Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 18,2, 117–126 (1988)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ n-ГРУППОИДОВ

Янез Ушан

*Institute of Mathematisc, University of Novi Sad,
21000 Novi Sad, Dr Ilije Djuričića 4, Yugoslavia*

РЕЗЮМЕ

В работе вводится понятие (i,j) -нейтральной операцией в n-группоиде $(n \in N \setminus \{1\},\ i \neq j,\ (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2)$ как одно обобщение единицей в группоиде. В самом деле, отображение $e_{(i,j)}: Q^{n-2} \to Q$ (i,j)-нейтральная операция в n-группоиде (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1}, e_{(i,j)}(a_1^{n-2}), a_i^{j-2}, x, a_{j-1}^{n-2}) = x \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, x, a_i^{j-2}, e_{(i,j)}(a_1^{n-2}), a_{j-1}^{n-2}) = x).$$

В n-группоиде, $n \in N \setminus \{1\}$, не существует больше чем одна (i,j)-нейтральная операция для каждых $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$. Основной результат: если $n \in N \setminus \{1,2\}$, то n-полугруппа (Q,A) является n-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) обладает $(1,n)$-нейтральной операцией.

*

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.

Key words and phrases: n-groupoides, n-quasigroups, n-semigroups, n-groups, $\{i,j\}$-neutral operations on n-groupoids.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (Q,A) n-группоид, $n \in N \setminus \{1\}$. Пусть, далее, $e_{\{i,j\}}$, где $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ и $i \neq j$, отображение множества Q^{n-2} в множество Q. $(n-2)$-арную операцию $e_{\{i,j\}}$ назовем $\{i,j\}$-нейтральной операцией n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(1_n) \qquad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},x,a_{j-1}^{n-2}) = x \wedge A(a_1^{i-1},x,a_i^{j-2},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = x).^{1)}$$

Если $n = 2$, то (1_n) превращается в

$$(1_2) \qquad (\forall x \in Q)(A(e_{\{1,2\}}(\emptyset),x) = x \wedge A(x,e_{\{1,2\}}(\emptyset)) = x).^{1)}$$

Таким образом, если $n = 2$, то речь идет об определении единицы группоида, т.е. об определении нульарной операции $e_{\{1,2\}}$-взятие единицы $e_{\{1,2\}}(\emptyset)$ [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В n-группоиде (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, не существует больше чем одна $\{i,j\}$-нейтральная операция для каждых $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$.

Доказательство.

Пусть существуют $e_{\{i,j\}}: Q^{n-2} \to Q$ и $\bar{e}_{\{i,j\}}: Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющие условиям:

$$A(a_1^{i-1},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},x,a_{j-1}^{n-2}) = x \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1},x,a_i^{j-2},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = x \quad \text{и}$$

1) Последовательност $c_p,\ldots,c_q$ (где $p,\ldots,q$, последовательность натуральных чисел следующих друг за другом) для краткости обозначаем через c_p^q; в частности: $c_p^p = c_p$. Далее, под c_p^{p-1}, $p \in N$, понимаем пустую последовательность (отсуствие последовательности). Притом, если речь идет о, например, c_1^1, d_1^0, то c_1^1, d_1^0 считаем последовательностю c_1^1, и если речь идет о d_1^0 в некоторых случаях будем обозначать через $\emptyset$; например, $e_{\{1,2\}}(a_1^0)$ будем обозначать через $e_{\{1,2\}}(\emptyset)$.

2) т.е. о определению отображения $e_{\{1,2\}}: Q^0 \to Q$, $Q^0 \overset{\text{деф}}{=\!=} \{\emptyset\}$, удовлетворяющего условию (1_2). Иначе, $^{1,2)}e_{\{1,2\}}(\emptyset) \in Q$ обозначаем только через e.

$$A(a_1^{i-1},\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{i-2},y,a_{j-1}^{n-2}) = y \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1},y,a_i^{j-2},\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = y$$

для любого $(a_1^{n-2},x,y) \in Q^n$.

Отсюда находим, что имеют место равенства

$$A(a_1^{i-1},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2})$$

и

$$A(a_1^{i-1},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2})$$

для любого $(a_1^{n-2}) \in Q^{n-2}$, откуда получим, что

$$\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}) = e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2})$$

для любого $(a_1^{n-2}) \in Q^{n-2}$.

Утверждение доказано.

Учитывая факт, что формула под (1_n) эквивалентна формуле

$$(\bar{1}_n)\quad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},x,a_{j-1}^{n-2}) = x \wedge$$

$$\wedge\ (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1},x,a_i^{j-2},e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = x,$$

подобным способом (из доказательства утверждения 1) доказывается следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 2</u>. Пусть (Q,A) n-группоид, $n \in N \setminus \{1\}$. Пусть, далее, <u>существуют</u> отображения $e_{(i,j)}: Q^{n-2} \to Q$ и $e_{(j,i)}: Q^{n-2} \to Q$, где $i < j$ и $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, удовлетворяющие условиям:

$$(1_{Ln})\quad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(a_i^{i-1},e_{(i,j)}(a_1^{n-2}),a_i^{j-2},x,a_{j-1}^{n-2}) = x \quad \text{и}$$

$$(1_{Rn})\quad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)A(a_1^{i-1},x,a_i^{j-2},e_{(j,i)}(a_1^{n-2}),a_{j-1}^{n-2}) = x.$$

Тогда имеют место равенства:

$$e_{(i,j)}(a_1^{n-2}) = e_{(j,i)}(a_1^{n-2}) = e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2})$$

для любого $(a_1^{n-2}) \in Q^{n-2}$, где $e_{\{i,j\}}$ $\{i,j\}$-нейтральная операция n-группоида (Q,A).

* *

ЛЕММА 3. Пусть в n-группоиде (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, имеет место:

$$\underline{An} \qquad \bigwedge_{t=2}^{n} (\forall a_1^{2n-1} \in Q)(A(A(a_1^{n}),a_{n+1}^{2n-1}) = A(a_1^{t-1},A(a_t^{n+t-1}),a_{n+t}^{2n-1})$$ [1].

Пусть, далее, существует $\{1,n\}$-нейтральная операция $e_{\{1,n\}}$ n-группоида (Q,A). Тогда, если $n \geq 3$, то в (Q,A) имеет место закон сокращения, т.е. следующая формула:

$$\underline{K} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} (\forall a_1^{n-1} \in Q)(\forall b \in Q)(\forall c \in Q)(A(a_1^{i-1},b,a_i^{n-1}) = A(a_1^{i-1},c,a_i^{n-1}) \Rightarrow b = c).$$

Доказательство.

а) В каждом n-группоиде (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, имеет место монотония, т.е. имеет место следующая формула:

$$\underline{M} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} (\forall a_1^{n-1} \in Q)(\forall b \in Q)(\forall c \in Q)(b = c \Rightarrow A(a_1^{i-1},b,a_i^{n-1}) = A(a_1^{i-1},c,a_i^{n-1})).$$

б) Пусть i любой элемент множества $\{2,\dots,n-1\}$. Пусть, далее, a_1^{n-1}, b, c любые элементы множества Q удовлетворяющие равенству:

$$\text{(a)} \qquad A(a_i^{i-1},b,a_i^{n-1}) = A(a_i^{i-1},c,a_i^{n-1}).$$

Учитывая равенство под (a), ввиду M, An и (1_n) для $i = 1$ и $j = n$, находим, что имеет место следующая цепь импликаций:

[1] т.е., пусть (Q,A) n-полугруппа.

$$A(a_1^{i-1},b,a_i^{n-1}) = A(a_1^{i-1},c,a_i^{n-1}) \Rightarrow$$

$$A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1},a_2^{i-1}),\overset{n-i-1}{a_1},A(a_1^{i-1},b,a_i^{n-1}),\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}}))^{1)} =$$

$$= A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1},a_2^{i-1}),\overset{n-i-1}{a_1},A(a_1^{i-1},c,a_i^{n-1}),\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1},a_2^{i-1}),\overset{n-i-1}{a_1},a_1^{i-1},b),a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}})) =$$

$$= A(A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1},a_2^{i-1}),\overset{n-i-1}{a_1},a_1^{i-1},c),a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(b,a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}})) =$$

$$= A(c,a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}},e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1},\overset{i-2}{a_{n-1}})) \Rightarrow \quad b = c.$$

Отсюда, так как $\theta(\perp = p) = T$ и i любой элемент множества $\{2,\ldots n-1\}$, находим, что имеет место импликация под К для любых $i \in \{2,\ldots\ldots,n-1\}$. Подобним способом находим, что импликация под К имеет место для $i = 1$ и $i = n$.

Учитывая формулы под М и К, находим, что имеет место и следующее утверждение:

<u>ЛЕММА 3'</u>. Пусть (Q,A) n-полугруппа[2]; $n \in N \setminus \{1\}$. Пусть, далее, <u>существует</u> $(1,n)$-нейтральная операция $e_{\{1,n\}}$ n-группоида (Q,A). Тогда, <u>если</u> $n \geq 3$, <u>то</u> в (Q,A) имеет место следующая формула:

<u>МК</u> $$\bigwedge_{i=1}^{n}(\forall a_1^{n-1} \in Q)(\forall b \in Q)(\forall c \in Q)(A(a_1^{i-1},b,c_i^{n-1}) = A(a_1^{i-1},c,a_i^{n-1}) \Leftrightarrow b = c).$$

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 4</u>. Пусть (Q,A) n-полугруппа. Пусть,

---

1) Последовательность $\underbrace{a,\ldots,a}_{p}$ для краткости обозначаем через $\overset{p}{a}$; $\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{n-i} \Leftrightarrow \overset{n-i}{a_1}$.

2) n-группоид (Q,A) удовлетворяющий условию Ап из леммы 3.

далее, существует $\{1,n\}$-нейтральная операция $e_{\{1,n\}}$ n-группоида (Q,A). Тогда, если $n \geq 3$, то (Q,A) n-квазигруппа[1]. Притом, имеют место эквивалентности:

$$A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}) = a_n \Leftrightarrow x_i = A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_n, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})),\ i \in \{2,\dots,n-1\};\ A(x, a_1^{n-1}) = a_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = A(a_n, e_{\{1,n\}}(a_2^{n-1}), \overset{n-3}{a}_1, e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{a}_1));\ \text{и}\ A(a_1^{n-1}, y) = a_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-2}{a}_{n-1}), \overset{n-3}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_1^{n-2}), a_n)$$ для любых $a_1^n, x_i, x, y \in Q$.

Доказательство.

Пусть i любой элемент множества $\{2,\dots,n-1\}$. Пусть, далее, a_1^n, x_i любые элементы множества Q. Тогда, ввиду МК из леммы 3', An (из леммы 3) и (1_n) для $i = 1$ и $j = n$, находим, что имеет место следующая цепь эквиваленци :

$$A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}) = a_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}), \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})) =$$
$$= A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_n, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(A(a_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_1^{i-1}, x_i), a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})) =$$
$$= A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-1}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_n, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})) =$$
$$\Leftrightarrow A(x_i, a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{n-2}{a}_{n-1})) =$$
$$= A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_n, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_i = A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a}_1, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a}_1, a_n, \overset{i-2}{a}_{n-1}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a}_{n-1})),$$

откуда получим, что имеет место эквивалентность:

[1] n-группоид (Q,A) является n-квазигруппой тогда и только тогда, когда уравнение $A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}) = a_n$ обладает в точности одним решением для любых $a_1^n \in Q^n$ и каждого $i \in \{1,\dots,n\}$; например [3].

$$A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}) = a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1}, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a_1}, a_n, \overset{i-2}{a_{n-1}}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a_{n-1}})).$$

Отсюда, так как A и $e_{\{1,n\}}$ операций в Q, находим, что уравнение $A(a_1^{i-1}, x_i, a_i^{n-1}) = a_n$ для любых $a_1^n \in Q$ и каждого $i \in \{2,\dots,n-1\}$, обладает единственным решением, именно, решением:

$$A(e_{\{1,n\}}(\overset{n-i}{a_1}, a_2^{i-1}), \overset{n-i-1}{a_1}, a_n, \overset{i-2}{a_{n-1}}, e_{\{1,n\}}(a_i^{n-1}, \overset{i-2}{a_{n-1}})).$$

Подобним способом доказывается случай $i = 1$ и $i = n$.

n-группоид (Q,A) является n-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) n-полугруппа и n-квазигруппа[1]. Таким образом, ввиду утверждения 4, имеет место следующее утверждение:

<u>СЛЕДСТВИЕ 5</u>. <u>Если</u> n-группоид (Q,A) n-полугруппа обладающая $\{1,n\}$-нейтральной операцией и $n \geq 3$, <u>то</u> (Q,A) n-группа.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 6</u>. Если (Q,A) n-группа, то (Q,A) обладает $\{1,n\}$-нейтральной операцией[2].

<u>Доказательство.</u>

Пуст (Q,A) n-группа. Пусть, далее, a, a_1^{n-2} любые элементы множества Q. Тогда, так как (Q,A) и n-квазигруппа, уравнение

$$\text{(а)} \qquad A(x, a_1^{n-2}, a) = a$$

обладает единственным решением по неизвестной x. Решение этого уравнения обозначим через

$$\text{(б)} \qquad e_{(1,n)}^{(a)}(a_1^{n-2}).$$

---

1) n-группы введены в работе под [1]. Первая монография по теории n-группы - работа под [2].

2) $n \in N \setminus \{1\}$; для $n = 2$ речь идет о единицей группы.

Притом, для каждого $a \in Q$ $e^{(a)}_{(1,n)}$ является отображением множества Q^{n-2} в множество Q.

Пусть, далее, a фиксированный элемент множества Q. Тогда, так как (Q,A) и n-квазигруппа, для каждого $b \in Q$ существует в точности один $y \in Q$ удовлетворяющий уравнению:

(ц) $$b = A(\overset{n-1}{a}, y).$$

Учитывая (а), (б) и (ц), ввиду Ап из леммы 3, находим, что имеет место следующая цепь равенств:

$$\begin{aligned} A(e^{(a)}_{(1,n)}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, b) &= A(e^{(a)}_{(1,n)}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, A(\overset{n-1}{a}, y)) = \\ &= A(A(e^{(a)}_{(1,n)}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, a), \overset{n-2}{a}, y) = \\ &= A(a, \overset{n-2}{a}, y) = \\ &= A(\overset{n-1}{a}, y) = \\ &= b, \end{aligned}$$

откуда получаем, что имеет место формула:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall b \in Q) A(e^{(a)}_{(1,n)}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, b) = b.$$

Притом, так как $e^{(a)}_{(1,n)}$ одно и то же отображение для каждого $a \in Q$, $e^{(a)}_{(1,n)}$ обозначим через $e_{(1,n)}$. В самом деле, мы доказали, что в n-группе (Q,A) существует отображение $e_{(1,n)}: Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющее условию:

(д) $$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q) A(e_{(1,n)}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x) = x^{1)}.$$

Подобным способом доказывается, что существует и отображение $e_{(n,1)}: Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющее условию:

(д') $$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q) A(x, a_1^{n-2}, e_{(n,1)}(a_1^{n-2})) = x^{2)}.$$

---

1) см. формулу под (1_{Ln}) из утверждения 2 для $i = 1$ и $j = n$.
2) см. формулу под (1_{Kn}) из утверждения 2 для $i = 1$ и $j = n$.

Так как мы доказали, что существуют отображения $e_{(1,n)}:Q^{n-2} \to Q$ и $e_{(n,1)}:Q^{n-2} \to Q$ удовлетворяющие, в том же порядке, условиям (д) и (д´), ввиду утверждения 2, существует отображение $e_{\{1,n\}}:Q^{n-2} \to Q$ такое что

1° $e_{\{1,n\}} = e_{(1,n)} = e_{(n,1)}$; и

2° $e_{\{1,n\}}$ является $\{1,n\}$-нейтральной операцией в n-группе (Q,A).

Утверждение доказано.

Учитывая следствие 5 и утверждение 6, находим, что имеет место следующая:

ТЕОРЕМА 7. Если $n \in N\backslash\{1,2\}$, то n-полугруппа (Q,A) является n-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) обладает $\{1,n\}$-нейтральной операцией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dörnte W.: Untersuchengen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math. Z., 29, 1928, 1-19.

[2] Post E.L.: Polyadic groups, Trans. Amer. math. Soc., 48, 1940, 208-350.

[3] Белоусов В.Д.: n-арные квазигруппы, "Штиинца", Кишинев, 1972.

REZIME

NEUTRALNE OPERACIJE n-GRUPOIDA

U radu se uvodi pojam $\{i,j\}$-neutralne operaciej n-grupoida $(n \in N \setminus \{1\}, i \neq j, (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2)$ kao jedno uopštenje neutralnog elementa grupoida. U n-grupoidu postoji najviše jedna $\{i,j\}$-neutralna operacije pri svakom $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$. Osnovni rezultat rada jeste sledeće trvđenje: ako je $n \in N \setminus \{1,2\}$, onda je n-polugrupa (Q,A) n-grupa tada i samo tada, kada (Q,A) ima $\{1,n\}$-neutralnu operaciju.

SUMMARY

NEUTRAL OPERATIONS ON n-GROUPOIDS

In this article the notion of an $\{i,j\}$-neutral operation on an n-groupoid ($n \in N \setminus \{1\}$, $i \neq j$, $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$) is introduced as one generalization of a neutral element in a groupoid. Namely, a mapping $e_{\{i,j\}}: Q^{n-2} \to Q$ is an $\{i,j\}$-neutral operation on an groupoid (Q,A) if and only if the following formula holds:

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}), a_i^{j-2}, x, a_{j-1}^{n-2}) = x \wedge$$
$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, x, a_i^{j-2}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}), a_{j-1}^{n-2}) = x).$$

In an n-groupoid, there is at most one $\{i,j\}$-neutral operation, for all $i,j \in \{1,\dots$ $\dots,n\}$, $i \neq j$. The main result:

If $n \in N \setminus \{1,2\}$, then an n-semigroup (Q,A) is an n-group if and only if (Q,A) has an $\{1,n\}$-neutral operation.

Received by the editors December 27, 1989.