\lambda \neq 0$.

3. $s^{\alpha k} F(0, 1, t) = F(\alpha k, 1, t)$,

4. $\dfrac{d_k}{d\lambda^k} F(0, \lambda, t) = F(\alpha k, \lambda, t)$

5. $F(0, \lambda, t) * F(0, 1, t) = F(0, 1+\lambda, t)$

6. $|F(\alpha k, 1, t)| \leqslant \dfrac{2}{\alpha}\left(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)^{-\left(n+\frac{1}{\alpha}\right)} \Gamma\left(n+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

7. $F(0, \lambda, t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{tz - \lambda z^\alpha} dz.$

Pošto znamo daje $\phi(\beta, \text{-}\alpha; z)$ cela funkcija, to za osobine 1. i 2. treba samo ispitati okolinu tačke $t = 0$. Pretpostavili smo da je $F(\beta, \lambda, 0) = 0$. Zato treba samo pokazati da $F(\beta, \lambda, t) \to 0$ kada $t \to 0$ i $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}(1\text{-}\alpha)$, $\lambda \neq 0$. To sledi iz asimptotskog ponašanja (3) funkcije $\phi(\beta, \text{-}\alpha, z)$. Ostale osobine koje smo ovde naveli za funkciju F slede iz poznatih osobina za funkciju ϕ (vidi [6] i [5]).

2. Konvergencija i analitički izraz za red (1)

Tvrđenje: *Red (1) konvergira za sve λ kompleksan broj, a kada je $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha)$, $\lambda \neq 0$, on predstavlja funkciju $F(0, \lambda, t)$ koja je elemenat iz $\mathscr{C}$.*

Dokaz. - Poznato je [4] da ako red (1) konvergira za jedno $\lambda \neq 0$, tada konvergira za sve λ kompleksno.

Za faktor konvergencije uzimamo $F(0, 1, t)$ i koristimo navedene njene osobine

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)}{k!} s^{\alpha k} = \frac{I}{\{F(0, 1, t)\}} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^k}{k!} F(\alpha k, 1, t) \right\}$$

$$= \frac{I}{\{F(0,1, t)\}} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} F(0,1+\lambda, t)_{\lambda=0} \right\}$$

$$= \frac{I}{\{F(0,1, t)\}} \{F(0,1+\lambda, t)\}$$

$$= \{F(0, \lambda, t)\}.$$

Konvergencija reda (1) u $\mathscr{M}$ sledi iz majoracije:

$$\left| \frac{(-\lambda)^k}{k!} F(\alpha k, 1, t) \right| \leq |\lambda|^k N^k, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

gde je N konstanta koja zavisi samo od α. Pri ovoj majoraciji koristili smo asimptotsko ponašanje Γ funkcimje: $\Gamma\left(n + \frac{1}{\alpha}\right) \sim \Gamma(n) n^{1/\alpha}$.

Dobivena majoracija pokazuje da se može odrediti $\lambda \neq 0$, tako da red (1) konvergira.

Ako uporedimo tvrđenje koje smo dokazali sa rezultatom koji je dobio J. Mikusinjski, videćemo da su oni identični. J. Mikusinjski je dobio analitički izraz za red (1), kada on definiše elemenat iz $\mathscr{C}$, u obliku integrala:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{tz - \lambda z} \, dz.$$

Navedena osobina 7. za funkciju F pokazuje da su rezultati identični.

Iz dokazanog tvrđenja može se zaključiti i kada red (1) predstavlja operator koji sigurno ne pripada $\mathscr{C}$. Neka je za neko λ $e^{-\lambda s^{\alpha}}$ elemenat iz $\mathscr{C}$. Kada bi i $e^{\lambda s^{\alpha}}$ bio elemenat iz $\mathscr{C}$, imali bi:

$$e^{\lambda s^{\alpha}} e^{-\lambda s^{\alpha}} = I,$$

a to nije moguće jer je $\mathscr{C}$ prsten koji ne sadrži jedinični elemenat I.

LITERATURA

[1] T. K. Boehme, On power series in the differentiation operator, *Studia Math.* **T. XLV** (1973), 309—317.

[2] J. Mikusiński, Operational calculus, Pergamon press (1959)

[3] M. Skendžić i B. Stanković, On power series in operator s^α, The 5^{th} Balkan Mathematical Congress 24—30. VI 1974.

[4] B. Stanković, Sur la convergence d'une série d'opérateurs, *Studia math.* **T. XXVI** (1966), 117—120.

[5] B. Stanković, On the function of E. M. Wright, *Publications Inst. math.* Beograd **T. 10** (1970) 113—124.

[6] E. M. Wright, The generalized Bessel function of order greater than one, *Quarterly journal of Math.* **V. II** N° 41 (1940), 36—48.

Bogoljub Stanković

ON A CLASS OF OPERATORS

Abstract

In the field of Mikusiński operators [2] with defined convergence classes ([2], p. 144) the series of the form (1), where λ is a complex number and s differential operator, play an important role. Such a series defines an exponential operator $e^{-\lambda s^\alpha}$ which occurs when we apply Mikusiński operators in solving partial differential equations for numerical functions ([2] pp. 439—453).

In the mathematical literature the problem of convergence of such a series and the conditions when the series (1) represents an element from $\mathscr{C}$ are treated separately. This paper presents a very short proof which answers both questions.

PROPOSITION. *The series (1) converges for all* λ *complex. If* $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha)$, *the series (1) represents the function* $t^{-1}\,\phi(0, -\alpha; -\lambda\, t^{-\alpha})$ *which is an element of* $\mathscr{C}$.

$\phi(\beta, -\alpha; z)$ *is the function analysed by E. M. Wright* [6].