Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 5 (1975)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 5 (1975)

Olga Hadžić

O KLASI $\mathcal{U}(X)$ CHI SONG WONGA U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

U radu [3] Chi Song Wong je dokazao jednu teoremu o nepokretnoj tački za preslikavanja definisana nad uniformnim prostorom i tom prilikom uveo klasu preslikavanja $\mathcal{U}(X)$.

Cilj ove note je da se daju dovoljni uslovi koji obezbeđuju da preslikavanje F lokalno konveksnog prostora X u samog sebe pripada klasi $\mathcal{U}(X)$, kada preslikavanje F zadovoljava nejednakost:

$$p_i(Fx-Fy)\leqslant q(i)p_{f(i)}(x-y),$$

gde p_i definiše topologiju od X i $q(i)>0$.

Iznećemo sada neka obeležavanja kao i potrebne rezultate rada [3].

Neka je $(X, \mathcal{U})$ neprazan uniforman prostor i Δ dijagonala od $X\times X$. Neka je $f:X\to X$. Definišimo f_Δ na sledeći način: $f_\Delta(x)=(x, f(x))$, $\forall x\in X$.
Familija $\{f^{-1}{}_\Delta(U)\times f^{-1}{}_\Delta(U)\cup\Delta | U\in\mathcal{U}\}$ obrazuje bazu za uniformnosti $\mathcal{U}_f$. Skup funkcija koje su uniformno neprekidna preslikavanja $(X, \mathcal{U}_f)\to(X, \mathcal{U}_f)$ označava se sa $\mathcal{U}(X)$.

Teorema A [3]: *Neka je $(X, \mathcal{U})$ neprazan, Hauzdorfov kompletan uniforman prostor i $f\in\mathcal{U}(X)$. Tada f ima jedinstvenu nepokretnu tačku ako je $f^{-1}{}_\Delta(U)$ neprazan zatvoren podskup od X za svaki zatvoren simetričan element $U\in\mathcal{U}$.*

Neka je D familija pseudometrika nad nepraznim skupom X i $\mathcal{U}$ uniformna struktura indukovana sa D. Neka je $f:X\to X$. Može se lako pokazati [3] da $f\in\mathcal{U}(X)$ ako, i samo ako $\forall d\in D$ i $r>0$; $\exists d_1, d_2, \ldots, d_n$ u D i $\delta(r, d)>0$, tako da:

$$d_i(x, f(x)) + d_i(y, f(y))<\delta(r, d)\Rightarrow d(f(x), f(y))<r \qquad i=1, 2,.., n$$

Teorema: *Neka je X Hauzdorfov lokalno konveksan vektorsko topološki prostor sa familijom seminormi $\{p_i\}i\in I$ i F preslikavanje prostora X u samog sebe, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *Za svako $i\in I$ postoje $q(i)>0$ i f: $I\to I$ tako da je:*

$$p_i(Fx-Fy)\leqslant q(i)p_{f(i)}(x-y) \quad za\ sve \quad x, y\in X,$$

2. $q(f^k(i)) \leq Q(i) < 1 \qquad k=1, 2, \ldots$ *za sve* $\quad i \in I$,

3. $f^{k(i)}(i) = f(i) \quad$ *za sve* $\quad i \in I,\ k(i) \in N;\ (f^k = f(f^{k-1}))$.

Tada je $F \in D(X)$, *gde je* $D = \{p_i\} i \in I$.

Dokaz: Na osnovu uslova 1. sledi

$$p_{f(i)}(x-y) \leq p_{f(i)}(x-Fx) + p_{f(i)}(Fx-Fy) + p_{f(i)}(y-Fy) \leq$$

$$\leq p_{f(i)}(x-Fx) + q(f(i))\, p_{f^2(i)}(x-y) + p_{f(i)}(y-Fy) \leq$$

$$\leq p_{f(i)}(x-Fx) + q(f(i))\, [p_{f^2(i)}(x-Fx) + q(f^2(i))\, p_{f^3(i)}(x-y) + p_{f^2(i)}(y-Fy)] +$$

$$+ p_{f(i)}(y-Fy) = p_{f(i)}(x-Fx) + p_{f(i)}(y-Fy) + q(f(i))[p_{f^2(i)}(x-Fx) +$$

$$+ p_{f^2(i)}(y-Fy)] + q(f(i))\, q(f^2(i)) \times p_{f^3(i)}(x-y) \leq \ldots \leq p_{f(i)}(x-Fx) + p_{f(i)}(y-Fy) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \prod_{k=1}^{s} q(f^k(i))[p_{f^s(i)}(x-Fx) + p_{f^s(i)}(y-Fy)] + \prod_{k=1}^{n} q(f^k(i))\, p_{f^{n+1}(i)}(x-y)$$

za svako $n \in N$.

Ako je $n_i + 1 = k(i)$, tada je:

$$p_{f(i)}(x-y)\left(1 - \prod_{k=1}^{n_i} q(f^k(i))\right) \leq p_{f(i)}(x-Fx) + p_{f(i)}(y-Fy) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n_i} \prod_{k=1}^{s-1} q(f^k(i))[p_{f^s(i)}(x-Fx) + p_{f^s(i)}(y-Fy)] = A.$$

Odavde je:

$$p_i(Fx-Fy) \leq q(i)\left(1 - \prod_{k=1}^{n_i} q(f^k(i))\right)^{-1} A < r, \qquad \text{ako je}$$

$$A < \frac{r\left(1 - \prod_{k=1}^{n_i} q(f^k(i))\right)}{q(i)}$$

za $q(i) > 0$ (inače A proizvoljno). Ako je

$$d_j(\cdot) = q(f^k(i))\, p_{f^j(i)}(\cdot)$$

i

$$d_j(y-Fy)+d_j(x-Fx)<\frac{r\left(1-\prod_{k=1}^{n_i} q(f^k(i))\right)}{2n_i q(i)}=\frac{\delta(r,i)}{2},$$

sledi tvrdenje.

T e o r e m a B [3]: *Neka je D familija pseudometrika nad X i prostor (X, D) Hauzdorfov i kompletan. Neka $F\in D(X)$. Tada f ima jedinstvenu nepokretnu tačku ako je za svako $r>0$ i $d_1, d_2, \ldots d_n \in D$ skup:*

$$\{x\in X \mid d_i(x, Fx)\leqslant r \qquad i=1, 2, \ldots, n\}$$

neprazan i zatvoren skup.

Skup $\{x \mid p_i(x-Fx)\leqslant r\}$ je neprazan i zatvoren, što je lako dokazati pa ako je prostor X u teoremi kompletan uslovi teoreme obezbeđuju i egzistenciju nepokretne tačke preslikavanja F što sledi iz citirane teoreme B [3].

Ako je specijalno $f^{k(i)}(i)=f(i)$, tada egzistencija nepokretne tačke sledi i iz teoreme 1 [2].

LITERATURA

[1] O. Hadžić, B. Stanković, Some theorems on the fixed point in locally convex spaces, *Publ. Inst. Math.*, **T.10(24),** 1970, 9—19.

[2] O. Hadžić, Existence theorems for the system x=H (x, y); y=**K** (x, y) in locally convex spaces, *Publ, Inst. Math.* **T.16(30),** 1973, 65—73.

[3] Chi Song Wong, A fixed point theorem for a class of mappings, *Math. Ann.* **204,** 97—103 (1973).

Olga Hadžić

ON THE CHI SONG WONG'S CLASS $\mathscr{U}$(X) IN LOCALLY CONVEX SPACES

Abstract

In this paper the following theorem is obtained: *Let X be a Hausdorff locally convex space, $\{p_i\}_{i\in I}$ be a saturated family of seminorms defining the topology of X, f be a mapping of I into I and F be a mapping of X into X satisfying the following conditions:*

For every $i\in I$ there exists $q(i)>0$ and $f: I\to I$ such that:

1. $p_i(Fx-Fy)\leqslant q(i)\, p_{f(i)}(x-y)$ *for every* $x, y\in X$;

2. $q(f^k(i))\leqslant Q(i)<1, \quad k=1, 2, \ldots$ *for every* $i\in I$;

3. $(f^{k(i)}(i))=f(i)$ *for every* $i\in I,\ k(i)\in N$

Then $F\in D(X)$, *whwere* $D=\{p_i)\}i\in I$.