Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 5 (1975)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 5 (1975)

Olga Hadžić i Endre Pap

NEKE PRIMENE DIJAGONALNE TEOREME U FUNKCIONALNOJ ANALIZI*

1. Uvod

U ovom radu smo dokazali nekoliko teorema vezanih za polu-grupe i Banachove prostore koristeći pritom dijagonalnu teoremu (E. Pap [10]).

Dijagonalnu teoremu je formulisao J. Mikusiński u radu [8]. P. Antosik ju je u radovima joz više uopštio i našao dalje primene [1] i [2]. Dijagonalna teorema je naišla na veliku primenu u funkcionalnoj analizi i teoriji mere. Dobijeni su jedinstveni i kraći dokazi poznatih fundamentalnih teorema u funkcionalnoj analizi (Banachova teorema, Banach-Steinhausova teorema, teoreme tipa Orlicz-Pettisa za bezuslovnu konvergenciju, teorema o ekvivalentnosti slabe i jake ograničenosti temperiranih vektora, itd.) i u teoriji mere (Vitali-Hahn-Saksova teorema, Nikodymova teorema, teorema Nikodyma o uniformno ograničenim merama itd.), kao i njihova dalja uopštenja. U radu E. Pap-a [11] dat je pregled dosadašnjeg razvoja teorije i primene dijagonalne teoreme.

Teoremu 1. smo dobili primenjujući dijagonalnu teoremu za DT-prostor X [10] na jednu specijalnu beskonačnu matricu gde su elementi konačne sume iz X.

Koristeći teoremu 1. dobili smo u teoremi 2. uopštenje Shurove leme (J. Mikusiński i J. K. Brooks [9]) na Banachove prostore sa pozitivnom konstantom Macphaila (Deschaseaux Jean-Pierre [3], Macphail [7]).

Rezultati J. B. Diaza i Metcalfa F. T. [4] o komplementarnim nejednakostima trougla za Banachove i Hilbertove prostore omogućili su nam da dokažemo teoremu 3. (bez korišćenja dijagonalne teoreme), koja je u izvesnom smislu bliska teoremi 2. Teorema 4. je generalizacija konvergencije niza iz prostora l_1 ka 0 (G. Köthe [6]). Teorema 5. je integralna modifikacija teoreme 1.

2. Dijagonalna teorema nad DT-prostorom

U ovom radu ćemo koristiti uopštenje dijagonalne teoreme date od strane E. Pap-a [10]. Zato ćemo dati neka objašnjenja.

Definicija. *Za polugrupu $(X, *)$ sa funkcionelom f za koju važi*

$$(F_1)\quad f(x*y)\leqslant f(x)+f(y);$$
$$(F_2)\quad f(x*y)\geqslant |f(x)-f(y)|,$$

za svako $x, y \in X$, kažemo da je DT-prostor (skraćenica od dijagonalna teorema).

* Rad sa 5. Balkanskog Matematičkog Kongresa, održanog 24 – 30. 6. 1974. u Beogradu.

Sada se može formulisati:

Dijagonalna teorema. *Neka je X DT-prostor. Ako* $x_{ij} \in X$ $(i, j \in N)$ *i* $\lim_{j \to \infty} f(x_{ij}) = 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots$, *tada postoji takav beskonačan skup I pozitivnih celih brojeva i njegov podskup J (konačan ili beskonačan) da je za svako* $i \in I$

$$\sum_{j \in J} f(x_{ij}) < \infty$$

$$f\left(\underset{j \in J}{*} x_{ij}\right) \geq \frac{1}{2} f(x_{ii}),$$

$$\text{gde je } \underset{i=1}{\overset{n}{*}} = x_1 * \ldots * x_n \quad i$$

$$f(\underset{j \in J}{*} x_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} f(\underset{s=1}{\overset{n}{*}} x_{ij_s})$$

a $\{j_s\}$ *je rastući niz svih elemenata iz skupa J.*

Nadalje ćemo podrazumevati da je u izrazu

$$\underset{k \in K}{*} x_k,$$

gde je K konačan podskup od N, redosled operacija po rastućim indeksima iz K.

3. Posledica dijagonalne teoreme

Sledeća teorema, koja se javlja kao posledica dijagonalne teoreme, poslužiće nam za izvođenje nekih osobina redova u Banachovom prostoru.

Teorema 1. *Neka je X DT-prostor. Dalje, neka* $a_{nk} \in X(n, k \in N)$ *tako da je*

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk}) < \infty \qquad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ako postoji rastući niz prirodnih brojeva $\{k_i\}_{i \in N}$ *i niz konačnih skupova prirodnih brojeva* $\{S_i\}_{i \in N}$ *za koje je*

$$\max_{s \in S_i} s < \min_{s \in S_{i+1}} s \qquad za\ i = 1, 2, \ldots \qquad da\ za\ neko\ \varepsilon > 0$$

važi

$$(2) \qquad f(\underset{n \in S_i}{*} a_{nk_i}) > \varepsilon \qquad \text{za } i = 1, 2, \ldots \quad ,$$

tada postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $S \subset N$ tako da je za svako $i \in I$

$$(3) \qquad f(\underset{n \in S}{*} a_{nk_i}) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dokaz. Neka je

$$x_{ij} = \underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i}.$$

Kako numerički redovi $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk})$ $(k=1, 2, \ldots)$ konvergiraju, to je zadovoljen Cauchyev uslov, tj. za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$ postoji $N_i(\varepsilon_1)$ da je

$$(4) \qquad \sum_{n=n'}^{m} f(a_{nk_i}) < \varepsilon_1 \qquad \text{za } n', m > N_i(\varepsilon_1)$$

i za $i=1, 2, \ldots$. Kako je funkcionela f nenegativna i zadovoljava uslov (F_1), to je

$$\sum_{n=n_j}^{m_j} f(a_{nk_i}) \geq \sum_{n \in S_j} f(a_{nk_i}) \geq f(\underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i}),$$

gde je $n_j = \min_{s \in S_j} s$ a $m_j = \max_{s \in S_j} s$. Na osnovu (4) je tada

$$f(\underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i}) < \varepsilon_1 \qquad \text{za} \qquad j \geqslant j(i), \quad n_{j(i)} > N_i(\varepsilon_1).$$

To znači da je $\lim_{j \to \infty} f(x_{ij}) = 0$ za $i=1, 2, \ldots$.

Odatle, na osnovu dijagonalne teoreme sledi egzistencija beskonačnog skupa pozitivnih celih brojeva I i njegovog podskupa J da je za svako $i \in I$

$$(5) \qquad f(\underset{j \in J}{*} (\underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i})) \geqslant \frac{1}{2} f(\underset{n \in S_i}{*} a_{nk_i}),$$

gde je

$$f(\underset{j \in J}{*} (\underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i})) = \lim_{n \to \infty} f(\overset{n}{\underset{s=1}{*}} (\underset{n \in S_{j_s}}{*} a_{nk_i})),$$

a $\{j_s\}$ je rastući niz svih elemenata iz J. Granica sa desne strane prethodne jednakosti postoji na osnovu dijagonalne teoreme. Pokazaćemo sada egzistenciju izraza sa desne strane sledeće jednakosti, kao i samu jednakost. Naime, za $i \in I$ važi

$$f(\underset{j \in J}{*} (\underset{n \in S_j}{*} a_{nk_i})) = f(\underset{n \in S}{*} a_{nk_i}),$$

gde je $S=\bigcup_{j\in J} S_j$. Dokazujemo za slučaj kada je J beskonačno. U slučaju kada je J konačno prethodna jednakost je trivijalno zadovoljena.

Neka je $\{r_m\}_{n\in N}=\bigcup_{j\in J} S_j$. Prvo ćemo pokazati egzistenciju granice

$$\lim_{t\to\infty} f(\overset{t}{\underset{m=1}{*}} a_{r_m k i})=f(\underset{n\in S}{*} a_{nki}) \qquad \text{za} \qquad i\in I.$$

Na osnovu nejednakosti

$$|f(x*y)-f(x)|\leqslant f(y) \qquad \text{za} \qquad x,\, y\in X$$

(vid. E. Pap [10]) i (4) sledi da je za $i\in I$ i proizvoljno $\varepsilon'>0$

$$|\, f(\overset{u}{\underset{m=1}{*}} a_{r_m k i})-f(\overset{v}{\underset{m=1}{*}} a_{r_m k i})| \leqslant f(\overset{u}{\underset{m=v}{*}} a_{r_m k i})\leqslant \sum_{m=v}^{u} f(a_{r_m k i})<\varepsilon' \quad \text{za} \quad u>v\geqslant N_i(\varepsilon').$$

To znači da je $\{f(\overset{n}{\underset{m=1}{*}} a_{r_m k i})\}_{n\in N}$ Cauchyev niz u prostoru realnih brojeva za $i\in I$, pa time i konvergentan niz.

Niz$\{f(\overset{n}{\underset{s=1}{*}}(\underset{n\in S_{j_s}}{*} a_{nki}))\}_{n\in N}$ je podniz realnog konvergentnog niza $\{f(\overset{v}{\underset{m=1}{*}} a_{r_m k i})\}_{v\in N}$, pa je i on konvergentan i sa istom granicom

$$f(\underset{n\in S}{*} a_{nki}) \qquad \text{za} \qquad i\in I.$$

Zato, ako u (5) uvrstimo (2) dobijamo (3). Time je dokaz teoreme 1 završen.

4. Uopštenja Shurove leme

Neka je E realni ili kompleksni Banachov prostor sa normom $\|\ \|$. Konstanta Macphaila μ (E) tog prostora se supremum realnih brojeva μ, takvih da za svaku konačnu familiju elemenata $x_i\in E$ $(i\in I)$ postoji podskup $J\subset$ I da važi

$$\mu\sum_{i\in I}\|x_i\|\leqslant\Big\|\sum_{i\in J} x_i\Big\|$$

Sada se može formulisati:

T e o r e m a 2. *Neka je B Banachov prostor sa pozitivnom konstantom Macphaila μ (B), $a_{nk}\in B$ $(n,\, k\in N)$ i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|a_{nk}\|<\infty \qquad \text{za} \qquad k=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Ako za svaki podskup $S \subset N$ važi

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in S} a_{nk} = 0,$$

tada je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} \|a_{nk}\| = 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} \|a_{nk}\| \neq 0.$$

Tada postoji $\varepsilon > 0$ i dva rastuća niza prirodnih brojeva $\{p_i\}\, i\in N$ i $\{q_i\}\, i\in N$

tako da je

$$\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} \|a_{nkq_i}\| > \varepsilon$$

za $i = 1, 2, \ldots$. Odatle sledi

$$\Big\| \sum_{n\in S_i} a_{nkq_i} \Big\| \geqslant \mu(B) \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} \|a_{nkq_i}\| > \mu(B)\varepsilon$$

za $i = 1, 2, \ldots$, gde je $\mu\ (B)$ Macphailova konstanta za B, a

$$S_i \subset \{p_i + 1, \ldots, p_{i+1}\}.$$

Tada, na osnovu teoreme 1. postoji beskonačan skup $I \subset N$ i skup $S \subset N$ tako da je za svako $i\in I$

$$\Big\| \sum_{n\in S} a_{nkq_i} \Big\| > \frac{\mu(B)}{2}\, \varepsilon > 0,$$

što je u suprotnosti za pretpostavkama teoreme.

Za specijalne vektore proizvoljnog Banachovog (Hilbertovog) prostora E mogu se oslabiti pretpostavke prethodne teoreme. Naime, važi

Teorema 3. *Neka je E Banachov prostor, $a_{nk} \in E$ $(n, k, \in N)$,* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_{nk}\| < \infty$ *za $k = 1, 2, \ldots$ i postoji broj $r > 0$ i linearna funkcionela g sa jediničnom normom, da je*

$$(6) \qquad 0 \leqslant r \|a_{nk}\| \leqslant \operatorname{Re} g(a_{nk})\ (n, k\in N).$$

Tada iz

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n\in N} a_{nk}=0$$

sledi

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n\in N}\|a_{nk}\|=0.$$

Dokaz. Za vektore a_{nk} koji zadovoljavaju (6), na osnovu rada Diaza i Metcalfa [4] važi

$$(7)\qquad r\sum_{n=1}^{m}\|a_{nk}\|\leqslant\Big\|\sum_{n=1}^{m}a_{nk}\Big\|\qquad \text{za}\qquad k=1,2,\ldots$$

Puštajući da $m\to\infty$, iz suprotne pretpostavke, tj.

$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n\in N}\|a_{nk}\|\neq 0,$ sledi da je i $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n\in N}a_{nk}\neq 0,$

što je kontradikcija.

Primedba 1. Primetimo da je dokaz prethodne teoreme izveden bez korišćenja dijagonalne teoreme, zahvaljujući nejednakosti (7).

Primedba 2. Ako je Banachov prostor E iz teoreme 3 i Hilbertov, tada uslov (6) prelazi u

$$0\leqslant r\|a_{nk}\|\leqslant \mathrm{Re}(a_{nk},a)(n,k\in N),$$

gde je uzeto $g(a_{nk})=(a_{nk},a)$.

5. Teorema sa dualnim prostorom

Daćemo sada jedno uopštenje konvergencije niza iz prostora l_1 ka 0 (G. Köthe [6]).

Teorema 4. *Neka je E Banachov prostor a E' dualni prostor od E. Neka $a_{nk}\in E$ $(n,k\in N)$ i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|a_{nk}\|<\infty\qquad \text{za}\qquad k=1,2,\ldots .$$

Ako je

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a_{nk})=0$$

$$\textit{za svako}\quad (f_1,f_2,\ldots)\in\prod_1^{\infty}E',\quad \|f_n\|_{E'}=0 \textit{ ili } 1$$

i $$\lim_{k\to\infty} \|a_{nk}\| = 0 \quad za \quad n = 1, 2, \ldots, \quad tada\ je$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|a_{nk}\| = 0.$$

Dokaz. *A*ko bi bilo $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n\in N} \|a_{nk}\| \neq 0$, tada bi postojalo $\varepsilon > 0$ niz prirodnih brojeva $\{k_i\}_{i\in N}$ tako da je

$$(8) \qquad \sum_{n\in N} \|a_{nk_i}\| > \varepsilon \qquad za \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Postupićemo slično kao i u [6] birajući $N_1 \in N$ tako da je

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \|a_{nk_1}\| < \frac{\varepsilon}{5}\,.$$

Tada je zbog (8)

$$\sum_{n=1}^{N_1} \|a_{nk_1}\| > \frac{4}{5}\varepsilon.$$

Odredimo f_n za $n = 1, \ldots, N_1$ da je $f_n(a_{nk_1}) = \|a_{nk_1}\|$ i $\|f_n\|_{E'} = 1$ (na osnovu direktne posledice Hahn-Banachove teoreme).

Neka je k_{j_2} $(j_1 = 1)$ tako da je

$$\sum_{n=1}^{N_1} \|a_{nk_{j_2}}\| < \frac{1}{5}\varepsilon.$$

Odredimo $N_2 > N_1$ tako da je

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} \|a_{nk_{j_2}}\| < \frac{1}{5}\varepsilon.$$

Tada je

$$\sum_{n=1}^{N_2} \|a_{nk_{j_2}}\| > \frac{4}{5}\varepsilon, \quad \text{pa je}$$

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} \|a_{nk_{j_2}}\| > \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Odredimo f_n za $n=N_1+1, \ldots, N_2$ da je $f_n(a_{nk_{j_2}})=\|a_{nk_{j_2}}\|$ i $\|f_n\|E'=1$. Nastavljajuci ovaj postupak dobijamo

$$\sum_{n=N_{s-1}+1}^{N_s} f_n(a_{nk_j})=\sum_{n=N_{s-1}+1}^{N_s}\|a_{nk_{j_s}}\|>\frac{3}{5}\varepsilon$$

za $s=1, 2, \ldots$ $(N_0=0)$.

Sada na osnovu teoreme 1. sledi da postoji beskonačan skup $I\subset N$ i skup $S\subset N$ tako da je za svako $i\in I$

$$\Big|\sum_{n\in S} f_n(a_{nk_{j_i}})\Big|>\frac{3}{10}\varepsilon,$$

što je suprotno pretpostavci teoreme.

6. Integralna verzija teoreme 1

Daćemo na kraju integralni analogon teoreme 1. Koristićemo integral u smislu Bochnera (vid. npr. Hill—Philips [5]) koji je uopštenje Lebesgueovog integrala na funkcije koje preslikavaju realnu pravu u Banachov prostor.

T e o r e m a 5. *Neka je E Banachov prostor, $\{g_n(t)\}$ niz funkcija koje preslikavaju interval $[a,\infty)$ u E tako da je*

$$\int_a^\infty \|g_n(t)\|dt<\infty \quad \text{za} \quad n=1, 2, \ldots .$$

Ako postoji rastući niz prirodnih brojeva $\{k_i\}_{i\in N}$ i niz ograničenih merljivih skupova $\{S_i\}_{i\in N}$ za koje je

$$\sup_{s\in S_i} s<\inf_{s\in S_{i+1}} s, \quad \inf_{s\in S_i} s\to\infty \quad \textit{kada} \quad i\to\infty, \quad \textit{da za neko} \quad \varepsilon>0 \quad \textit{važi}$$

$$\Big\|\int_{S_i} g_{k_i}(t)dt\Big\|>\varepsilon \quad \text{za} \quad i=1, 2, \ldots ,$$

tada postoji beskonačan skup $I\subset N$ i merljiv skup $S\subset R_e$, tako da je za svako $i\in I$

$$\Big\|\int_S g_{k_i}(t)dt\Big\|>\frac{1}{2}\varepsilon.$$

D o k a z. Postupićemo slično kao i u teoremi 1. Uzmimo da je

$$x_{ij}=\int_{S_j} g_{k_i}(t)dt.$$

Kako je

$$\int_a^\infty \|g_k(t)\| dt < \infty \qquad \text{za} \qquad k=1, 2, \ldots$$

i $\inf_{s \in S_i} s \to \infty$ kada $i \to \infty$, to se lako može pokazati da je $\lim_{j \to \infty} x_{ij} = 0$ i $\|x_{ii}\| > \varepsilon$ za $i = 1,2,\ldots$
Na osnovu dijagonalne teoreme postoji beskonačan skup $I \subset N$ i podskup $J \subset I$ da je za $i \in I$

$$\left\|\sum_{j \in J} \left(\int_{S_j} g_{k_i}(t) dt\right)\right\| = \left\|\int_{\bigcup_{j \in J} S_j} g_{k_i}(t) dt\right\| > \frac{1}{2}\varepsilon,$$

jer je $S_i \cap S_j = \phi \quad (i \neq j)$ i $\bigcup_{j \in J} S_j$ je merljiv skup. Time je dokaz teoreme 5. završen.

Pomoću prethodne teoreme 5. može se dobiti već poznata integralna verzija Shurove leme (u prostoru funkcija $L^1{}_{(a,\infty)}$), ali u nešto slabijem obliku nego što je recimo u knjizi K. Yosida [12].

LITERATURA

[1] Antosik P., *On the Mikusiński Diagonal Theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 19 (1971), 305—310.

[2] Antosik P., *A Generalization of the Diagonal Theorem*, ibid., 20 (1972), 373—377.

[3] Deschaseaux Jean-Pierre, *Une caractérisation de certains espaces vectoriels normés de dimension finie par leur constante de Macphail*, C. r. Acad. sci., 1973, 276, N° 20, A1349—A1351.

[4] Diaz J. B., Metcalf F. T., *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 88—97.

[5] Hille E., Phillips R. S, *Functional analysis and semi-groups*, Colloq. Publ. Amer. Math., Soc., 1957.

[6] Köthe G., *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, 1969.

[7] Macphail M.S., *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 121—123.

[8] Mikusiński J., *A Theorem on vector matrices and its applications in measure theory and functional analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 18 (1970), 193—196.

[9] Mikusiński J., J. K. Brooks, *On Some Theorems in Functional Analysis*, ibid., 18 (1970), 151—155.

[10] Pap E., *A generalization of the Diagonal theorem on a block-matrix*, Mat. ves., 11 (26) (1974), 66—71.

[11] Pap E., *O Dijagonalnoj teoremi*, Mat. ves., 10 (25), Sv. 4, (1973), 391—399.

[12] Yosida K., *Функционалный анализ*, Москва, 1967.

Olga Hadžić – Endre Pap

SOME APPLICATIONS OF THE DIAGONAL THEOREM IN FUNCTIONAL ANALYSIS

Abstract

J. Mikusiński formulated the Diagonal theorem in paper [8]. P. Antosik [1], [2], generalized this theorem. The Diagonal theorem has many important applications in functional analysis and the measure theory.

In this paper the authors prove some theorems in semi-goups and Banach spaces using the generalized Diagonal theorem of E. Pap [10].

Definition. Let $(X, *)$ be a semi-goup. Let $f(x)$ be a real valued function on X with following properties:

$$(F_1)\ f(x*y) \leqslant f(x)+f(y),\ (F_2)\ f(x*y) \geqslant |f(x)-f(y)|,$$

then X with the functional f is a DT-space.
The following theorem is a consequence of the Diagonal theorem [10].

Theorem 1. *Let X be a DT-space and $a_{nk} \in X (n, k \in N)$ so that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{nk}) < \infty \qquad for \quad k=1, 2, ,,,$$

If there exists a sequence of natural numbers $\{k_i\}_{i\in N}$ and a sequence of subsets of the set N $\{S_i\}_{i\in N}$ so that $\max_{s\in S_i} s < \min_{s\in S_{i+1}} s$, for $i=1, 2,\ldots$ and $\varepsilon > 0$ such that

$$f(\underset{n\in S_i}{*} a_{nk_i}) > \varepsilon \qquad for \qquad i=1, 2,\ldots,$$

then there exists an infinite set $I \subset N$ and a set $S \subset N$ so that for every $i \in I$

$$f(\underset{n\in S}{*} a_{nk_i}) > \frac{1}{2}\varepsilon \quad holds.$$

Using theorem 1 we have the generalization of Shure lemma.

Theorem 2. *Let B be a Banach space with the positive Macphail constant $\mu(B)$, $a_{nk} \in B$ $(n,k \in N)$ and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_{nk}\| < \infty \qquad for \quad k=1, 2,\ldots$$

If for every subset $S \subset N$ is

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in S} a_{nk} = 0,$$

then

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} \|a_{nk}\| = 0.$$

Using the results of J.B. Diaz and F.T. Metcalf [4] we have, in theorem 3, other generalization of Shure lemma.

We have in theorem 4 the generalization of the convergence of sequences from space l_1 to 0 (G. Köthe [6]):

Theorem 4. *Let be E a Banach space and E'a the dual space of E. Let $a_{nk} \in E (n,k \in N)$ and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_{nk}\| < \infty \qquad for \quad k=1, 2,\ldots.$$

If

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a_{nk})=0$$

for every $(f_1, f_2, \ldots)\in\prod_1^{\infty} E'$, $\|f_n\|_{E'}=0$ *or 1 and*

$$\lim_{k\to\infty}\|a_{nk}\|=0 \qquad \textit{for} \quad n=1, 2, \ldots, \quad \textit{then}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\|a_{nk}\|=0.$$

Theorem 5 is a integral version of theorem 1.