Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 19,1,185–205 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

n–КВАЗИГРУППЫ БОЛА

Янез Ушан

Institute of Matehematics University of Novi Sad
Dr Ilije Djuričića 4, 21000 Novi Sad, Yugolsavia

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются n-квазигруппы (Q,A), $n \in N\setminus\{1\}$, удовлетворяющие тождествами

$$A(A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-1}{x})),z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-1})))$$

и

$$A(z_1^{n-1},A(A(\overset{n-1}{x},y),\overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1},x),\overset{n-2}{x},y),\overset{n-1}{x}),$$

которые для $n = 2$ превращаются в левое и правое тождество Бола [2-4]. Автор позволил себе (Q,A) назвать n-квазигруппой Бола. Доказано, что (Q,A), $n \in N\setminus\{1\}$, обладает $(n-2)$-арной опперацией $e_{\{1,n\}}$ удовлетворяющей условию:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x \wedge$$
$$\wedge\ (A(x,a_1^{n-2},e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})) = x);$$

$e_{\{1,n\}}$ назиэвается $\{1,n\}$-нейтральная операция n-группоида (Q,A), введена автором в [1]. (Таким образом, n-квазигруппы Бола для $n = 2$ являются лупами Муфанг.) Притом, $e_{\{1,n\}}$ для $n = 3$ подстановка множества Q, и $(Q,e_{\{1,n\}})$ $(n-2)$-квазигруппа для $n > 3$. В основе построения n-квазигрупп Бола для $n \in N\setminus\{1,2\}$: теорема 9 и теорема 10.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: quasigroups, groups, Moufang loops, $\{i,j\}$-neutral operations on n-groupoids.

*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [1] Пусть (Q,A) n-группоид, $n \in N\backslash\{1\}$. Пусть, далее, $e_{\{1,n\}}$ отображение множества Q^{n-2} в множество Q. $(n-2)$-арная операция $e_{\{1,n\}}$ $\{1,n\}$-нейтральная операция n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(1n) \qquad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2} (\forall x \in Q) (A(e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x)^{1)} = x \wedge$$

$$\wedge\ (A(x, a_1^{n-2}, e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})) = x)^{2).3)}$$

Если $n = 2$, то (1n) превращается в

$$(1_2) \qquad (\forall x \in Q)(A(e_{\{1,2\}}(\boxtimes), x) = x \wedge A(x, e_{\{1,2\}}(\boxtimes)) = x).$$

Таким образом, если $n = 2$, то речь идет об определении единицы группоида, т.е. об определении нульарной операции $e_{\{1,2\}}$ - взятие единицы $e_{\{1,2\}}(\boxtimes)$.[4)]

ЛЕММА 1_1. [1] В n-группоиде (Q, A), $n \in N\backslash\{1\}$, не существует больше чем одна $\{1,n\}$-нейтральная операция.[5)]

ЛЕММА 1_2. [1] Пусть (Q,A) n-группоид, $n \in N\backslash\{1\}$. Пусть, далее, существуют отображения $e_{(1,n)}: Q^{n-2} \to Q$ и $e_{(n,1)}$: : $Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющие условиям:

---

1) Последовательность $g_p, \ldots, g_q$ (где $p, \ldots, q$ последовательность натуральных чисел следующих друг за другом) для краткости обозначаем через g_p^q; в частности: $g_p^p = g_p$. Подобно, последовательность $\underbrace{a, \ldots, a}_{p}$ обозначаем через $\overset{p}{a}$. Далее, под g_p^{p-1}, $p \in N$, и под $\overset{\circ}{g}$ понимаем пустую последовательность (отсуствие последовательности). Притом, если речь идет о, например, g_1^3, e_1^0 (или $g_1^3, \overset{\circ}{e}$), то g_1^3, e_1^0 (или $g_1^3, \overset{\circ}{e}$) считаем последовательностю g_1^3, и если речь идет о e_1^0 (или $\overset{\circ}{e}$) в некоторых случаях будем обозначать через $\boxtimes$; например $F(a_1^0)$ будем обозначать через $F(\boxtimes)$.

2) $\Leftrightarrow$ $(\forall a_i \in Q)_1^{n-2} (\forall x \in Q)(A(e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x) = x) \wedge$

$$\wedge\ (\forall a_i \in Q)_1^{n-2} (\forall x \in Q)(A(x, a_1^{n-2}, e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})) = x).$$

3) $\{1,n\}$-нейтральная операция n-группоида является частным случаем $\{i,j\}$-нейтральной операцией n-группоида, введеной автором в [1].

4) т.е. о определению отображения $e_{\{1,2\}}: Q \to Q$, $Q^0 \overset{\text{деф}}{=\!=} \{\boxtimes\}$, удовлетворяющего условию (1_2). Иначе, $e_{\{1,2\}}(\boxtimes) \in Q$, обозначаем только через e.

(1_{Ln}) $\quad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(e_{(1,n)}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x$ и

(1_{Rn}) $\quad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(x,a_1^{n-2},e_{(n,1)}(a_1^{n-2})) = x.$

Тогда имеют место равенства:

$$e_{(1,n)}(a_1^{n-2}) = e_{(n,1)}(a_1^{n-2}) = e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})$$

для любого $(a_1^{n-2}) \in Q^{n-2}$, где $e_{\{1,n\}}$ $\{1,n\}$-нейтральная операция n-группоида (Q,A). [6]

В любом группоиде (2-группоиде) $e_{\{1,2\}}$ является нульарной операцией. Если в 3-квазигруппе (Q,A) существует $\{1,3\}$-нейтральная операция $e_{\{1,3\}}$, то $e_{\{1,3\}}$ является подстановкой множества Q. Именно, так как уравнение

$$A(e_{\{1,3\}}(x),x,a) = a$$

для любых $e_{\{1,3\}}(x) = b \in Q$ и $a \in Q$ обладает (единственным) реюением по неизвестной x, то $e_{\{1,3\}}$ отображение на. Далее, так как из предположения, что существуют $x_1 \in Q$ и $x_2 \in Q$ удовлетворяющие равенствам

$$e_{\{1,3\}}(x_1) = b \text{ и } e_{\{1,3\}}(x_2) = b,$$

т.е., ввиду (1n), что имеют место равенства

$$A(b,x_1,a) = a \text{ и } A(b,x_2,a) = a,$$

находим, что $e_{\{1,3\}}$ является и отображением 1-1. Если в n-квазигруппе (Q,A), $n > 3$, существует $\{1,n\}$-нейтральная операция $e_{\{1,n\}}$, то $(Q,e_{\{1,n\}})$ $(n-2)$-квазигруппа. Именно, так как уравнение

$$A(e_{\{1,n\}}(a_1^{i-1},x_i,a_i^{n-3}),a_1^{i-1},x_i,a_i^{n-3},a) = a$$

---

[5] Речь идет об частном случае утверждения 1 из [1].

[6] Речь идет об частном случае утверждения 2 из [1].

для любых $e_{\{1,n\}}(a_1^{i-1},x_i,a^{n-3}) = b$, $a_1^{i-1},a_i^{n-3},a \in Q$ обладает (единственным) решением по неизвестной x_i, то уравнение

$$e_{\{1,n\}}(a_1^{i-1},x_i,a_i^{n-3}) = b,\ i \in \{1,\ldots,n-2\},$$

для любых $a_1^{n-3},b \in Q$ обладает по меньшей мере одним решением по неизвестной x_i. Далее, наконец, из предположения; что существуют $x_i \in Q$ и $\bar{x}_i \in Q$ удовлетворяющие равенствам

$$e_{\{1,n\}}(a_1^{i-1},x_i,a_i^{n-3}) = b \text{ и } e_{\{1,n\}}(a_1^{i-1},\bar{x}_i,a_i^{n-3}) = b,$$

т.е., ввиду (1n), что имеют место равенства

$$A(b,a_1^{i-1},x_i,a_i^{n-3},a) = a \text{ и } A(b,a^{i-1},\bar{x}_i,a_i^{n-3},a) = a,$$

находим, что $\bar{x}_i = x_i$. Таким образом, мы доказали, что имеет место следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 2.</u> Пусть (Q,A) n-квазигруппа и $n \in N\backslash\{1,2\}$. Пусть, далее, (Q,A) обладает $\{1,n\}$-нейтральной операцией $e_{\{1,n\}}$. Тогда:

1° если $n = 3$, то $e_{\{1,n\}}$ подстановка множества Q; и
2° если $n > 3$, то $(Q,e_{\{1,n\}})$ $(n-2)$-квазигруппа.

* *

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.</u> Пусть (Q,A) n-квазигруппа, $n \in N\backslash\{1\}$;[5]. (Q,A) назовем n-квазигруппой Бола тогда и только тогда, когда имеют место формулы:

$\underline{nB_L}$
$$(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(\forall z_i \in Q)_1^{n-1}(A(A(\overset{n-1}{x}, A(y,\overset{n-1}{x})),z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-1}))); \text{ и}$$

$\underline{nB_R}$
$$(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(\forall z_i \in Q)_1^{n-1}A(z_1^{n-1},A(A(\overset{n-1}{x},y),\overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1},x),\overset{n-2}{x},y),\overset{n-1}{x}).$$

Если $n = 2$, то формулы под nB_L и nB_R превращаются в формулы:

$\underline{2B_L}$ $(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(\forall z_1 \in Q)A(A(x,A(y,x)),z_1) =$

$= A(x,A(y,A(x,z_1)))$[7] ; и

$\underline{2B_R}$ $(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(\forall z_1 \in Q)A(z_1,A(A(x,y),x)) =$

$= A(A(A(z_1,x),y),x)$[8].

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> Если (Q,A) n-квазигруппа Бола, $n \in N\backslash\{1\}$, то (Q,A) обладает (в точности одной[9]) $\{1,n\}$-нейтральной операцией.

<u>Доказательство.</u>

Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола, $n \in N\backslash\{1\}$. Пусть, далее, a, a_1^{n-2} любые элементы множества Q. Тогда, так как (Q,A) n-квазигруппа, уравнение

(а) $\quad A(a,a_1^{n-2},x) = a$

обладает единстенным решением по неизвестной x. Решение этого уравнения обозначим через

(б) $\quad e^{(a)}_{(n,1)}(a_1^{n-2})$.

Притом, для каждого $a \in Q$ $e^{(a)}_{(n,1)}$ является отображением множества Q^{n-2} в множество Q.

Пусть, далее, a фиксированный элемент множества Q. Тогда, так как (Q,A) n-квазигруппа, для каждого $b \in Q$ существует в точности один $y \in Q$ удовлетворяющий уравнению:

(ц) $\quad b = A(\overset{n-1}{a},A(y,\overset{n-1}{a}))$.

---

[7] В (Q,A), $n = 2$, имеет место левое тождество Бола; [2-4].

[8] В (Q,A), $n = 2$, имеет место правое тождество Бола; [2-4].

[9] см. Лемму 1_1.

Учитывая (a), (б) и (ц), ввиду nB_L из определения 2, находим, что имеет место следующая цепь равенств:

$$A(b,a_1^{n-2},e_{(n,1)}^{(a)}(a_1^{n-2})) =$$

$$= A(A(\overset{n-1}{a},A(y,\overset{n-1}{a})),a_1^{n-2},e_{(n,1)}^{(a)}(a_1^{n-2})) =$$

$$= A(\overset{n-1}{a},A(y,\overset{n-2}{a},A(a,a_1^{n-2},e_{(n,1)}^{(a)}(a_1^{n-2}))))=$$

$$= A(\overset{n-1}{a},A(y,\overset{n-2}{a},a)) =$$

$$= A(\overset{n-1}{a},A(y,\overset{n-1}{a})) =$$

$$= b,$$

откуда получаем, что имеет место формула:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall b \in Q)A(b,a_1^{n-2},e_{(n,1)}^{(a)}(a_1^{n-2})) = b$$

Притом, так как $e_{(n,1)}^{(a)}$ одно и то же отображение для каждого $a \in Q$, $e_{(n,1)}^{(a)}$ обозначим через $e_{(n,1)}$. В самом деле, мы доказали, что в n-квазигруппе Бола (Q,A) существует отображение $e_{(n,1)}$: $Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющее условию:

(д) $$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(x,a_1^{n-2},e_{(n,1)}(a_1^{n-2})) = x$$ [10].

Подобним способом, учитывая nB_R, доказывается, что существует и отображение $e_{(1,n)}:Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющее условию:

(д') $$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(e_{(1,n)}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x$$ [11].

Так как мы доказали, что существуют отображения $e_{(n,1)}$: $Q^{n-2} \to Q$ и $e_{(1,n)}:Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющие, в том же порядке, условиям (д) и (д'), ввиду лемы 1_2, существует отображение $e_{\{1,n\}} : Q^{n-2} \to Q$ такое, что

$\bar{1}$ $e_{\{1,n\}} = e_{(n,1)} = e_{(1,n)}$; и

[10] см. формулу под (1_{Rn}) из леммы 1_2.

$\bar{2}$ $e_{\{1,n\}}$ является $\{1,n\}$-нейтральной операцией в n-квазигруппе Бола (Q,A). Притом, ввиду леммы 1_1, $\{1,n\}$-нейтральная операция $e_{\{1,n\}}$ однозначно определена.

Теорема доказана.

* * *

Пусть (Q,B) квазигруппа. Пусть, далее, k фиксириованный элемент множества Q. Тогда $L_B^{(k)}$ и $L_B^{(k)}$, определены следующим образом

(α_1) $\quad v = L_B^{(k)}u \overset{\text{деф}}{=\!=} B(k,u)$ и

(α_2) $\quad v = R_B^{(k)}u \overset{\text{деф}}{=\!=} B(u,k)$,

подстановки множества Q; левая и правая трансляция квазигруппы (Q,B) [2-4]. Ввиду этого факта, учитывая (α_1) и (α_2), находим, что имеют место равенства:

$(\bar{\alpha}_1)$ $\quad u = L_B^{(k)-1}v$

$(\bar{\alpha}_2)$ $\quad u = R_B^{(k)-1}v.$

Так как (Q,B) квазигруппа, то (Q,B^{-1}) и $(Q,{}^{-1}B)$, где

(β_1) $\quad B^{-1}(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} B(x,z) = y$ и

(β_2) $\quad {}^{-1}B(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} B(z,y) = x$,

также квазигруппы; B^{-1} и ${}^{-1}B$, в том же порядке, правая и левая обратная операция операции B [2-5]. Отсюда, учитывая (α_1) и (α_2), находим, что имеют место равенства:

$(\bar{\bar{\alpha}}_1)$ $\quad u = B^{-1}(k,v)$ и

$(\bar{\bar{\alpha}}_2)$ $\quad u = {}^{-1}B(v,k)$.

---

11) см. формулу под (1_{Ln}) из леммы 1_2.

Наконец, учитывая $(\bar{\alpha}_1)$, $(\bar{\bar{\alpha}}_1)$, $(\bar{\alpha}_2)$ и $(\bar{\bar{\alpha}}_2)$, находим, что имеют место равенства:

$$L_B^{(k)-1}v = B^{-1}(k,v)$$

$$R_B^{(k)-1}v = {}^{-1}B(v,k)$$

для любого $v \in Q$.

Таким образом, имеет место:

ЛЕММА 4. Пусть (Q,B) квазигруппа. Пусть, далее, k фиксированний элемент множества Q. Тогда, если

$$L_B^{(k)}u \overset{\text{деф}}{=\!=} B(k,u) \text{ и } R_B^{(k)}u \overset{\text{деф}}{=\!=} B(u,k)$$

для каждого $u \in Q$, то

$$L_B^{(k)-1}u = B^{-1}(k,u) \text{ и } R_B^{(k)-1}u = {}^{-1}B(u,k)$$

для каждого $u \in Q$. Притом, B^{-1} и ${}^{-1}B$ определени через (β_1) и (β_2).

Учитывая определение 1, находим, что имеет место следующее утверждение:

ЛЕММА 5. Пусть (Q,A) n-квазигруппа обладающая $\{1,n\}$-нейтральной операцией $e_{\{1,n\}}$; $n \in N\backslash\{1,2\}$. Пусть, далее, c_1^{n-2} любые фиксированные элементы множества Q. Тогда $(Q,B_{(c_1^{n-2})})$, где

$$\text{(o)} \qquad B_{(c_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,c_1^{n-2},y)$$

для любых $x,y \in Q$, лупа[12] с единицей $e_{\{1,n\}}(c_1^{n-2})$.

ЛЕММА 6₁. Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола; $n \in N\backslash\{1,2\}$. Пусть, далее, a_1^{n-2} и b_1^{n-2} любые фиксированные элементы множества Q. Притом, пусть:

$$B_{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,a_1^{n-2},y) \text{ и}$$

---

[12] лупа - квазигруппа обладающая единицей [2-4].

$$B_{(b_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=\!=} A(x,b_1^{n-2},y)$$

для любых $x,y \in Q$. Тогда имеют место равенства

$$(B_1) \qquad B_{(b_1^{n-2})}(x,y) = B_{(a_1^{n-2})}(x,L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}))^{-1}}y) \text{ и}$$

$$(B_2) \qquad B_{(b_1^{n-2})}(x,y) = B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}))^{-1}}x,y)$$

для любых $x,y \in Q$, где $e_{\{1,n\}}$ нейтральная операция n-квазигруппы Бола (Q,A) [13].

Доказательство.

Сначала равенство под nB_L из определения 2 запишем в следующем виде:

$$(L) \qquad A(A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},x)),z_1^{n-2},z) =$$

$$= A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-2},z))).$$

Пусть a_1^{n-2}, b_1^{n-2}, c любые фиксированные элементы множества Q. Если в равенство под (L) положим

$$x = c \text{ и } z_1^{n-2} = a_1^{n-2},$$

учитывая определение под (o) из леммы 5, получаем равенство:

$$(a) \qquad B_{(a_1^{n-2})}(B_{(\overset{n-2}{c})}(c,B_{(\overset{n-2}{c})}(y,c)),z) =$$

$$= B_{(\overset{n-2}{c})}(c,B_{(\overset{n-2}{c})}(y,B_{(a_1^{n-2})}(c,z))).$$

Если, далее, в равенство под (L) положим

$$x = c \text{ и } z_1^{n-2} = b_1^{n-2},$$

учитывая определение под (o) из леммы 5, получаем равенство:

[13] см. теорему 3.

(б) $$B_{(b_1^{n-2})}(B_{(\overset{n-2}{c})}(c,B_{(\overset{n-2}{c})}(y,c)),z) =$$

$$= B_{(\overset{n-2}{c})}(c,B_{(\overset{n-2}{c})}(y,B_{(b_1^{n-2})}(c,z))).$$

Ввиду леммы 5, определений трансляций квазигрупп ((α_1) и (α_2)) и факта, что трансляции квазигрупп подстановки носителей квазигрупп, равенства под (а) и (б) превращаются в равенства:

(а′) $$B_{(a_1^{n-2})}(y,L^{(c)-1}_{(a_1^{n-2})}z) = L^{(c)}_{(\overset{n-2}{c})}B_{(\overset{n-2}{c})}(R^{(c)-1}_{(\overset{n-2}{c})}L^{(c)-1}_{(\overset{n-2}{c})}y,z)$$ и

(б′) $$B_{(b_1^{n-2})}(y,L^{(c)-1}_{(b_1^{n-2})}z) = L^{(c)}_{(\overset{n-2}{c})}B_{(\overset{n-2}{c})}(R^{(c)-1}_{(\overset{n-2}{c})}L^{(c)-1}_{(\overset{n-2}{c})}y,z).$$

Из (а′) и (б′) следует равенство:

(ц) $$B_{(a_1^{n-2})}(y,L^{(c)-1}_{(a_1^{n-2})}z) = B_{(b_1^{n-2})}(y,L^{(c)-1}_{(b_1^{n-2})}z).$$

Если в (ц) положим $y = e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2})$, ввиду (α_1) и леммы 5, находим, что имеет место равенство:

(д) $$L^{(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}))}_{(a_1^{n-2})}L^{(c)-1}_{(a_1^{n-2})}z = L^{(c)-1}_{(b_1^{n-2})}z.$$

Из равенств (ц) и (д), учитывая факт, что трансляции квазигруппы (Q,B) подстановки множества Q, находим, что имеет место равенство

$$B_{(b_1^{n-2})}(x,y) = B_{(a_1^{n-1})}(x,L^{(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}))^{-1}}_{(a_1^{n-2})}y).$$

Подобним способом, учитывая равенство под nB_R из определения 2, находим, что имеет место равенство

$$B_{(b_1^{n-2})}(x,y) = B_{(a_1^{n-2})}(R^{(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}))^{-1}}_{(a_1^{n-2})}x,y).$$

Лемма доказана.

Ввиду леммы 6_1 и леммы 4, находим, что имеет место следующее утверждение:

ЛЕММА 6_2. Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола; $n \in N\setminus\{1,2\}$. Пусть, далее, a_1^{n-2} и b_1^{n-2} любые фиксированные элементы множества Q. Притом, пусть:

$$B_{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,a_1^{n-2},y) \quad \text{и}$$

$$B_{(b_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,b_1^{n-2},y)$$

для любых $x,y \in Q$. Тогда имеют место равенства:

$$(\bar{B}_1) \qquad B_{(b_1^{n-2})}(x,y) = B_{(a_1^{n-2})}(x,B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2}),y)) \quad \text{и}$$

$$(\bar{B}_2) \qquad B_{(b_1^{n-2})}(x.y) = B_{(a_1^{n-2})}({}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(x,e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2})),y)$$

для любых $x,y \in Q$, где $e_{\{1,n\}}$ нейтральная операция n-квазигруппы Бола (Q,A)[13].

ЛЕММА 7. Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола, $n \in N\setminus\{1,2\}$. Пусть, далее, $e_{\{1,n\}}$ $\{1,n\}$-нейтральная операция n-квазигруппы (Q,A)[13]. Тогда, если

а) a_1^{n-2} любые фиксированные элементы множества Q; и

б) $B_{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,a_1^{n-2},y)$;

То:

1) $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ является лупой с единицей $e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})$; и

2) в $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ имеют место равенства

GA1 $\qquad B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(Fx,B_{(a_1^{n-2})}(y,x)),z) =$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(Fx,B_{(a_1^{n-2})}(y,B_{(a_1^{n-2})}(x,z)));$$

GA2 $\qquad B_{(a_1^{n-2})}(z,B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(x,y),\phi x)) =$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(z,x),y),\phi x); \quad \text{и}$$

GA3 $\qquad B_{(a_1^{n-2})}({}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(x,y),z) = B_{(a_1^{n-2})}(x,B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(y,z))$

для любых $x,y,z \in Q$, где $F : Q \to Q$ и $\Phi : Q \to Q$ определены следующим образом:

$$Fu \stackrel{\text{деф}}{=\!=} {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(u, e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{u})) \quad \text{и}$$

$$\Phi u \stackrel{\text{деф}}{=\!=} B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{u}), u).$$

<u>Доказательство.</u>

Ввиду леммы 5, $(Q, B_{(a_1^{n-2})})$ лупа с единицей $e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})$.

Далее, равенства под nB_L и nB_R из определения 2 запишем в следующем виде:

$$\text{(L)} \qquad A(A(x, \overset{n-2}{x}, A(y, \overset{n-2}{x}, x)), z_1^{n-2}, z) =$$
$$= A(x, \overset{n-2}{x}, A(y, \overset{n-2}{x}, A(x, z_1^{n-2}, z))); \text{ и}$$

$$\text{(R)} \qquad A(z, z_1^{n-2}, A(A(x, \overset{n-2}{x}, y), \overset{n-2}{x}, x)) =$$
$$= A(A(A(z, z_1^{n-2}, x), \overset{n-2}{x}, y), \overset{n-2}{x}, x),$$

где x,y,z,z_1^{n-2} любые элементы множества Q.

Учитывая определение

$$B_{(c_1^{n-2})}(u,v) \stackrel{\text{деф}}{=\!=} A(u, c_1^{n-2}, v)$$

для любых $u,v,c_1^{n-2} \in Q$, равенства под (L) и (R) превращаются в равенства:

$$\text{(L')} \qquad B_{(z_1^{n-2})}(B_{(\overset{n-2}{x})}(x, B_{(\overset{n-2}{x})}(y,x)), z) =$$
$$= B_{(\overset{n-2}{x})}(x, B_{(\overset{n-2}{x})}(y, B_{(z_1^{n-2})}(x,z))); \text{ и}$$

$$\text{(R')} \qquad B_{(z_1^{n-2})}(z, B_{(\overset{n-2}{x})}(B_{(\overset{n-2}{x})}(x,y), x)) =$$
$$= B_{(\overset{n-2}{x})}(B_{(\overset{n-2}{x})}(B_{(z_1^{n-2})}(z,x), y), x)$$

для любых $x,y,z,z_1^{n-2} \in Q$.

Отсюда, учитывая условия а) и б), ввиду леммы 6_1, находим, что имеют место равенства:

$$(L'')\qquad B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}x, B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y, x)), L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}}z) =$$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}x, B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y, B_{(a_1^{n-2})}(x, L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}}z))); \text{ и}$$

$$(R'')\qquad B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}}z, B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y), L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}x)) =$$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}}z, x), L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y, L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}x)$$

для любых $x, y, z, z_1^{n-2} \in Q$.

Ввиду леммы 4, имеет место:

$$Y = L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y = B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e\{1,n\}(\overset{n-2}{x}), y);$$

$$Y = R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}}y = {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(y, e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}));$$

$$Z = L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}}z = B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e\{1,n\}(z_1^{n-2}), z);$$

$$Z = R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}))^{-1}} z = {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(z, e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2})).$$

Отсюда, так как $(Q, B_{(a_1^{n-2})})$ квазигруппа, находим, что

$$\alpha_x \overset{\text{деф}}{=\!=} \{(y,Y) \mid Y = B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}), y) \wedge y \in Q\};$$

$$\beta_x \overset{\text{деф}}{=\!=} \{(y,Y) \mid Y = {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(y, e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}) \wedge y \in Q\};$$

$$\gamma_{z_1^{n-2}} \overset{\text{деф}}{=\!=} \{(z,Z) \mid Z = B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}), z) \wedge z \in Q\};$$

и

$$\delta_{z_1^{n-2}} \overset{\text{деф}}{=\!=} \{(z,Z) \mid Z = {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(z, e_{\{1,n\}}(z_1^{n-2}) \wedge z \in Q\}$$

ябляются подстановками множества Q для каждого $x \in Q$ и $(z_1^{n-2}) \in Q^{n-2}$; $n \in N\backslash\{1,2\}$. Учитывая этот факт, находим, что равенства под (L'') и (R'') превращаются в равенства

$$(L''')\quad B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x, B_{(a_1^{n-2})}(Y,x)), Z) =$$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x, B_{(a_1^{n-2})}(Y, B_{(a_1^{n-2})}(x,Z))); \text{ и}$$

$$(R''')\quad B_{(a_1^{n-2})}(Z, B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(x,Y), L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x)) =$$

$$= B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(B_{(a_1^{n-2})}(Z,x),Y), L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x)$$

для любых $x, Y, Z \in Q$. Отсюда, обозначая x, Y, Z,

$$R_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x \quad \text{и} \quad L_{(a_1^{n-2})}^{(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{x}))^{-1}} x,$$

в томе же порядке, через x, y, z, Fx и Φx, притом, учитывая лемму 4, находим, что имеют место равенства под GA1 и GA2 для любых $x, y, z \in Q$, где

$$Fu = {}^{-1}B_{(a_1^{n-2})}(u, e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{u})) \quad \text{и}$$

$$\Phi u = B^{-1}_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{u}),u).$$

Наконец, учитывая лемму 6_1, лемму 6_2 и утверждение 2, находим, что имеет место и равенство под GA3 для $x,y,z \in Q$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 8_1. Пусть (Q,B) лупа с единицей e, удовлетворяющая ревенствам

$\underline{GB_L}$ $$B(B(Fx,B(y,x)),z) = B(Fx,B(y,B(x,z)))$$[14]; и

$\underline{GB_R}$ $$B(z,B(B(x,y),\Phi x)) = B(B(B(z,x),y),\Phi x)$$[15]

для любых $x,y,z \in Q$, где F и Φ унарные операции в множестве Q. Тогда в (Q,B) имеют место равенства

$$B({}^{-1}x,B(x,z)) = z; \quad \text{и}$$

$$B(B(z,x),x^{-1}) = z$$

для любых $x,z \in Q$, где $B({}^{-1}x,x) = e$ и $B(x,x^{-1}) = e$, т.е. тогда (Q,B) IP-лупа [2-4].

Доказательство.

Если в равенство под GB_L положим $y = {}^{-1}x$, получаем равенство

$$B(Fx,z) = B(Fx,B({}^{-1}x,B(x,z)),$$

откуда, ввиду закона сокращения, находим, что имеет место равенство:

$$B({}^{-1}x,B(x,z)) = z.$$

[14] для $F = I$ равенство под GB_L превращается в левое тождество Бола; [2-4].

[15] для $\Phi = I$ равенство под GB_R превращается в правое тождество Бола; [2-4].

Подобно, если в равенство под GB_R положим $y = x^{-1}$, получаем равенство

$$B(z,\Phi x) = B(B(B(z,x),x^{-1}),\Phi x),$$

откуда, ввиду закона сокращения, находим, что имеет место равенство

$$B(B(z,x),x^{-1}) = z.$$

ЛЕММА 8_2. Пусть (Q,B) IP-лупа [2-4].[16] Тогда, если в (Q,B) имеет место равенство

$$B({}^{-1}B(x,y),z) = B(x,B^{-1}(y,z))\text{[17]}$$

для любых $x,y,z \in Q$, то (Q,B) группа.

Доказательство.

В IP-лупах (Q,B) имеют место равенство

$${}^{-1}x = x^{-1}$$

для каждого $x \in Q$; эквивалентность

$$B(a,x) = b \Leftrightarrow x = B(a^{-1},b)$$

для любых $a,b,x \in Q$; и эеквивалентность

$$B(y,a) = b \Leftrightarrow y = B(b,a^{-1})$$

для любых $a,b,y \in Q$ [2-4].

Отсюда, ввиду определений

$$B^{-1}(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} B(x,z) = y; \text{ и}$$

$${}^{-1}B(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} B(z,y) = x$$

16) см. лемму 8_1.

17) см. равенство под GA3 из леммы 7.

для любых $x,y,z \in Q$, находим, что имеют место равенства

$$^{-1}B(u,v) = B(u, v^{-1}); \text{ и}$$

$$B^{-1}(u,v) = B(u^{-1},v)$$

для любых $u,v \in Q$. Ввиду этых ревенств, равенство

$$B(^{-1}B(x,y),z) = B(x,B^{-1}(y,z))$$

превращается в равенство

$$B(B(x,y^{-1}),z) = B(x,B(y^{-1},z))$$

для любых $x,y,z \in Q$. Отсюда, так как отображение

$$u \mapsto u^{-1}$$

подстановка множества Q, находим, что утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 9. Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола, $n \in N\setminus\{1,2\}$. Тогда, если

(а) $\quad B_{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,a_1^{n-2},y)$; и

(б) $\quad B_{(b_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} A(x,b_1^{n-2},y)$

для любых $x,y \in Q$, где a_1^{n-2} и b_1^{n-2} любые фиксированные элементы множества Q, то $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ и $(Q,B_{(b_1^{n-2})})$ изоморфные группы. Притом, имеет место равенство:

(ц) $\quad A(x,b_1^{n-2},y) = B_{(a_1^{n-2})}(x,B_{(a_1^{n-2})}(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2})^{-1},y))$,

где $e_{\{1,n\}}$ является $\{1,n\}$-нейтральной операцией n-квазигруппы (Q,A)[13].

Доказательство.

Ввиду леммы 7, леммы 8_1 и леммы 8_2, $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ и

$(Q,B_{(b_1^{n-2})})$ группы.

Далее, ввиду леммы 6_1, группы $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ и $(Q,B_{(b_1^{n-2})})$ изотопные. Таким образом, ввиду известной теоремы Алберта [2-4], $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ и $(Q,B_{(b_1^{n-2})})$ изоморфные группы.

Наконец, так как $(Q,B_{(a_1^{n-2})})$ группа, учитывая (а), (б), лемму 6_2 и доказательство леммы 8_2, находим, что имеет место равенство под (ц).

<u>ТЕОРЕМА 10</u>. Пусть (Q,B) группа и ε отображение множества Q^{n-2} в множество Q, $n \in N\backslash\{1,2\}$. Пусть, далее, для $n = 3$ ε подстановка множества Q, и для $n > 3$ (Q,ε) $(n-2)$-квазигруппа. Тогда, <u>если</u>

$$\text{(A)}\qquad A(x,b_1^{n-2},y) \overset{\text{деф}}{=\!=} B(x,B(\varepsilon(b_1^{n-2})^{-1},y))^{18)}$$

для любых $x,y,b_1^{n-2} \in Q$, <u>то</u> (Q,A) n-квазигруппа Бола и ε ее $\{1,n\}$-нейтральная операция.

<u>Доказательство.</u>

Так как (Q,B) группа а ε подстановка множества Q при $n = 3$ и (Q,ε) $(n-2)$-квазигруппа при $n > 3$, учитывая определение под (A), находим, что (Q,A) n-квазигруппа; [5].

Из (A), так как (Q,B) группа, непосредственно находим, что ε $\{1,n\}$-нейтральная операция n-квазигруппы (Q,A).

Далее, равенства под nB_L и nB_R из определения 2 запишем в следующем виде:

$$\text{(L)}\qquad A(A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},x)),z_1^{n-2},z) =$$

$$= A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-2},z)));\ \text{и}$$

$$\text{(R)}\qquad A(z,z_1^{n-2},A(A(x,\overset{n-2}{x},y),\overset{n-2}{x},x)) =$$

$$= A(A(A(z,z_1^{n-2},x),\overset{n-2}{x},y),\overset{n-2}{x},x).$$

Учитывая определение под (A) и факт, что в группе имеет

18) $= B(B(x,\varepsilon(b_1^{n-2})^{-1}),y)$.

место обобщенная ассоциативность, находим, что имеют место следующие цепи равенств:

$$(L_1)\qquad A(A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},x)),z_1^{n-2},z) =$$

$$= B(B(x,B(\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},B(y,B(\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},x)))),B(\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1},z)) =$$

$$= B(B(B(B(B(B(x,\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),y),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),x),\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),z);$$

$$(L_2)\qquad A(x,\overset{n-2}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-2},z))) =$$

$$= B(B(x,\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),B(B(y,\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),B(B(x,\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),z))) =$$

$$= B(B(B(B(B(B(x,\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},y),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),x),\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),z);$$

$$(R_1)\qquad A(z,z_1^{n-2},A(A(x,\overset{n-2}{x},y),\overset{n-2}{x},x)) =$$

$$= B(B(z,\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),B(B(B(x,\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),y),B(\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},x))) =$$

$$= B(B(B(B(B(B(z,\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),x),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),y),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),x);$$

$$(R_2)\qquad A(A(A(z,z_1^{n-2},x),\overset{n-2}{x},y),\overset{n-2}{x},x) =$$

$$= B(B(B(z,B(\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1},x)),B(\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},y)),B(\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1},x)) =$$

$$= B(B(B(B(B(B(z,\varepsilon(z_1^{n-2})^{-1}),x),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),y),\varepsilon(\overset{n-2}{x})^{-1}),x)$$

для любых $x,y,z,z_1^{n-2} \in Q$.

Учитывая (L_1) и (L_2), находим, что имеет место равенство под (L) для любых $x,y,z,z_1^{n-2} \in Q$. Подобно, учитывая (R_1) и (R_2), находим, что имеет место равенство под (R) для любых $x,y,z,z_1^{n-2} \in Q$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ушан Я.: Нейтральные операции n-группоидов, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Math.Ser., 18-2, 1988, 117-126.

[2] Bruck R.H.: A Survey of Binary Systems, Berlin - Heidelberg - Göttingen, Springer-Verlag, 1958.

[3] Белоусов В.Д.: Основы теории квазигрупп и луп "Наука", Москва, 1967.

[4] Dénes J. and Keedwell A.D.: Latin Squares and their Applications, Akademiai Kiadó, Budapest, 1974.

[5] Белоусов В.Д.: n-арные квазигруппы, "Штиинца", Кишинев, 1972.

REZIME

n-KVAZIGRUPE BOLA

U radu se razmatraju n-kvazigrupe (Q,A), $n \in N\setminus\{1\}$, u kojima važe zakoni

$$A(A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-1}{x})),z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-1}))); \text{ i}$$

$$A(z_1^{n-1},A(A(\overset{n-1}{x},y),\overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1},x),\overset{n-2}{x},y),\overset{n-1}{x}),$$

koji se pri $n = 2$ svode na levi i desni Bolov zakon [2-4]. Autor je ovakve n-kvazigrupe nazvao n-kvazigrupe Bola. Dokazano je da u (Q,A), $n \in N\setminus\{1\}$, postoji $(n-2)$-arna operacija $e_{\{1,n\}}$ koja zadovoljava uslov:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x \;\wedge$$

$$\wedge\; A(x,a_1^{n-2},e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})) = x);$$

$e_{\{1,n\}}$ se naziva $\{1,n\}$-neutralna operacija n-grupoida (Q,A), koju je autor uveo u radu pod [1]. (Na taj način, n-kvazigrupa Bola pri $n = 2$ jeste lupa Moufang [2-4].) Pri tom, $e_{\{1,n\}}$ za $n = 3$ jeste permutacija skupa Q, a pri $n > 3$, $(Q,e_{\{1,n\}})$ jeste $(n-2)$-kvazigrupa. Sledeća dva tvrđenja leže u osnovi konstrukcija n-kvazigrupa Bola ($n \in N\setminus\{1,2\}$): 1. Ako je (Q,A) n-kvazigrupa Bola, $n \in N\setminus\{1,2\}$, i $e_{\{1,n\}}$ je njena $\{1,n\}$-neutralna operacija, onda postoji grupa (Q,B) takva da je $A(x,b_1^{n-2},y) = B(x,B(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2})^{-1},y))$; i 2. Ako je (Q,B) grupa a ε permutacija skupa Q, ili je (Q,ε) $(n-2)$-kvazigrupa, $n \in N\setminus\{1,2,3\}$, onda je (Q,A), gde je $A(x,b_1^{n-2},y) \overset{\text{def}}{=} B(x,B(\varepsilon(b_1^{n-2})^{-1},y))$, n-kvazigrupa Bola, pri čemu je ε njena $\{1,n\}$-neutralna operacija.

SUMMARY

BOL'S n-QUASIGROUPS

In this paper n-quasigroups (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, satisfying the laws

$$A(A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-1}{x})), z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-2}{x}, A(x, z_1^{n-1})))$$

and

$$A(z_1^{n-1}, A(A(\overset{n-1}{x}, y), \overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1}, x), \overset{n-2}{x}, y), \overset{n-1}{x})$$

are considered. For $n = 2$ these laws reduce to Bol's left and right law [2-4]. The author call such n-quasigroups Bol's n-quasigroups. It is proved that in (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, there is an $(n-2)$-ary operation $e_{\{1,n\}}$ satisfying the following condition:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2} (\forall x \in Q)(A(e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x) = x \;\wedge$$
$$\wedge\; A(x, a_1^{n-2}, e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2})) = x);$$

$e_{\{1,n\}}$ is said to be a $\{1,n\}$-neutral operation of n-groupoid (Q,A), introduced by the author in the paper [1]. (Hence, for $n = 2$, a Bol's n-quasigroup is a Moufang's loop.) For $n = 3$, $e_{\{1,n\}}$ is a permutation of the set Q, and for $n > 3$, $(Q, e_{\{1,n\}})$ is an $(n-2)$-quasigroup. Constructions of Bol's n-quasigroups, $n \in N \setminus \{1,2\}$, are based on the following two propositions: 1. If (Q,A) is a Bol's n-quasigroup, $n \in N \setminus \{1,2\}$, and $e_{\{1,n\}}$ is it's $\{1,n\}$-neutral operation, then there is a group (Q,B) such that $A(x, b_1^{n-2}, y) = B(x, B(e_{\{1,n\}}(b_1^{n-2})^{-1}, y))$; and 2. If (Q,B) is a group, and either ε is a permutation of the set Q or (Q,ε) is an $(n-2)$-quasigroup, $n \in N \setminus \{1,2,3\}$, then for $A(x, b_1^{n-2}, y) \overset{def}{=} B(x, B(\varepsilon(b_1^{n-2})^{-1}, y))$, (Q,A) is a Bol's n-qasigroup, where ε is it's $\{1,n\}$-neutral operation.

Received by the editors February 7, 1990.