Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 5 (1975)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 5 (1975)

Danica Nikolić-Despotović

NEPREKIDNOST U TAČKI JEDNE KLASE OPERATORSKIH FUNKCIJA

Uvod

Problem neprekidnosti operatorskih funkcija je interesantan kako sa stanovišta izgradnje kompletne teorije operatora J. Mikusinjskog tako i sa stanovišta primene ovih operatora. Matematički modeli, pre svega oni koji sadrže operaciju diferenciranja, ukazali su na potrebu da se ispita da li su operatorske funkcije oblika:

$$\frac{1}{(\alpha(x)s+\beta(x))^a} \qquad Re\ a>0 \tag{1}$$

gde su s operator diferenciranja u polju operatora Mikusinjskog $\mathcal{M}$, 1 jednačini elemenat pola $\mathcal{M}$, $\alpha(x)$ i $\beta(x)$, neprekidne numeričke funkcije nad intervalom $I=[c,d]$ neprekidne, u smislu operatorskog računa [5], u tački $x=x_0 \in I$, u kojoj je $\alpha(x_0)=0$ i $\beta(x_0)\neq 0$.

Pri tom operator $\dfrac{1}{(s+b)^a}\in\mathcal{S}\subset\mathcal{M}$ *za a* kompleksan broj takav da $Rea>0$ i polje $\mathcal{S}$ je algebarski izomorfno polju $\hat{\mathcal{S}}$.

U ovom radu dat je potreban i dovoljan uslov za neprekidnost u tački $x=x_0$ operatorskih funkcija oblika (1).

Problem neprekidnosti specijalnih klasa operatorskih funkcija raspravlja se i u radovima [6] [7]. Ovaj rad proširuje rezultate dobivene u radovima [6] i [7]. Oni slede iz teoreme 1. ako je $a=1$ i $a=1/n$.

U dokazu *teoreme 1.* koristiću teoremu Mikusinjskog [5] o ograničenom momentu koja glasi:

Teorema M Ako je $\beta_1, \beta_2, \ldots$ niz pozitivnih brojeva takvih da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n}=\infty \qquad \text{i} \qquad \beta_{n+1}-\beta_n>\varepsilon>0 \qquad \text{za} \qquad n=1,2,\ldots$$

a g(t) funkcija integrabilna na intervalu [0,T] i ima osobinu da

$$\left|\int_0^T exp(\beta_n t)g(t)dt\right|<M,$$

tada je $g(t)=0$ skoro svuda na intervalu [0,T].

1. Polja $\mathscr{S}$ i $\hat{\mathscr{S}}$

Obeležimo sa $\mathscr{S}$ onaj podskup polja $\mathscr{M}$ čiji elementi imaju sledeću osobinu: U klasi ekvivalencije koja definiše elemenat $a \in \mathscr{M}$, postoje takvi elementi $f, g \in \mathscr{C}$, $g \neq 0$, $a = \frac{f}{g}$ koji imaju apsolutno konvergentne Laplasove transformacije u poluravni $\operatorname{Re} z > x_0$, x_0 zavisi od f i g $\mathscr{C}$ je prostor neprekidnih kompleksnih funkcija realne nenegativne promenljive t.

Sa indukovanim operacijama iz $\mathscr{M}$, $\mathscr{S}$ je polje, a poznato je da je $\mathscr{S} \neq \mathscr{M}$ [1]. Ako Laplasovu transformaciju funkcije f obeležimo sa $\mathscr{L}(f)$, tada je za $a = \frac{f}{g} \in \mathscr{S}$, $\mathscr{L}(a) = \frac{\mathscr{L}(f)}{\mathscr{L}(g)}$. Ako obeležimo sa $\hat{\mathscr{S}}$ skup

$$\hat{\mathscr{S}} = \{\mathscr{L}(a) : a \in \mathscr{S}\},$$

tada je $(\hat{\mathscr{S}}, +, .)$ takođe polje.

Teorema D. Postoji algebarski izomorfizam između polja $\mathscr{S}$ i $\hat{\mathscr{S}}$, tj.

$$\mathscr{S} \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons}} \hat{\mathscr{S}} \text{ [1].}$$

Ditkinov rezultat [1] je značajan jer povezuje operatore sa Laplasovim transformacijama koje su vrlo dobro izučene. Sledeći ideje Erdelyia iz [3] i [4], a na osnovu algebarskog izomorfizma je:

$a \in \mathscr{S}$	$\mathscr{L}(a) \in \hat{\mathscr{S}}$
$\frac{1}{(s-b)^a} = \left\{ \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{bt} \right\}$	$\frac{1}{(z-b)^a} : Re > 0$
$\frac{s^{a-b}}{(s-\alpha)^a} = \left\{ \frac{t^{b-1}}{\Gamma(b)} {}_1F_1(a, b, \alpha t) \right\}$	$\frac{z^{a-b}}{(z-\alpha)^a} : Reb > 0$

${}_1F_1(a, b, z)$ je Kumerova konfluentna hipergeometriska funkcija definisana redom:

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \qquad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

za sve kompleksne vrednosti parametara a i b sem za $b = 0, -1, -2, \ldots$

Red apsolutno konvergira za svako konačno z, odnosno ${}_1F_1(a, b, z)$ je cela funkcija u odnosu na z. ${}_1F_1(a, b, z) = exp(z)$ za $a = b$.

U polju $\mathcal{S}$ indukovana je topologija τ polja operatora $\mathcal{M}$.

Lema. Za proizvoljan kompleksan broj a takav je Re a>0, operator $\dfrac{1}{(s+\beta)^a}\in\mathcal{S}$ *ima reprezentaciju*

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{(s+\beta)^a}=\left\{\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-\beta t}\right\}=s\left\{\frac{1}{\beta^a\Gamma(a)}\int_0^{\beta t}e^{-u}u^{a-1}du\right\}$$

$$=s\left\{\frac{\beta^a t^a}{\beta^a\Gamma(a)a}\;{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)\right\}$$

$$=s\left\{\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\,{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)\right\}.$$

Dokaz. Sledi neposredno iz date tabele, ako je $b=a+1$, $a=a$ tada je

$$s\frac{s^{a-a-1}}{(s+\beta)^a}=s\left\{\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\,{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)\right\}.$$

Odnosno

$$s\frac{s^{-1}}{(s+\beta)^a}=sl\left\{\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-\beta t}\right\}=s\left\{\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^t exp(-\beta u)u^{a-1}du\right\}$$

$$=s\left\{\Gamma^{-1}(a)\beta^{-a}\int_0^{\beta t}exp(-y)y^{a-1}dy\right\}.$$

Zato za Re a>0 je

$$\frac{t^a}{a\Gamma(a)}\,{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)=\frac{1}{\Gamma(a)\beta^a}\int_0^{\beta t}exp(-y)y^{a-1}dy,$$

odnosno važi:

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\beta^a t^a}{a}\,{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)=\displaystyle\int_0^{\beta t}exp(-y)y^{a-1}dy\\[2ex] \dfrac{t^a}{a}\,{}_1F_1(a;a+1;-\beta t)=\displaystyle\int_0^{t}exp(-\beta u)u^{a-1}du.\end{cases}$$

Relacije (2.1) do kojih smo došli primenom operatorskog računa vrlo jednostavno nalazimo npr. u [8] (str. 1077. -9.236 pod 4.), međutim njihovo izvođenje u [8] je znatno komplikovanije. Na osnovu (2.1) sledi da funkcija

$$\left\{\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\,{}_1F_1(a;a+1;\beta t)\right\}\in\mathcal{C}\quad\text{za}\qquad \text{Re } a>0,\qquad \beta\in\mathcal{R}.$$

2. Neprekidnost operatorskih funkcija (1) u $x=x_0$

Teorema 1. Pretpostavimo da su:

(i) $\alpha(x)$ $\beta(x)$ numeričke, realne, neprekidne funkcije dok $x\in I=[c,d]$

(ii) $x_0\in[c,d]$ i x_0 je izolovana nula funkcije $\alpha(x)$ tj. $\alpha(x_0)=0$

(iii) $\beta(x_0)\neq 0$.

Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija (1) bude neprekidna u $x=x_0$, u smislu neprekidnosti u operatorskom računu, jeste da postoji okolina V_0 tačke x_0 u kojoj je $\gamma(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}>0$, dok $x\in V_0\setminus\{x_0\}$.

Dokaz. Uslov je dovoljan: Obeležimo operatorsku funkciju (1) sa $R(x)$, tada je na osnovu (2) moguće $R(x)$ prikazati u obliku:

$$R(x)=s\begin{cases}\dfrac{t^a\gamma^a}{\alpha^a a\Gamma(a)\gamma^a}\,{}_1F_1(a;a+1;-\gamma t) & :x\neq x_0\\[2ex] \dfrac{l}{\beta^a(x)} & :x=x_0\end{cases}\quad\left.\begin{matrix}\gamma(x)=\gamma\\ \alpha(x)=\alpha\\ \beta(x)=\beta\end{matrix}\right.$$

$$=s^2\left\{\begin{matrix}(\alpha^a\Gamma(a))^{-1}\int\limits_0^t exp(-\gamma u)u^{a-1}(t-u)du & :x=x_0\\ \beta^{-a}(x)t & :x=x_0\end{matrix}\right\}$$

$$=s^2\left\{\begin{matrix}\dfrac{(\gamma t)^a}{\Gamma(a)\beta^a}\left[\dfrac{t}{a}\,{}_1F_1(a;a+1;-\gamma t)-\alpha\beta^{-1}\dfrac{\gamma t}{a+1}\,{}_1F_1(a+1;a+2;-\gamma t)\right] & :x\neq x_0\\[2ex] (\beta^a(x))^{-1}t & :x=x_0\end{matrix}\right\}$$

$$=s^2\left\{\begin{matrix}P(x,\ t) & ;x\neq x_0\\ (\beta^a(x))^{-1}t & :x=x_0\end{matrix}\right\}$$

Pretpostavimo da postoji okolina V_0 tačke x_0 u kojoj je $\gamma(x)>$ o dok $x\in V_0\setminus\{x_0\}$, tada je numerička funkcija promenljivih x i t:

$$\left\{\begin{matrix}P(x,\ t) & :\ x\neq x_0\\ \dfrac{t}{\beta^a(x)} & :\ x=x_0\end{matrix}\right\}$$

neprekidna dok $x \in V_0 \backslash \{x_0\}$, $0 \leqq t < \infty$ i ima osobinu da kad $x \to x_0$ nezavisno od t, tada

$$P(x, t) \to [(\beta^a(x_0)\Gamma(a))^{-1} t\Gamma(a) - \alpha(x_0)(\beta^{a+1}(x_0)\Gamma(a))^{-1}\Gamma(a+1)] = \frac{t}{\beta^a(x_0)}.$$

Odnosno, $R(x)$ je neprekidna operatorska funkcija u $x = x_0$.

Uslov je potreban. – Pretpostavimo da ne postoji okolina tačke x_0 u kojoj je kojoj je $\gamma(x) > 0$. Tada će postojati zatvorena okolina $\bar{V}_0$ tačke x_0 u kojoj $\beta(x)$ ne menja znak, a zbog pretpostavke (i) teoreme u njoj $\beta(x)$ dostiže maksimalnu i minimalnu vrednost. Međutim, neprekidna funkcija $\delta(x) = -\gamma(x)$ ima osobinu da za svaku okolinu $V_n(x_0)$ tačke x_0 postoji tačka $x_n \in V_n(x_0)$ takva da je $\delta(x_n) > 0$. Neka okoline $V_n(x_0)$ čine monotonu bazu, kako niz $\{x_n\} \to x_0$, to će postojati $n_0 \in N$ takav da

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow V_n(x_0) \subset \bar{V}_0.$$

Na osnovu pretpostavki (i), (ii) i (iii) sledi da $\delta(x_n) \to \infty$ kad $n \to \infty$.

Zbog neprekidnosti numeričke funkcije $\delta(x)$ postoji podskup od $\bar{V}_0$ koji se preslikava na polupravu $x > \delta(x_{n_0})$, odnosno postoji podskup svakog $V_n(x_0)$ koji se preslikava na polupravu $x > \delta(x_n)$.

Neka je $\delta(x_{n_0})$ takvo da:

$$m \leqslant \delta(x_n) < m+1.$$

Formirajmo niz $\{x'_i\}$ na sledeći način:

$$\delta(x'_i) = m+i, \quad k = max\ n \text{ za koje } x'_i \in V_n(x_0), \ x'_i \in V_k(x_0).$$

Kako je $\delta(x)$ neprekidna funkcija ona uzima i sve vrednosti između $\delta(x'_{i+1})$ i $\delta(x'_i)$ dok $x'_i < x < x'_{i+1}$ a niz $\delta_i = \delta(x'_i)$ ispunjava uslove teoreme M. Ako bismo, suprotno tvrdnji teoreme pretpostavili da je i u ovom slučaju operatorska funkcija (1) neprekidna u $x = x_0$, tada bi postojala $f \in \mathscr{C}$, $f \neq 0$, takva da je $f\ R(x)$ numerička funkcija neprekidna za $x = x_0$ i $o \leqq t < \infty$. Odnosno, za svako fiksirano $T \in \mathscr{R}^+$ postojao bi fiksirani broj M takav da je

$$\left| \int_0^T exp(\delta_i u) u^{a-1} f(T-u)\, du \right| < M.$$

Funkcija $g(t) = t^{a-1} f(T-t)$ za Re $a > 0$ apsolutno je integrabilna, pa zato i integrabilna na intervalu $[O, T]$. Kako su ispunjeni uslovi iz teoreme M, to bi na osnovu iste teoreme sledilo da je $g(t) = $ o $s.s$ na $[O, T]$. Odnosno $f(t) = o$ $s.s$ na $[O.T]$, što je u suprotnosti sa $f \not\equiv$ o, stoga $R(x)$ nije neprekidna u $x = x_0$.

P o s l e d i c a t e o r e m e 1. Neka su

(i) $\alpha(z)$ i $\beta(z)$ kompleksne, neprekidne funkcije dok $z \in G$ (G je oblast kompleksne ravni),

(ii) $z_0 \in G$ i z_0 je izolovana nula funkcije $\alpha(z)$,
(iii) $\beta(z_0) \neq O$.

Potreban i dovoljan uslov da operatorska funkcija

(3) $$W(z)=\frac{1}{(\alpha(z)s+\beta(z))^a} \qquad \text{Re} \quad a>0$$

bude neprekidna u tački $z=z_0$ jeste da postoji okolina V_0 te tačke u kojoj je $\text{Re}\gamma(z) > O$ dok $z \in V_0 \setminus \{z_0\}$ a $\gamma(z)=\beta(z)/\alpha(z)$.

REFERENCES

[1] ДИТКИН, В. А. П. ПРУДНИКОВ: А. Р.: Операционное исчисление, Москва (1966).
[2] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace Transformation, Band I, Basel (1950).
[3] ERDÉLYI, A.: Operational calculus and generalized functions, Holt Rinehart and Winston, New York (1962).
[4] ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., TRICOMI, F. G.: Tables of Integral Tranfsorms, voll. Mc. G. H. New York (1954).
[5] MIKUSIŃSKI, J.: Operational calculus, Pergamon Press (1959).
[6] DESPOTOVIĆ, D., STANKOVIĆ, B.: Continuite d'une fonction operatoire, *Publ. Math. Inst.* T. **7(21)** Beograd (1967) p. p. 197—203.
[7] NIKOLIĆ–DESPOTOVIĆ, D.: The continuity of one class of operational functions, *Publ. Math. Inst.* Beograd **T. 10** (24), (1970) pp. 125—131.
[8] ГРАДШТЕЙН, И. С., РЫЖИК, И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов u произведеный, Москва (1962).

Danica Nikolić-Despotović

THE CONTINUITY IN THE POINT OF ONE CLASS OF OPERATIONAL FUNCTIONS

Abstract

The authors' investigation was concerned with the sufficient and necessary conditions under which one class of operational functions of the form:

(1) $$R(x)=\frac{1}{(\alpha(x)s+\beta(x))^a} \qquad \text{Re} \quad a>0$$

is continuous in the point x_0, in the sense of continuity which is defined by Mikusinjski operational calculus.

THEOREM 1. Suppose that:
(i) $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ are numerical, real, continuous functions on the interval $I=[c, d]$
(ii) $c<x_0<d$ and x_0 is an isolated zero of the function $\alpha(x)$, $\alpha(x_0)=0$
(iii) $\beta(x_0)\neq 0$

The necessary and sufficient condition for the operator function (1) to be continuous in $x=x_0$ is the existence of a neighbourhood V_0 of the point x_0 in which $\gamma(x)=\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}>0$ while $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$

This paper extends the results obtained in [6] and [7]. They follow from theorem 1 for $a=1$ and $a=1/n$.