Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 23, 1 (1993), 331 - 346

Review of Research
Faculty of Science
Mathematics Series

BESTMÖGLICHE ABSCHÄTZUNGEN FÜR SPEZIELLE MITTELWERTE

Horst Alzer
Morsbacher Str. 10, 5220 Waldbröl
Deutschland

Abstract

We denote by $L(x,y)$, $I(x,y)$, and $L_r(x,y)$ the logarithmic mean, the identric mean, and the Lehmer mean (of order r; r real) of positive real numbers x and y, i.e.,

$$l(x,y) = \frac{x-y}{\ln(x)-\ln(y)}, \quad x \neq y, \quad L(x,x) = x,$$

$$I(x,y) = \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)}, \quad x \neq y, \quad I(x,x) = x,$$

and

$$L_r(x,y) = \frac{x^{r+1}+y^{r+1}}{x^r+y^r}.$$

The aim of this paper is to present sharp upper and lower Lehmer mean bounds for $L(x,y), I(x,y), (L(x,y)I(x,y))^{1/2}$, and $\frac{1}{2}(L(x,y)+I(x,y))$.

AMS Mathematics Subject Classifications (1991): 26D15
Key words and phrases: Mean values, inequalities.

1. Einleitung

In einer im Jahre 1938 erschienenen Arbeit hat C.Gini [17] für reelle Parameter r und s sowie für positive reelle Zahlen $x_1, ..., x_n$ $(n \in N)$ die Funktionenschar

$$G(r,s;x_1,...,x_n) := \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^r / \sum_{i=1}^{n} x_i^s\right]^{1/(r-s)}, \quad r \neq s,$$

$$G(r,s;x_1,...,x_n) := \exp[\sum_{i=1}^{n} x_i^r \ln(x_i) / \sum_{i=1}^{n} x_i^r]$$

eingeführt.

Elementare Rechnungen ergeben:

$$\min(x_1,...,x_n) \leq G(r,s;x_1,...,x_n) \leq \max(x_1,...,x_n),$$

$$G(r,s;x_1,...,x_n) = G(r,s;x_{j(1)},...,x_{j(n)})$$

für jede Permutation j der Index Menge $\{1,...,n\}$,

$$cG(r,s;x_1,...,x_n) = G(r,s;cx_1,...,cx_n)$$

für alle $c > 0$.

Bei G handelt es sich also um eine zweiparametrige Familie von homogene symmetrischen Mittelwerten, die u.a. das bekannte Potenz Mittel

$$M_r(x_1,...,x_n) = G(r,0;x_1,...,x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1^r\right]^{1/r}, \quad r \neq 0,$$

$$M_0(x_1,...,x_n) = G(0,0;x_1,...,x_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/n}$$

als Spezialfall enthält.

Für die einparametrige Mittelwertfamilie

$$L_r(x_1,...,x_n) = G(r+1,r;x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+1} / \sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

ist von H.W.Gould und M.E.Mays [18] die Bezeichnung Lehmer Mittel gewählt worden.

D.H.Lehmer [24] war einer der ersten Mathematiker, der sich mit den Mittelwerten $L_r(x,y)$ beschäftigte. Angeregt durch die berühmten Arbeiten von C.F.Gauß[16] über das arithmetisch - geometrische Mittel untersuchte er Funktionen $M \times M^*(u,v)$, die er als Grenzwert rekursiver Folgen definierte:

Wenn

$$a_0 := u, \quad b_0 := v,$$

$$a_{n+1} := M(a_n, b_n), \quad b_{n+1} := M^*(a_n, b_n), \quad 0 \le n \in Z,$$

dann

$$M \times M^*(u,v) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

sofern beide Grenzwerte existieren und gleich sind.

Bei M und M^* handelt es sich in Lehmers Arbeit um Mittelwerte aus den Familien $M_r(x,y)$ und $L_r(x,y)$ (vgl. [10], [11], [13]).

Falls die Zahlen $x_1, ..., x_n$ nicht alle gleich sind, dann ist das Potenz Mittel $M_r(x_1, ..., x_n)$ bekanntlich eine bezüglich r in $\mathbf{R}$ streng monoton steigende Funktion [29, p. 76].

E.F.Beckenbach [6] hat bewiesen, daßauch $L_r(x_1, ..., x_n)$ bezüglich r in $\mathbf{R}$ streng monoton steigt, wenn die Werte $x_1, ..., x_n$ nicht alle gleich sind.

Bemerkenswert ist eine vor kurzem veröffentlichte Note von D. Farnsworth und R. Orr [15] in der gezeigt worden ist, wie sich das Lehmer Mittel $L_r(x,y)$ für ganzzahlige Parameter r geometrisch interpretieren läßt.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $G(x_1, ..., x_n)$ und $A(x_1, ..., x_n)$ das geometrische und das aritmetische Mittel von $x_1, ..., x_n$.

Ohne Schwierigkeiten beweist man für alle reellen Zahlen r und für alle positiven Werte x und y :

$$G(x,y) \le \sqrt{L_r(x,y)L_{-r}(x,y)}$$

$$\le \frac{1}{2}(L_r(x,y) + L_{-r}(x,y)) = A(x,y). \tag{1.1}$$

(Vgl. [15]; die linke Ungleichung von (1.1) ist äquivalent zu $(x-y)^2 \ge 0$.)

Eine enfache Verallgemeinerung von (1.1) führt zu folgender Verschärfung der bekannten Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von n positiven Zahlen durch Lehmer Mittel:

$$G(x_1, ..., x_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} G(x_i, x_{i+1})\right]^{1/2} \leq \left[\prod_{i=1}^{n} L_r(x_i, x_{i+1}) L_{-r}(x_i, x_{i+1})\right]^{1/2n}$$

$$\leq \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(L_r(x_i, x_{i+1}) + L_{-r}(x_i, x_{i+1}))\right]^{1/n}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n} A(x_i, x_{i+1})\right]^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_{i+1}) = A(x_1, ..., x_n).$$

Diese Abschätzungen gelten für alle reellen r und für alle positiven Zahlen $x_1, ..., x_n$, $x_{n+1} := x_1$, $n \in N$.

Weitere Eigenschaften von L_r findet man in [6], [15] und [18].

Die zweiparametrige Mittelwertfamilie

$$E(r, s; x, y) := \left[\frac{s}{r} \frac{x^r - y^r}{x^s - y^s}\right]^{1/(r-s)}, \; r \neq s, \; rs \neq 0, \; x \neq y,$$

mit reellen Parametern r und s sowie positiven reellen Variablen x und y, ist im Jahre 1975 von K.B. Stolarsky [34] eingeführt und seither in mehreren Arbeiten von diversen Autoren intensiv untersucht worden (siehe [2], [5], [18], [22], [23], [35]).

Gould und Mays [18] haben bewiesen, daßdie drei klassischen Mittelwerte:

das arithmetische Mittel:	$E(2, 1; x, y) = L_0(x, y) = (x + y)/2$,
das geometrische Mittel:	$E(r, -r; x, y) = L_{-1/2}(x, y) = (xy)^{1/2}$,
und das harmonische Mittel:	$E(-2, -1; x, y) = L_{-1}(x, y) = 2xy/(x + y)$

die einzigen Mittelwerte sind, die beiden Familien: $E(r, s; x, y)$ und $L_r(x, y)$ angehören.

Einfache Grenzwertberechnungen ergeben, daßsich $E(r, s; x, y)$ für alle reellen Parameter r und s definieren läßt. Insbesondere enthält E das logarithmische Mittel

$$L(x, y) := E(1, 0; x, y) = \frac{x - y}{\ln(x) - \ln(y)}$$

sowie das sogenannte identric mean

$$I(x,y) := E(1,1;x,y) = \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)}$$

als Spezialfälle.

Das logarithmische Mittel spielt bei einer Reihe von praktischen Problemen aus Physik und Wirtschaftswissenschaft eine wichtige Rolle (vgl. [28], [32], [33]) und ist darüber hinaus Gegenstand zahlereicher rein - mathematischer Abhandlungen (siehe [2-5], [7-14], [18-23], [25-270, [29-32], [34-36]).

Die Bedeutung des identric mean für die Familie E kommt in der von Stolarsky [34] entdeckten Formel

$$E(r,s;x,y) = \exp \frac{1}{r-s}\int_s^r \frac{1}{t}\ln\ I(x^t,y^t)dt$$

zum Ausdruck.

Der Erste, der sowohl das logarithmische Mittel als auch das identric mean in die mathematische Literatur eingeführt hat, scheint K. Knopp gewesen zu sein. In seinem erstmals im Jahre 1921 erschienenen Werk "Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen" heißt es:

"Das Intervall $a...b$, $(0 < a < b)$, werde in n gleiche Teile geteilt; $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ seien die Teilpunkte ($x_0 = a$, $x_n = b$). Man zeige, daßderen geometrisches Mittel

$$\sqrt[n+1]{x_0 x_1 x_2 ... x_n} \to \frac{1}{e}(b^b/a^a)^{1/(b-a)} = \exp(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log x dx)$$

und ihr harmonisches Mittel

$$\frac{n+1}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}} \to \frac{b-a}{\log b - \log a}$$

strebt. "[21, p. 110], vgl. [19].

Insbesondere hat Knopp auf diese Weise die für alle positiven Zahlen a und b gültige Abachätzung $L(a,b) \leq I(a,b)$ bewiesen.

Für die beiden Mittelwerte L und I sind eine Vielzahl von Ungleichungen veröffentlicht worden. In [1], [3], [23], [25] und [35] wird gezeigt, wie sich L und I sowie das geometrische und das arithmetische Mittel von L und I mit

Hilfe des Potenz Mittels abschätzen lassen. Für alle positiven x und y (mit $x \neq y$) gelten folgende Ungleichungen:

$$M_0(x,y) < L(x,y) < M_{1/3}(x,y), \tag{1.2}$$

$$M_{2/3}(x,y) < I(x,y) < M_{\ln(2)}(x,y), \tag{1.3}$$

$$M_0(x,y) < \sqrt{L(x,y)I(x,y)} < M_{1/2}(x,y), \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)) < M_{1/2}(x,y).$$

Alle diese Abschätzungen sind optimal in dem Sinne, daßder Parameter auf der linken Seite nicht durch eine größere Zahl und der Parameter auf der rechten Seite nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Die in [3] vermutete Ungleichung

$$M_{\ln(2)/(1+\ln(2))}(x,y) < \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)), \quad x \neq y,$$

ist bisher weder bewiesem noch widerlegt worden.

In dieser Note werden wir zeigen, wie sich jeder der vier Mittelwerte: L, I, $\sqrt{LI}$ und$\frac{1}{2}(L+I)$ durch Lehmer Mittel (zweier Veränderlicher) bestmöglich nach oben und nach unten abschätzen läßt.

2. Ungleichungen für L und I

Mit dem Problem, wie sich das logarithmische Mittel nach unten hin bestmöglich durch L_r abschätzen läßt, hat sich J. Karamata in einer im Jahre 1960 erschienenen Arbeit beschäftigt. Die von Karamata gefundene Ungleichung

$$L_{-1/3}(x,y) < L(x,y), \quad x \neq y, \tag{2.1}$$

spielt bei der Lösung einer von S. Ramanujan gestellten Aufgabe eine wichtige Rolle (siehe [20]). Einen eleganten Beweis für (2.1) findet man in [29, p. 272].

Auf Grund der für alle hinreichend kleinen Zahlen t gültigen Beziehung

$$L(1, 1+t) - L_r(1, 1+t) = -\frac{1}{4}(r + \frac{1}{3})t^2 + \ldots$$

kann in (2.1) der Parameter $-1/3$ durch keine größere Zahl ersetzt werden.

Da das Potenz Mittel $M_r(x,y)$ (mit $x \neq y$) bezüglich r in $\mathbf{R}$ streng monoton steigt, folgt nach (1.2):

$$L(x,y) < M_1(x,y) = L_0(x,y), \quad x \neq y.$$

Wir beweisen nun, daßdas arithmetische Mittel von x und y innerhalb der Familie $L_r(x,y)$ die kleinste obere Schranke für L ist.

Dazu nehmen wir an, es gibt eine Zahl $r \in (-1/3, 0)$, so daßfür alle positiven x und y gilt:

$$L(x,y) < L_r(x,y), \quad x \neq y.$$

Setzen wir $y = 1$, dann folgt für $x \in (0,1)$:

$$\frac{x^{r+1}+1}{x-1} < \frac{x^r+1}{\ln(x)};$$

lassen wir x gegen 0 streben, so erhalten wir: $-1 \leq -\infty$. Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen.

Satz 2.1. *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$L_{-1/3}(x,y) < L(x,y) < L_0(x,y). \tag{2.2}$$

In (2.2) kann weder $-1/3$ durch einen größeren Wert noch 0 durch einen kleineren Wert ersetzt werden.

Bemerkung. Ein Vergleich der beiden Doppelungleichungen (1.2) und (2.2) zeigt, daßdas Potenz Mittel eine schärfere obere Schranke für L liefert als das Lehmer Mittel, wohingegen bei der Abschätzung von L nach unten das Lehmer Mittel basser geeignet ist, denn es gilt:

$$M_0(x,y) = L_{-1/2}(x,y) < L_{-1/3}(x,y), \quad x \neq y.$$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden wir das identric mean nach oben und nach unten bestmöglich durch L_r abschätzen.

Satz 2.2. *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$L_{-1/6}(x,y) < I(x,y) < L_0(x,y). \tag{2.3}$$

In (2.3) kann weder $-1/6$ durch einen größeren Wert noch 0 durch einen kleineren Wert ersetzt wedren.

Beweis. Die rechte Seite von (2.3) folgt unmittelbar aus (1.3). Auf Grund von $L \leq I$ läßt sich nach Satz 2.1 die Ungleichung $I < L_0$ nicht verschärfen.

Um die Gültigkeit der linken Seite von (2.3) zu zeigen, genügt es nach (1.3) die Abschätzung

$$L_{-1/6}(x,y) < M_{2/3}(x,y), \quad x \neq y, \tag{2.4}$$

zu beweisen. Wir definieren für $t > 0$:

$$f(t) := \frac{3}{2}\ln\frac{t^{2/3}+1}{2} - \ln\frac{t^{5/6}+1}{t^{-1/6}+1}.$$

Differentiation von f ergibt:

$$f'(t) = \frac{t^{-7/6}(t^{1/3}-1)^3(t^{2/3}+3t^{1/3}+1)}{6(t^{2/3}+1)(t^{5/6}+1)(t^{-1/6}+1)}.$$

Hieraus folgt

$$f(t) > f(1) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \neq 1. \tag{2.5}$$

Setzen wir in (2.5) $t = x/y$ mit $x \neq y$, dann erhalten wir nach elementaren Unformunge die Ungleichung (2.4).

Abschließend haben wir zu zeigen, daßdie Ungleichung

$$L_r(x,y) < I(x,y)$$

nur dann für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ erfüllt ist, wenn gilt: $r \leq -1/6$.

Zu diesem Zweck entwickeln wir die Funktion

$$\ln I(t,1) - \ln L_r(t,1) = -1 + \frac{t\ln(t)}{t-1} - \ln\frac{t^{r+1}+1}{t^r+1}$$

in eine Potenzreihe um 1; für alle nahe bei 1 gelegenen Werte t gilt:

$$\ln I(t,1) - \ln(L_r(t,1) = -\frac{1}{4}(r+\frac{1}{6})(t-1)^2 + \ldots;$$

folglich: $r \leq -1/6$. □

Bemerkung. Der Beweis von Satz 2.2 hat gezeigt, daßdas Potenz Mittel eine schärfere obere und untere Schranke für I liefert als das Lehmer Mittel.

3. Ungleichungen für $(LI)^{1/2}$ und $\frac{1}{2}(L+I)$

Zu Begin dieses Abschnitts zeigen wir, wie sich das geometrische Mittel von L und I durch Lehmer Mirrelwerte abschätzen läßt.

Satz 3.1 *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$L_{-1/4}(x,y) < \sqrt{L(x,y)I(x,y)} < L_0(x,y). \tag{3.1}$$

In (3.1) kann weder $-1/4$ durch einen größeren Wert noch 0 durch einen kleineren Wert ersetzt werden.

Beweis. Auf Grund von

$$M_{1/2}(x,y) < M_1(x,y) = L_0(x,y), \quad x \neq y,$$

folgt die rechte Ungleichung von (3.1) aus (1.4). Nach Satz 2.1 kann die rechte Seite von (3.1) nicht verschärft werden.

Wir beweisen nun die linke Ungleichung von (3.1).

Eine kleine Rechnung ergibt für alle reellen $t \neq 0$:

$$L(e^t, e^{-t})I(e^t, e^{-t}) = \frac{sinh(t)}{t}\exp(-1 + tcoth(t))$$

und

$$[L_{-1/4}(e^t, e^{-t})]^2 = [1 + 4(\sinh(t/4))^2]^2.$$

Wir werden zeigen, daßfür die Funktion

$$g(t) := \ln[L(e^t, e^{-t})I(e^t, e^{-t})] - \ln[L_{-1/4}(e^t, e^{-t})]^2$$

$$= \ln\frac{\sinh(t)}{t} - 1 + tcoth(t) - 2\ln[1 + 4(\sinh(t/4))^2], \ t \neq 0,$$

$$g(0) := \lim_{t\to 0} g(t) = 0$$

gilt:

$$g(t) > 0 \quad \text{für} \quad t > 0. \tag{3.2}$$

Setzen wir in (3.2) $t = \ln(x/y)$ mit $x > y$, dann erhalten wir nach einnfachen Umformungen die linke Seite von (3.1).

Differentiation von g ergibt:

$$g'(t)t(\sinh(t))^2[1+4(\sinh(t/4))^2]$$
$$= [tsinh(2t) - t^2 - (\sinh(t))^2][1+4(\sinh(t/4))^2] - 2t(\sinh(t))^2\sinh(t/2)$$
$$= \frac{1}{2}\cosh(5t/2) + \frac{t}{2}\sinh(5t/2) - \frac{1}{2}\cosh(3t/2) + \frac{3t}{2}\sinh(3t/2) + t^2$$
$$+\frac{1}{2}\cosh(2t) - tsinh(2t) + (1-2t^2)\cosh(t/2) + tsinh(t/2) - \frac{1}{2}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \text{mit}$$
$$a_n := (\frac{5}{2})^{2n+1}(n-\frac{1}{4}) - 4^{n+1}(n+\frac{1}{2}) \quad \text{und}$$
$$b_n := (\frac{3}{2})^{2n+2}(2n+\frac{3}{2}) + (\frac{1}{4})^n(n+\frac{5}{4} - 4(n+1)(2n+1)).$$

Durch vollständige Induktion beweist man für $n \geq 2$:

$$a_n > 0 \qquad \text{und} \quad b_n > 0.$$

Folglich gilt für $t > 0$:

$$g'(t) > 0 \qquad \text{und} \quad g(t) > 0.$$

Zu zeigen ist nun noch, daßdie linke Ungleichung von (3.1) durch Lehmer Mittel nicht verschärft werden kann. Hierzu entwickeln wir die Funktion

$$\ln[L(1,1+t)I(1,1+t)] - \ln[L_r(1,1+t)]^2$$

in eine Potenzreihe um 0 und erhalten für alle hinreichend kleinen Werte t :

$$\ln L(1,1+t) + \ln I(1,1+t) - 2lnL_r(1,1+t) = -\frac{1}{2}(r+\frac{1}{4})t^2 + ...;$$

es folgt, daßauf der linken Seite von (3.1) der Parameter $-1/4$ durch keine größere Zahl ersetzt werden kann . □

Bemerkung. Auf Grund von

$$M_0(x,y) = L_{-1/2}(x,y) < L_{-1/4}(x,y), \quad x \neq y,$$

handelt es sich bei der linken Seite von (3.1) um eine Verschärfung der linken Ungleichung von (1.4).

Mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse sind wir in der Lage, das arithmetische Mittel von L und I nach oben und unten durch L_r bestmöglich abzuschätzen.

Satz 3.2. *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$L_{-1/4}(x,y) < \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)) < L_0(x,y). \tag{3.3}$$

In (3.3) kann weder $-1/4$ durch einen größeren Wert noch 0 *durch einen kleineren Wert ersetzt werden.*

Beweis. Die Doppelungleichung (3.3) folgt unmittelbar aus Satz 3.1 und Satz 2.2. Nach Satz 2.1 kann die rechte Seite von (3.3) nicht verschärft werden.

Wir nehmen an, es gibt eine reelle Zahl r, so daßfür alle positiven x und y mit $x \neq y$ gilt:

$$L_r(x,y) < \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)).$$

Dann folgt für alle nahe bei 0 gelegenen Werte t :

$$\frac{1}{2}(L(e^t, e^{-t}) + I(e^t, e^{-t})) - L_r(e^t, e^{-t}) = -(r + \frac{1}{4})t^2 + ...;$$

somit mußgelten: $r \leq -1/4$. □

In [3] sind für alle $x, y > 0$ (mit $x \neq y$) die Abschätzungen

$$\sqrt{G(x,y)A(x,y)} < \sqrt{L(x,y)I(x,y)} \tag{3.4}$$
$$< \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)) < \frac{1}{2}(G(x,y) + A(x,y))$$

bewiesen worden. Im letzten Teil dieser Note wollen wir der Frage nachgehen, welche dieser drei Ungleichungen sich durch Lehmer Mittel verschärfen lassen.

Satz 3.3. Die Doppelungleichung

$$\sqrt{G(x,y)A(x,y)} < L_r(x,y) < \sqrt{L(x,y)I(x,y)} \tag{3.5}$$

ist genau dann für alle positive Zahlen x und y (mit $x \neq y$) erfüllt, wenn gilt: $r = -1/4$.

Beweis. Die rechte Ungleichung von (3.5), mit $r = -1/4$, ist in Satz 3.1 bewiesen worden.

Wir definieren für $t > 0$:

$$h(t) := [1 + 4(\sinh(t/4))^2]^2 - \cosh(t).$$

Dann folgt:

$$h'(t) = 2sinh(t/2)[\cosh(t/2) - 1] > 0.$$

Also gilt:

$$h(t) > h(0) = 0 \quad \text{für} \quad t > 0,$$

und somit

$$xyh(\frac{1}{2}\ln(x/y)) > 0 \quad \text{für} \quad x > y > 0,$$

das heißt

$$[L_{-1/4}(x,y)]^2 > G(x,y)A(x,y) \quad \text{für} \quad x > y > 0.$$

Wir nehmen nun an, (3.5) sei für alle positiven x und y mit $x \neq y$ erfüllt. Wenn wir in der linken Ungleichung $x = \exp(t)$ und $y = \exp(-t)$ setzen, dann erhalten wir für alle hinreichend kleinen Werte t :

$$L_r(e^t, e^{-t}) - \sqrt{G(e^t, e^{-t})A(e^t, e^{-t})} = (r + \frac{1}{4})t^2 + ...;$$

also mußgelten: $r \geq -1/4$.

Wie wir in Satz 3.1 bewiesen haben, folgt aus der rechten Seite von (3.5): $r \leq -1/4$. Also gilt: $r = -1/4$. □

Nach Satz 3.1 und Satz 3.2 gibt es keine reelle Zahl r, so daßdie Doppelungleichung

$$\sqrt{L(x,y)I(x,y)} < L_r(x,y) < \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y))$$

für alle positiven x und y mit $x \neq y$ erfüllt ist.

Einfache Rechnungen zeigen, daßauch die rechte Ungleichung von (3.4) nicht durch Lehmer Mittel verschärft werden kann:

Für alle hinreichend kleinen t gilt:

$$\frac{1}{2}(G(e^t, e^{-t}) + A(e^t, e^{-t})) - L_r(e^t, e^{-t}) = -(r + \frac{1}{4})t^2 + ...$$

Damit dieser Ausdruck positiv ist muß$r \leq -1/4$ sein, und nach Satz 3.2 folgt für alle $r \leq -1/4$:

$$L_r(x,y) < \frac{1}{2}(L(x,y) + I(x,y)).$$

References

[1] Alzer, H., Ungleichungen für $(e/a)^a(b/e)^b$. Elem Math. 40, 120-123 (1985).

[2] Alzer, H., Über Mittelwerte, die zwischen dem geometrischen und dem logarithmischen Mittel zweier Zahlen liegen. Anz. Österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 123, 5-9 (1986).

[3] Alzer, H., Ungleichungen für Mittelwerte. Arch. Math. 47, 422-426 (1986).

[4] Alzer, H., Two inequalities for means. C.R. Math. Rep. A cad. Sci. Canada 9, 11-16 (1987).

[5] Alzer, H., Über eine einparametrige Familie von Mittellwerten. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., math. -naturw. Kl. 1987, 1-9.

[6] Beckenbach E.F., A class of mean value functions. Amer. Math. Monthly 57, 1-6 (1950).

[7] Brenner, J.L., Carlson, B.C., Homogeneous mean values: Weights and asymptotics. J. Math. Anal. Appl. 123, 265-280 (1987).

[8] Burk, F., By all means. Amer. Math. Monthly 92, 50 (1985).

[9] Carlson, B.C., Some inequalities for nypergeometric functions. Proc. Amer. Soc. 17, 32-39 (1966).

[10] Carlson, B.C., Algorithms involving arithmetic and geometric means. Amer. Math. Monthly 78, 496-505 (1971).

[11] Carlson, B.C., The logarthmic mean. Amer. Math. Monthly 79, 615-618 (1972).

[12] Carlson, B.C., Special Functions of Applied Mathematics. New York 1977.

[13] Carlson, B.C. and Gustafson J.L., Total positivity of mean values and Hypergeometric functions. SIAM J. Math. Anal. 14, 389-395 (1983).

[14] Dodd, E.L., Some generalizations of the logarithmic mean and of similar means of two variates which become indeterminate when the two variates are equal. Ann. Math. Stat. 12, 422-428 (1971).

[15] Farnsworth, D., Orr, R., Gini means. Amer. Math. Monthly 93, 603-607 (19860.

[16] Gauβ, C.F., Werke 3. 361-403. Leipzig 1876.

[17] Gini, C., Di una formula comprensiva delle medie. Metron 13, 3-22 (1938).

[18] Gould, H.W., Mays, M.E., Series expansions of means. J. Math. Anal. Appl. 101, 611-621 (1984).

[19] Grossman, M., Katz, R., A new approach to means of two positive numbers. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 17, 205-208 (1986).

[20] Karamata, J., Sur quelques proble'em poses par Ramanujan. J. Indian Math. Soc. 24, 343-365 (1960).

[21] Knopp, K., Teheorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1964.

[22] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1964.

[23] Leach, E.B., Sholander, M.C., Extended mean values. Amer. Math. Monthly 85, 84-90 (1978).

[24] Leach, E.B., Sholander, M.C., Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. 92, 207-223 (1983).

[25] Lehmer, D.H., On the compounding of certain means. J. Math. Anal. Appl. 36, 18-200 (1971).

[26] Lin, T.P., The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly 81, 897-883 (1974).

[27] Marshall, A.W., Olkin, I., Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. Newq York 1979.

[28] Mascioni, V., Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen. Elem. Math. 40, 149-150 (19850.

[29] McAdams, W.H., Heat Transmission.New York 1954.

[30] Mitrinović, D.S., Analytis Inequalities. Berlin 1970.

[31] Ostale, B., Terwilliger, H.L., A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci 17, 69-70 (1957).

[32] Pittenger, A.O., Inequalities between arithmetic and logarithmic means. Univ. Beograd Publ. Eletrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 680, 15-18 (1980).

[33] Pittenger, A.O., The logartithmic mean in n variables. Amer. Math. Monthly 92, 99-104 (1985).

[34] Poólya, G., Szxegö, G., Isoperimetric Ingqualities in n variables. Amer. Math. Monthly 92, 99-104 (1985).

[35] Pólya, G., Szegö, G., Isoperimetric Inequalities in mathematical Physics. Princeton 1951.

[36] Stolarsky, K.B., Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. 48, 87-92 (1975).

[37] Stolarsky, K.B., The power and generalized logarithmic means. Amer. Math. Monthly 87, 545-548 (1980).

[38] Székely, G., A classification of means. Ann. Univ. Sci. Budepest. Eötvös Sec. Math. 18, 129-133 (1975).

REZIME

NAJBOLJA MOGUĆA OCENA ZA SPECIJALNE SREDNJE VREDNOSTI

Sa $L(x,y)$, $I(x,y)$, i $L_r(x,y)$ je označena logaritamska, identrična i Lehmerova srednja vrednost (reda r; r je realan broj) za pozitivne realne brojeve x i y, tj.

$$l(x,y) = \frac{x-y}{\ln(x)-\ln(y)},\ x \neq y,\ L(x,x) = x,$$

$$I(x,y) = \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)},\quad x \neq y,\quad I(x,x) = x,$$

i

$$L_r(x,y) = \frac{x^{r+1}+y^{r+1}}{x^r+y^r}.$$

U ovom radu je odredjena tačna gornja i donja srednja vrednost za $L(x,y)$, $I(x,y)$, $(L(x,y)I(x,y))^{1/2}$ i $\frac{1}{2}(L(x,y)+I(x,y))$.

Received by the editors July 5, 1988