Зборник радова Природно-математичког факултета — Универзитет у Новом Саду, књига 5 (1975)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 5 (1975)

М. Стојаковић

ИНДУКТИВНИ И ПЕАНОВИ МОДЕЛИ*

Увод

Скуп природних бројева узима се у математици као готов, не дефинише се помоћу других једноставнијих објеката. Чак се и у науци о основама математике изграђивање теорије обавља уз коришћење скупа природних бројева. Ипак, учињени су покушаји да се својства природних бројева сведу на неколико основних и из њих изведу сва остала својства потребна за теорију (но интуитивно позната унапред). Тако се, у једном правцу (Gotlob Frege), уместо од природних бројева полази од еквиваленције скупова за које је недефинисан термин „припадање скупу" и „функција" (која узајамно једнозначно пресликава један скуп на други). У другом правцу (Giuseppe Peano), полази се опет од појма функције, један елеменат се истиче а са њега на друге прелази се поступно помоћу функције од које се тражи да задовољи извесне услове. У овом поступном генерисању природних бројева, уверење да се може достићи сваки унапред задат природни број није довољан разлог да се усвоји схватање да се тим поступком генерише и **читав скуп** природних бројева! Наравно да се конструкцијом *једног по једног читав скуп* бројева не може никад конструисати. Садржина и суштина принципа индукције и *састоји се у томе да се усвоји да та конструкција даје читав тај скуп*! У овом чланку биће размотрен низ питања везаних за употребу и однос принципа индукције према другим принципима, а биће наведени и модели који показују да својства садржана у Пеановим аксиомима не дефинишу природне бројеве једнозначно, али да су сви модели који испуњавају услове наведене у тим аксиомима међусобно изоморфни те је тај систем аксиома ипак категоричан до на изоморфизам модела.

1. Пеанов модел

За Пеанов модел стандардног скупа природних бројева онаквог каквог интуитивно познајемо узимамо непразан скупа N у коме спецификујемо полазни елеменат 0 и функцију S која сваком елементу тог скупа додељује („следећи") елеменат истог тог скупа. Пеанов модел M_0 је према томе тројка $(N, 0, S)$. Пишемо

$$M_0 = (N, 0 \in N, S).$$

* Саопштено у Матем. инст. Београд, марта 1974.

За тај скуп важе следећи аксиоми:

A_1.– $Sx \neq 0$ за свако x из N.

A_2.– $x \neq y$ повлачи $Sx \neq Sy$ за свако x, y из N

A_3.– Ако је G подскуп скупа N и важи $0 \in G$, а из $x \in G$ следи $Sx \in G$,

тада је $G=N$.

Аксиом A_1 дефинише N као *непразан* скуп. 0 је *истакнути елеменат* тога скупа. Аксиом A_1 прецизира да 0 није слика ниједног елемента из N (а наравно 0 може бити оригинал).

Аксиом A_2 описује функцију S као узајамно једнозначно пресликавање скупа $N \setminus \{0\}$ у N. Тај се аксиом може исказати у облику: „$Sx=Sy$ повлачи $x=y$."

Аксиом A_3 је *принцип индукције*. Према њему функција S генерише све природне бројеве (изузев броја 0). Поступак којим се изводи генерисање елемената из N тече овако: $S0$ нека је 1. Излази $1 \neq 0$, јер би $1=0$ имало за последицу $S0=1=0$, а то би било у супротности са A_1, којим се тврди да је $S0 \neq 0$. Тако у N сем 0 постоји елеменат 1. Сада $S1=2$ даје на исти начин $2 \neq 1$, $2 \neq 0$, па се и 2 налази у N. Настављајући овако, долазимо до *свих* природних бројева што гарантује аксиом A_3. Наиме, ако је G подскуп из N који се овако генерише, онда из $0 \in G$ и (из x припада G)$\Rightarrow$($Sx \in G$) следи према A_3 да је $G=N$.

Да су ови аксиоми независни показују примери у којима је скуп N оскуднији или је функција S другачија. Тако за $N=\{0\}$ тројка $(\{0\}, 0, S)$ испуњава A_2 и A_3, а не испуњава услов A_1 (при чему је S једино могућа функција $S0=0$. За $N=\{0,1\}, S0=S1=1$, тројка $(\{0,1\}, 0, S)$ задовољава услове A_1 и A_3, али не испуњава услов A_2. Најзад, за скуп N природних бројева у стандардном моделу M_0 узмимо функцију S тако да буде $Sx=x+2$, $x=0, 1, 2, \ldots$ (у циљу упрошћавања нотације антиципирамо овде операцију сабирања у стандардном моделу). Тада је A_1 задовољен услов, јер је $Sx \neq 0$ за свако x из N. Даље је за $x \neq y$, $x, y \in N$ увек и $Sx \neq Sy$ па је задовољен и аксиом A_2. Нека је међутим, G скуп парних бројева. Тада је $0 \in G$; а из $x \in G$ следи $Sx \in G$, како је, међутим, ипак $G \neq N$, то аксиом A_3 није задовољен.

Теореме као што су

a) Из $y \neq Sx$ за свако x из N следи $y=0$,

b) За свако x из N важи $x \neq Sx$,

важе у сваком Пеановим моделу. Међутим, за доказ прве од њих довољан је аксиом индукције A_3, док је за доказ друге потребно искористити и аксиом A_1 поред A_3. Ова прва теорема важи, дакле, у свим индуктивном моделима усвајајући термин *индуктивни модел* за оне системе у којима важи аксиом индукције – док друга теорема важи само у Пеановим моделима.

2. Операције сабирања, множења и експоненцирања у индуктивним и Пеановим моделима

Операције сабирања и множења уводе се на познати начин примитивном рекурзијом уз коришћење функције S.

Дефиниционе једнакости за сабирање су

$$2.1.\ x+0=x \text{ за свако } x \text{ из } N;$$

$$2.2\ x+Sy=S(x+y) \text{ за свако } x, y \text{ из } N.$$

Тако је

$$x+1=x+S0=S(x+0)=Sx,$$

па се види да је Sx замена за $x+1$ (или обрнуто).

За множење важи

$$2.3.\quad x.0=0,$$

$$2.4\quad x.Sy=(x.y)+x.$$

Тако је $x.\ 1=x.S0=(x.0)+x=0+x=x$. Тако се показује да су сабирање и множење свуда дефинисани и да имају особине комутативности, асоцијативности и дистрибутивности. Наведене дефиниције сем тога *једнозначно* одређују ове операције.

За степеновање важи следећа дефиниција:

$$2.5\quad x^0=1$$

$$2.6\quad x^{Sy}=x^y.x.$$

Тако се за дефиницију сабирања користи индукција, за множење се користи сабирање, а за степеновање се користи множење. Може се показати да важи

Теорема 1. – *У сваком индуктивном моделу једнозначно се уводи сабирање условима 2.1., 2.2.*

Пошто се операција множења своди на сабирање важи и

Теорема 2. – *У сваком индуктивном моделу једнозначно се уводи и операција множења условима 2.3, 2.4.*

Иако се степеновање своди на множење и сабирање, операција степеновања није у индуктивном моделима једнозначно одређена условима 2.5, 2.6. То показује пример тројке $(\{0,1\}, 0, S)$, где је $S0=1, S1=0$. Овде би морало бити с једне стране

$$0^0=S0=1$$

према 2.5, а с друге

$$0^0 = 0^{S1} = (0.1).\ 0 = 0,$$

према датој дефиницији функције S и на основу особина множења. Ова два резултата су у контрадикцији, па у *индуктивном моделу експоненцирање није једнозначно* одређено условима 2.5, 2.6. Докази за једнозначну одређеност сабирања и множења у индуктивним моделима могу се наћи у [1].

3. Модели за Пеанове аксиоме

Узимајући у стандардном моделу уместо N подскуп G који чине чланови неке аритметичке прогресије, добићемо моделе који задовољавају A_1, A_2, A_3 уз одговарајуће замене. Тако имамо

Модел M_1 чини тројка (G, a, T) где је $a \in G$, $Tx = x + d$ за свако x из G и d из N. Ту је, дакле,

$$G = (a,\ a+d,\ a+2d, \ldots)$$

За $a=0$ и $d=1$ враћамо се из M_1 на стандардни модел M_0, а за $a=0$ и $d=2$ добијамо скуп парних бројема, за $a=1$ и $d=2$ добијамо скуп непарних бројева итд.

Користећи множење као операцију S, можемо дефинисати

Модел M_2 чини тројка (G, a, T) где је сад $a \in G$, $a \neq 0$ $Tx = x.q$ за свако x из G и неко $q \neq 0,1$ из N. Скуп G сада чине чланови геометријске прогресије

$$G = (a,\ aq,\ aq^2, \ldots)$$

За увођење даљих модела који као операцију имају степеновање уведимо *уопштено степеновање* на следећи начин: оператор сабирања ћемо означити са S_1, множења са S_2, степеновања са S_3 а уопштеног степеновања са S_4, S_5 итд. на основу дефиниционих релација ([4]):

3.1. $S_1(x, 0) = x$ (t. j. $x + 0 = 0$)

$S_1(x, Sy) = S_1(x, S_1(x, y))$ (t. j. $x + (y+1) = (x+y) + 1$).

3.2. $S_2(x, 0) = 0$ (t. j. $x \cdot 0 = 0$).

$S_2(x, Sy) = S_1(x, S_2(x, y))$ (t. j. $x(y+1) = x + xy$).

3.3. $S_3(x, 0) = 1$ (t. j. $x^0 = 1$)

$S_3(x, Sy) = S_2(x, S_3(x, y)$ (t. j. $x^{y+1} = x^y \cdot x$).

Оваквим транскрибовањем раније уведених операција сабирања, множења и степеновања налазимо да је листу операција могуће наставити:

3.4. $S_4(x, 0)=1,$ (tj. $x^{\cdot^{\cdot^{x}}}\}0$ пута $=1$)

$S_4(x, Sy)=S_3(x, S_4(x, y)$ (tj. $x^{\cdot^{\cdot^{x}}}\}y+1$ пута $=x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}\}y$ пута).

На тај начин је представљено прво уопштење степена, а заједнички опис свих осталих као и ових већ описаних, гласи онда овако:

3.5. $S_{n+1}(x, 0)=1,$

$S_{n+1}(x, Sy)=S_n(x, S_{n+1}(x, y)),$ $n=2, 3, \ldots$

Ове операције дефинисане су за све вредности x, y из N. Сада је лако дефинисати скуп $G\subset N$ за који ће операција сукцесије бити такав уопштени степен. На тај начин имамо:

Модел M_3 *је тројка* (G, a, T) *где је* $a\neq 0{,}1$ *и где је* $Tx=S_3(x, q)$ *за свако* x *из* G *и свако* $q\neq 0{,}1$ *и* N. Овде је дакле $G=\{a, a^q, a^{q^2},..\}$ или $G=\{a, S_3(a, q), S_3(a, (S_3a,q)\ ),..\}$. ($q$ је фиксно и то више нећемо понављати).

Модел M_4 *је тројка* (G, a, T) *где је* $a\neq 0{,}1$ *а* $Tx=S_4(x, q)$ *за свако* x *из* G *и свако* $q\neq 0{,}1$ *из* N. Овде је сад

$$G=\{a, S_4(a, q), S_4(a, S_4(a, q),..\},$$

$$G=\{a, a^{\cdot^{\cdot^{a}}}\}q \text{ пута}, a^{\cdot^{\cdot^{a}}}\}(a^{\cdot^{\cdot^{a}}}\}q \text{ пута}) \text{ пута},..\}.$$

У општем случају важи дакле:

Модел M_n *је тројка* (G, a, T) *где је* $a\neq 0{,}1$ *а* $Tx=S_n(x, q)$ *за свако* x *из* G $q\neq 0{,}1$ из N. Овде је према томе

$$G=\{a, S_n(a, q), S_n(a, S_n(a, q)),..\}.$$

Кад n расте, бројеви из G све ређе су смештени у N. Упркос томе сваки од наведених модела има своје „сабирање", своје „множење", „степеновање" итд. Уопштени модел има своје уопштено степеновање и процес се може настављати са сваким M_k у улози M_0. Ево, на пример, како изгледа „сабирање" у M_2.

Нека је $x=aq^{m-1}$, $y=aq^{n-1}$, тада је $x+y=z=aq^{m+n-1}=xyq/a$, где су q и a фиксни па комбинацију xyq/a називамо „сабирање" у M_2 (дељење са a овде је привидно и уведено је ради скраћивања нотације).

„Множење” у M_2 према предњем такође се једнозначно уводи. Ознака за то нека је $*$ па ћемо имати

$$x*y=aq^{n-1}*aq^{m-1}=u=aq^{mn-1}.$$

Из $x=aq^{n-1}$ следи логаритмовањем по основи q:

$$n=log(x/a)+1,$$

па исто тако

$$m=log(y/a)+1,$$

те је

$$x*y=u=aq^{t},$$

где је

$$t=(1+log(x/a))(1+log(y/a)+1)-1$$

(уз напомену да је појава логаритама привидна и овде узета због олакшица у нотацији).

Јасно је да се овако у сваком Пеановом моделу може увести свака операција, па се у општем моделу M_n може увести уопштено степеновање реда k, да се, сем тога, сваки од ових модела може узети за полазни и у њему вршити даље „прорећивање” увођењем нових модела итд.

У свему овоме може се спроводити и аритметика у којој би сваки модел имао своје „просте бројеве”, своје „разлагање на факторе” итд. Ефективно спровођење оваквог једног програма могло би бити од користи и за проучавање основног модела M_0 (Читаоцу се оставља да за моделе које смо увели докаже важење аксиома A_1, A_2, A_3)).

4. **Изоморфизам модела**

Поменули смо већ да су аксиоми за Пеанов модел M_0 категорични, то јест да важи

Теорема 4.1. – *Свака два модела који задовољавају услове* A_1, A_2, A_3 *међусобно су изоморфна.*

То значи да постоји такво узајамно једнозначно пресликавање f између елемената тих модела да важи $f(a)=l$ где је a истакнути елеменат једног модела а b истакнути елеменат оног другог и да је $f(Sx)=T(x)$ за свако x из првог модела где је S операција сукцесије првог модела, а T операција сукцесије другог модела.

Ови услови, дефинишу у ствари *хомоморфизам.*

У [1] читалац може да нађе доказ следеће теореме:

Теорема 4.2. – *Нека је* $M_0=(N, 0, S)$ *Пеанов модел а* $M'=(N', 0', S')$ *какав било други модел. Тада потребан и довољан услов, да би модел* M' *био хомоморфна слика модела* M *јесте да* M' *буде индуктиван модел.*

Ова теорема на веома садржајан начин објашњава улогу аксиома индукције (више о овом видети у [2],[3]). Скуп природних бројева заузима посебно место у математици, а аксиом индукције битан је за описивање структуре тога скупа. Сви модели који треба да испуњавају услов хомоморфије са M_0 морају бити индуктивни, а ако треба да испуњавају и услов изоморфизма са M_0 онда морају испуњавати комплетан списак Пеанових аксиома наведених овде као A_1, A_2. A_3.

Све ово не значи да одступања од тих аксиома не може бити. Напротив, нека одступања дају друге структуре, различите од структуре скупа природних бројева, које могу бити од интереса. Читаоце, примера ради, упућујемо на Евансов чланак [5], у коме се разматра систем аксиома сличан Пеановом али, за неасоцијативне структуре.

5. **Аритметика у општем Пеановом моделу**

Ову проблематику треба тек почети разрађивати. Због теореме о изоморфизму M_0 са M_n, јасно је да сваки став из стандардног модела M_0 може да се пренесе у било који други модел с одговарајућим модификацијама. Тако у моделу M_4, који се састоји од циновских степена природних бројева, постоји аритметичка прогресија". Она има „збир" и образац за збир мора бити онај „исти" за који знамо из обичне аритметике. У том моделу постоји и „геометријска прогресија" и она има „збир" за који образац такође треба да гласи „исто" онако као и у обичној аритметици, постоје уопштени степени унутар већ уведених уопштених степена итд. Треба тек утврдити шта се може све урадити у овој проблематици. Уколико то није тривијално, преношење ставова из једног скупа у други може бити од интереса за оба.

LITERATURA

[1] L. Henkin: On mathematical induction – *Amer. math. monthly v. 67* No. 4 (1960)

[2] A. Margaris: Successor axioms for the integers – *Amer, math Monthly v. 68* No. 5 p 441—444 (1961)

[3] M. D. Darkow: Interpretations of the Peano postulates *Amer. math. Monthly v. 64* No. 4 p 270—271 (1957)

[4] H. Hermes: Aufzahlbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit – New York. 1971

[5] Evans Trevor: Nonassociative Number theory – *Amer. math. monthly* vol. *64*. No. 5 pp 299—309 (1957)

M. Stojaković

ON INDUCTIVE AND PEANO MODELS

Abstract

A Peano model M is any triplet (N, o, S) where N is a set (of „natural numbers"), o is the element of N and S is a function from N to N for which the following conditions are valid:

A_1: $Sx \neq \mathrm{o}$ for every x in N.

A_2: For all x, y in N if $x \neq y$ then $Sx \neq Sy$.

A_3: If G is any subset of N and from $0 \in G$ and $x \in G$ it

follows that $Sx \in G$, then $G = N$.

An inductive model is any triplet M in which only A_3 is guaranteed.

Let S_1, S_2 be the respective binary operations $x+y$, $x.y$ over N, that is $S_1(x, y) = x+y$, $S_2(x, y) = xy$; then from the defining relations

$$S_1(x, 0) = x \text{ (for all } x \text{ in } N)$$

$$S_1(x, Sy) = S_0(x, S_1(x, y)) \text{ (for all } x, y \text{ in } N \text{ where } S_0\ (u, v) = Sv)$$

$$S_2(x,0) = 0$$

$$S_2(x, Sy) = S_1(x, S_2(x, y)),$$

we define the binary operation $S_3(x, y) = x^y$ by means of the relations

$$S_3(x, 0) = 1,$$

$$S_3(x, Sy) = S_2(x, S_3(x, y))$$

which obviously generalizes by analogy to

$$S_n(x,0) = 1$$

$$S_n(x, Sy) = S_{n-1}(x, S_n(x, y))$$

We claim now that the triplet

$$M_n(a, q) = (G, a, T),\ n = 1, 2. 3\ldots$$

is a Peano model where

$$a \in G;\ a \in N,\ a \neq 0, 1;\ q \in N,\ q \neq 0,1 \text{ and for all } x \text{ in } N \text{ we have } Tx = S_n\ (x, q),$$

the set G being

$$\{a, S_n(a, q), S_n(a, S_n\ (a, q), \ldots\}.$$

Some relations between Peano models and inductive models are described and some features of the arithmetics in these general models are discussed.