NOVI SAD J. MATH.
VOL. 29, NO. 3, 1999, 211–220
XII Yugoslav Geometric Seminar
Novi Sad, October 8–11, 1998

SYSTÈMES DYNAMIQUES DIFFERÉNTIELLES À CONTRÔLE OPTIMAL, FORMULATION LAGRANGIENNE (II)

V. Obădeanu **M. Neamţu**
Department of Mathematics,
West University of Timişoara, Romania
Email address: obadeanu@info.uvt.ro

Abstract

Dans [2] ont été considérés des systèmes dynamiques de premier ordre à contrôle, pour lesquels le nombre des paramètres d'état et contrôle a été paire. Dans ce qui suit on considére le cas dans lequel ce nombre est impaire. Comme application on étudie l'oscilateur harmonique à contrôle, dans le cas dans lequel la force d'amortissment est grande.

AMS Mathematics Subject Classification (1991): 73K40, 70D10.
Key words and phrases: Dynamical Systems, Optimal Control.

1. Soit donné le système dynamique:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^h) \ (i, h = \overline{1, n = 2p+1}) \tag{1}$$

à un nombre impaire de paramêtres d'état [3]. À celui-ci on associe une nouvelle équation:

$$\dot{x}^{n+1} = f^{n+1}(t, x^h, x^{n+1}) \tag{2}$$

telle qu'on obtient le système:

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(t, x^\beta) \ (\alpha, \beta = \overline{1, n+1 = 2p+2}). \tag{3}$$

Considérons le cas spécial dans lequel la nouvelle variable x^{n+1}, appelée "variable catalyseur" satisfait la condition $f^{n+1} = 0$. On a donc le système:

$$\begin{cases} \dot{x}^i = f^i(t, x^h), & (i = \overline{1, n = 2p+1}), \\ \dot{x}^{n+1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Pour le système (4) on cherche un facteur intégrant écrit sous la forme générale $(C_{\alpha\beta})$, avec $C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} = 0$, $det\,(C_{\alpha\beta}) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} & C_1 \\ -C_{12} & 0 & C_{23} & \dots & C_{2n} & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -C_{1n} & -C_{2n} & -C_{3n} & \dots & 0 & C_n \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & \dots & -C_n & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

où on a supposé l'antisymétrie des coefficients et on a utilisé la notation $C_{i,n+1} = C_i$.

Nous supposerons que ce facteur intégrant est indépendant de la variable x^{n+1}. Par la multiplication du système (4) par le facteur (5) on obtient le système équivalent:

$$\begin{cases} C_{ij}\dot{x}^j + C_i\dot{x}^{n+1} - C_{ij}f^j = 0, \\ -C_i x^i + C_i f^i = 0, \end{cases} \tag{6}$$

système mis sous la forme principale $C_{\alpha\beta}x^\beta + D_\alpha = 0$ et où:

$$\begin{cases} D_i = -C_{ij}f^j, \\ D_{n+1} = C_i f^i. \end{cases} \tag{7}$$

Les conditions d'auto-adjonction (écrites pour le système (6)), sont:

$$\begin{cases} det\,(C_{\alpha\beta}) \neq 0, C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} = 0 \quad \text{(par définition)}, \\ \frac{\partial C_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial C_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial C_{hi}}{\partial x^j} = 0, \quad (i,j,h = \overline{1,n}), \; \frac{\partial C_i}{\partial x^j} - \frac{\partial C_j}{\partial x^i} = 0 \\ \frac{DC_{ij}}{Dt} + \frac{\partial f^h}{\partial x^i}C_{hj} + C_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} = 0, \frac{DC_i}{Dt} + C_h\frac{\partial f^h}{\partial x^i} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + f^h\frac{\partial}{\partial x^h}$.

Si on connait un facteur intégrant, solution du système (8), alors la 2-forme de Lagrange s'écrit:

$$\Omega = \frac{1}{2}C_{ij}dx^i \wedge dx^j + D_i dx^i \wedge dt + (C_i dx^i - D_{n+1}dt) \wedge dx^{n+1}. \tag{9}$$

Cette forme a la propriété d'être fermée, en base des conditions d'auto-adjonction que le facteur intégrant satisfait. Il existe donc, localement, la 1-forme de Poincaré-Cartan:

$$\theta = A_i dx^i + A_{n+1}dx^{n+1} + B\,dt, \tag{10}$$

telle que $d\theta = \Omega$ et, par consequent, le lagrangien:

$$L = A_i \dot{x}^i + A_{n+1}\dot{x}^{n+1} + B. \tag{11}$$

Les coefficients A_i et B de (11) sont, généralement, des fonction de t, x^i et x^{n+1}, tandis que les équations d'Euler-Lagrange correspondantes à L, sont des combinaisons linéaires des équations (4).

Théorème. *Le système des équation (4) admet une fonction de Lagrange (11), pour laquelle la variable x^{n+1} est une variable cyclique et par concequent, l'impulsion généralisé conjugué est une intégrale première.*

En effect, les coefficients de (9) sont indépendants de x^{n+1} et la forme

$$\varphi = C_i dx^i - D_{n+1}dt$$

este fermée (localement $\varphi = dp$). On met ainsi en évidence les 2-formes:

$$\Omega = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta + D_\alpha dx^\alpha \wedge dt$$

$$\omega = \frac{1}{2}C_{ij}dx^i \wedge dx^j + D_i dx^i \wedge dt$$

avec la propriété $\Omega = \omega + \varphi \wedge dx^{n+1}$. **2.** Soit maintenant, en particulier, le cas

dans lequel le nombre des paramètres d'état est trois: $\dot{x}^i = f^i(t, x^h)$, $(i = 1, 2, 3)$, système auquel on ajoute et l'équation $\dot{x}^4 = 0$. On fait le changement de notations: $C_{ij} = X^h$, $((i, j, h) \sim (1, 2, 3))$ et $C_{i4} = C^i$. Les équations (8_2) s'écrivent sous la forme:

$$div\, X = 0, \;\; rot\, C = 0,$$

tandis que les premières de (8_2) sous la forme:

$$\frac{DX}{Dt} = [A - (div\, f)I]\, X, \quad A = \left(A^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right). \tag{12}$$

Pour l'intégration des équations (12), on associe à celles-ci:

$$\frac{DY}{Dt} = AY, \; \frac{DZ}{Dt} = -div\, f \cdot Z \tag{13}$$

Avec les solutions de (13) on obtient les solutions de (12) par:

$$X^i = ZY^i. \tag{14}$$

La deuxième des équations de (8_3) est:

$$\frac{DC}{Dt} = -A^t C. \tag{15}$$

Si les fonctions f^i sont linéaires en x^h, alors on peut déterminer un facteur intégrant fonction seulement de t. **3.** Soit maintenant l'oscillateur

harmonique avec amortissement et contrôle, donné par l'équation:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = u, \;\; c, \omega^2 \in \mathbf{R}^+, c > 2\omega, \tag{16}$$

et une fonctionnelle de la forme:

$$\mathcal{J}(x) = \int_{t_o}^{t} [h_o(t) + h_1(t)x + h_2(t)\dot{x}]\, dt. \tag{17}$$

A l'équation (16) on associe l'équation caractéristique $r^2 + cr + \omega^2 = 0$, ayant les racines $r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}$, à l'aide desquelles on obtient la solution générale de l'oscillateur à contrôle nul.

Nous nous posons le problème de déterminer la fonction de contrôle $u = u(t)$, et la fonction d'évolution $x = x(t)$, avec les conditions initiales données: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $u(t_0) = u_0$, telle que la fonctionnelle $\mathcal{J}(x)$ soit optime.

L'équation (16) avec les notations $x = x^1$, $\dot{x} = x^2$, $u = x^3$ on la remplace par le système équivalent:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -\omega^2 x^1 - c x^2 + x^3, \end{cases} \tag{18}$$

auquel on ajoute de plus et l'équation:

$$\dot{x}^3 = g x^3 + \gamma. \tag{19}$$

Le système formé par (18) et (19) est un système a un nombre impaire de paramètres d'état et comande pour lequel on applique les considérations théoriques précédentes. On ajoute l'équation de catalyse:

$$\dot{x}^4 = 0, \tag{20}$$

et on obtient, finalement, le système à un nombre pair de paramêtres:

$$
\begin{cases}
\dot{x}^1 = x^2, \\
\dot{x}^2 = -\omega^2 x^1 - cx^2 + x^3, \\
\dot{x}^3 = gx^3 + \gamma, \\
\dot{x}^4 = 0.
\end{cases}
\tag{21}
$$

Pour ce système linéaire, nous chercherons un facteur intègrant de la forme (5).

En multipliant les équations (21) par ce facteur et en utilisant la notations: $C_{ij} = X^h$, on arrive à:

$$
\begin{cases}
\frac{dX^1}{dt} = (c-g)X^1 + X^2, \\
\frac{dX^2}{dt} = -\omega^2 X^1 - gX^2 + X^3, \\
\frac{dX^3}{dt} = cX^3.
\end{cases}
\tag{22}
$$

Puisque les coefficients de ce système sont variables ($g = g(t)$), son intégration conduit à la résolution d'une équations de type Riccati, qui généralement ne peut pas s'intégrer.

Mais associons à celui-ci la première équation de (13), on a:

$$
\begin{cases}
\frac{dY^1}{dt} = Y^2, \\
\frac{dY^2}{dt} = -\omega^2 Y^1 - cY^2 + Y^3, \\
\frac{dY^3}{dt} = gY^3.
\end{cases}
\tag{23}
$$

La dernière équations de (23) a la solution:

$$
Y^3 = e^{\int g\,dt},
$$

tandis que les premières deux s'écrivent sous la forme homogène:

$$
\frac{dY^1}{Y^2} = \frac{dY^2}{-\omega^2 Y^1 - cY^2 + e^{\int g\,dt}} = \frac{dt}{1},
$$

en amplifiant le premier rapport par s et ensuite en additionnant respectivement les numérateurs et les dénominateurs des deux rapports entre eux, on obtient:

$$
\frac{d(Y^2 + sY^1)}{(s-c)[Y^2 - \frac{\omega^2}{s-c}Y^1] + e^{\int g\,dt}} = \frac{dt}{1}.
$$

Si on choisit pour s, une solution de l'équation $s^2 - cs + \omega^2 = 0$ (appelée l'opposée de l'équation caractéristique $r^2 + cr + \omega^2 = 0$), c'est-à-dire:

$$s_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}, \quad \text{avec } s_1 + s_2 = c, s_1 = -r_2, s_2 = -r_1,$$

et on considère l'hypothèse $c > 2\omega$ (amortissment grand), on arrive à l'équation linéaire:

$$\frac{dS}{dt} + (c - s)S = e^{\int g},$$

avec la solution

$$S = e^{(s-c)t} \int e^{(c-s)t} e^{\int g},$$

tel que, pour $s = s_1$ et $s = s_2$, on a respectivement:

$$Y^2 + s_1 Y^1 = e^{-s_2 t} \int e^{s_2 t + \int g},$$

$$Y^2 + s_2 Y^1 = e^{-s_1 t} \int e^{s_1 t + \int g},$$

d'où:

$$(24) \qquad \begin{cases} Y^1 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \left[e^{-s_2 t} \int e^{s_2 t + \int g} - e^{-s_1 t} \int e^{s_1 t + \int g} \right], \\ Y^2 = \frac{-1}{\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \left[s_2 e^{-s_2 t} \int e^{s_2 t + \int g} - s_1 e^{-s_1 t} \int e^{s_1 t + \int g} \right], \\ Y^3 = e^{\int g}. \end{cases}$$

La deuxième équation (13) se transcrit sous la forme:

$$(25) \qquad \frac{dZ}{dt} = (c - g)Z$$

et a donc la solution:

$$(26) \qquad Z = e^{ct - \int g}.$$

Ainsi étant, la solution de l'équation (12), donnée par la formule (14) est:

$$(27) \quad \begin{cases} X^1 = C_{23} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \left[e^{s_1 t - \int g} \int e^{s_2 t + \int g} - e^{s_2 t - \int g} \int e^{s_1 t + \int g} \right], \\ X^2 = C_{31} = \frac{-1}{\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \left[s_2 e^{s_1 t - \int g} \int e^{s_2 t + \int g} - s_1 e^{s_2 t - \int g} \int e^{s_1 t + \int g} \right], \\ X^3 = C_{12} = e^{ct}. \end{cases}$$

La solution trouvée vérifie l'équation (22).

Dans une expression plus simple, on fait les notations suivantes:

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{c^2-4\omega^2}} e^{s_1 t - \int g} \int e^{s_2 t + \int g},$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{c^2-4\omega^2}} e^{s_2 t - \int g} \int e^{s_1 t + \int g},$$

avec lesquelles X^i s'expriment par:

$$X^1 = M_1 - M_2,$$
$$X^2 = -s_2 M_1 + s_1 M_2.$$

Considérons maintenant l'équation (15), qui se transcrit de façon scalaire avec $C_i = C_i(t)$ sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = \omega^2 C_2, \\ \frac{dC_2}{dt} = -C_1 + cC_2, \\ \frac{dC_3}{dt} = -C_2 - gC_3. \end{cases}$$

Ce système admet comme solution:

$$C_1 = \frac{-1}{\sqrt{c^2-4\omega^2}} \left[r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}\right],$$
$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{c^2-4\omega^2}} \left[e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right],$$
$$C_3 = \frac{-1}{\sqrt{c^2-4\omega^2}} e^{-\int g} \int \left[e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right] e^{\int g}.$$

Ainsi étant, le facteur intégrant est complètement déterminé.

Pour la détermination de la fonction de Lagrange, on écrit la forme Ω:

$$\Omega = \frac{1}{2} C_{ij} dx^i \wedge dx^j + D_i dx^i \wedge dt + C_i dx^i \wedge dx^4 - D_4 dt \wedge dx^4$$

localement exacte: $\Omega = d\theta$, où θ est de la forme:

$$\theta = A_i dx^i + A_4 dx^4 + B\, dt.$$

De là il résulte:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = C_{12}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = D_1, \qquad \frac{\partial A_4}{\partial x^i} = C_i,$$

$$(28) \qquad \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = C_{23}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial t} = D_2, \qquad \frac{\partial A_4}{\partial t} = -D_4,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} = C_{31}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial t} = D_3.$$

Avec les notations faites, les coefficients D_i ont les valeurs

$$D_1 = e^{ct}(\omega^2 x^1 + cx^2 - x^3) - (s_2 M_1 - s_1 M_2)(gx^3 + \gamma),$$

$$D_2 = e^{ct}x^2 - (M_1 - M_2)(gx^3 + \gamma),$$

$$D_3 = (s_2 M_1 - s_1 M_2)x^2 - (M_1 - M_2)(\omega^2 x^1 + cx^2 - x^3).$$

Les premières équations de (28), avec les expressions de C_{ij} données par (27), ont une solution exprimée par:

$$A_1 = -\frac{1}{2}e^{ct}x^2 - \frac{1}{2}(s_2 M_1 - s_1 M_2)x^3,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}e^{ct}x^1 - \frac{1}{2}(M_1 - M_2)x^3,$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(M_1 - M_2)x^2 + \frac{1}{2}(s_2 M_1 - s_1 M_2)x^1.$$

De la résolution des autres trois de (26) on obtient:

$$B = \frac{1}{2}e^{ct}[\omega^2(x^1)^2 + cx^1x^2 + (x^2)^2 - x^1x^3] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(\omega^2 + s_2 g)x^1x^3 + (s_1 + g)x^2x^3 + (x^3)^2 + 2s_2\gamma x^1 + \gamma x^2\right] M_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\omega^2 + s_1 g)x^1x^3 + (s_2 + g)x^2x^3 + (x^3)^2 + 2s_1\gamma x^1 + \gamma x^2\right] M_2 + \chi(t).$$

Pour la détermination de la forme fermée $\varphi = C_i dx^i - D_4 dt = dp$ on déduit:

$$p = -\frac{1}{R}\left[r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}\right] x^1 + \frac{1}{R}\left[e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right] x^2 -$$

$$-\frac{1}{R}e^{-\int g} \int \left[e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right] e^{\int g} \cdot x^3 + \frac{1}{R}\int e^{-\int g}\left[\int (e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t})e^{\int g}\right]\gamma,$$

fonction qui, comme on le sait [3], est une intégrale première.

A l'aide de ces coefficients, on construit la fonction de Lagrange L:

$$L = \frac{1}{2}\left[x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1 + \omega^2(x^1)^2 + cx^1x^2 + (x^2)^2 - x^1x^3\right] e^{ct} -$$

$$-\frac{1}{2R}[s_2(x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3) + (x^3\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^3) + (\omega^2 + s_2 g)x^1x^3 +$$

$$+(s_1 + g)x^2x^3 - (x^3)^2 + 2(s_2x^1 + x^2)\gamma]e^{s_1t - \int g}\int e^{s_2t + \int g} +$$

$$+\frac{1}{2R}[s_1(x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3) + (x^3\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^3) + (\omega^2 + s_1 g)x^1x^3 +$$

$$+(s_2 + g)x^2x^3 - (x^3)^2 + 2(s_1x^1 + x^2)\gamma]e^{s_2t - \int g}\int e^{s_1t + \int g} + p\dot{x}^4 + \chi(t). \tag{29}$$

La valeur de la fonction L, calculée le long des trajectoires nous conduit à:

$$L/_{\text{tr}} = -\frac{\gamma}{2R}[s_2 e^{s_1t - \int g}\int e^{s_2t + \int g} - s_1 e^{s_2t - \int g}\int e^{s_1t + \int g}]x^1 -$$

$$-\frac{\gamma}{2R}[e^{s_1t - \int g}\int e^{s_2t + \int g} - e^{s_2t - \int g}\int e^{s_1t + \int g}]x^2 + \chi(t). \tag{30}$$

En égalant cette expression avec celle de l'intégrant de (17), on arrive a: $\chi(t) = h_o(t)$ et

$$\begin{cases} -\frac{\gamma}{2R}[s_2 e^{s_1t - \int g}\int e^{s_2t + \int g} - s_1 e^{s_2t - \int g}\int e^{s_1t + \int g}] = h_1, \\ -\frac{\gamma}{2R}[e^{s_1t - \int g}\int e^{s_2t + \int g} - e^{s_2t - \int g}\int e^{s_1t + \int g}] = h_2. \end{cases} \tag{31}$$

Système duquel nous déterminerons les deux fonctions encore inconnues γ et g, comme suit.

Nous écrivons le système (27) sous la forme:

$$e^{s_1t}\int e^{s_2t + \int g} - s_1 e^{s_2t}\int e^{s_1t + \int g} = -\frac{2Rh_1}{\gamma}e^{\int g},$$

$$e^{s_1t}\int e^{s_2t + \int g} - e^{s_2t}\int e^{s_1t + \int g} = -\frac{2Rh_2}{\gamma}e^{\int g}.$$

En résolvant ce système on obtient:

$$\int e^{s_2t + \int g} = \frac{2}{\gamma}e^{-s_1t}(h_1 - s_1h_2)e^{\int g},$$

$$\int e^{s_1t + \int g} = \frac{2}{\gamma}e^{-s_2t}(h_1 - s_2h_2)e^{\int g}.$$

Ces relations, dérivées et simplifiées, fornissent des fonctions g, qui égalées nous donnent:

$$(32) \qquad \gamma = \frac{2e^{-ct}}{h_2}\left\{\frac{1}{R}[(h_1 - s_1h_2)'(h_1 - s_2h_2) - (h_1 - s_2h_2)'(h_1 - s_1h_2)] - (h_1^2 - ch_1h_2 + \omega^2h_2^2)\right\}.$$

Une fois connue la fonction γ, il résulte par le calcul fait, la fonction g; à l'aide de ces deux fonction, la troixième équation linéare de (21) fournit par intégration, la fonction de commande $u = u(t)$. Par l'intégration de (16) on obtient aussi l'équation l'évolution.

Bibliographie

[1] V. Obădeanu, Formulation lagrangienne du problème d'optimisation des systèmes dynamiques à contrôle optimal. Buletin Ştiinţific I.P.B. Scientific Bulletin Polytechnic Institute of Bucharest. Electrical Engineering, Vol. 53 Nr. 34 (1991), p. 231-234.

[2] V. Obădeanu, M. Neamţu, Systèmes dynamiques différentiels à contrôle optimal, formulation lagrangienne (I), Pannonial Applied Mathematical Meetings, Interuniversitary Network, Arad, 1998 (à paraître).

[3] V. Obădeanu, D. Opriş, Le probleme inverse en biodynamique, Seminarul de mecanică nr. 33, Universitatea Timişoara, (1991).

[4] C. Udrişte, Linii de câmp. Editura Tehnică, Bucureşti, (1988).

[5] R. Voinea, D. Voiculescu, P. Simion, Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie, Editura Academiei RSR, Bucureşti, (1989).