Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 18,2, 1–23 (1988)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

SUR L'EXISTENCE DES ALGÈBRES LIBRES POUR LES THÉORIES NÉGATIVES

Michel Hébert

Départment de Mathématiques, Université Laval, Québec, P.Q. G1K 7P4, Canada

Abstract

On the existence of free algebras for the negative theories. We establish conditions on a set Σ of negative sentences (in a finitary algebraic language) for which its class of models $M(\Sigma)$ has free algebras (in the classical sense as well as in the "categorical" sense). This is shown to be equivalent to identify the "positive properties" on the absolutely free algebras. The answer depends heavily on the set τ of operation symbols in the language. For example, if τ is infinite, then $M(\Sigma)$ always has all free algebras. When τ is finite, there exists a (positive) sentence ψ (depending only on τ) which is such that $M(\Sigma)$ has free algebras if and only if $\Sigma \cup \{\psi\}$ is consistant.

0. Introduction

La notion d'algèbre libre est en général différente selon qu'on se place du point de vue traditionnel de l'algèbre universelle ou du point de vue catégorique. Dans la première partie, nous établissons quelques liens simples entre les deux définitions, montrant en particulier qu'elles correspondent lorsque la classe de référence est l'ensemble des modèles d'une famille d'énoncés spéciaux de Horn et d'énoncés négatifs. Nous abordons ensuite le problème de l'existence des algèbres libres dans les classes de modèles des théories négatives. (i.e. axiomatisables par des

AMS Mathematics Subject Classifications: 08C10, 03C52, 08B20.
Key words and phrases: Free algebras, negative sentences.

* Avec le support financier du CRSNC (Canada) et du FCAC (Québec)

énoncés négatifs), problème qui se ramènera à l'étude des "propriétés positives" des algèbres absolument libres.

La deuxième section met en lumière des relations entre la syntaxe des énoncés négatifs ayant la propriété désirée et la cardinalité du type. En particulier, si le type est de cardinalité infinie, toute théorie négative engendre une classe ayant les algèbres libres.

Dans la troisième section, nous montrons que les propriétés positives d'une algèbre absolument libre de rang fini et pour un type fini découlent toutes d'un seul et même fait, lequel se formule par un énoncé positif ψ. Il s'en suit que le problème de l'existence des algèbres libres pour $M(\Sigma)$, pour une théorie négative Σ, est équivalent à la consistence des $\Sigma \cup \{\psi\}$.

Les résultats exposés ont été en partie annoncés dans [4].

1. Algebres libres et algebres librement engendrees

Un type τ d'algèbres est ici un langage du premier order sans symbole de relation. A τ est associée une suite d'entiers non-négatifs $\langle a_0, a_1, \ldots, a_\gamma, \ldots\rangle_{\gamma<\sigma(\tau)}$ auxquels correspondent des symboles d'opérations (qu'on appellera par la suite *opérateurs*, par abus de langage) a_γ-aires notés ω_γ ou c_γ selon que $a_\gamma > 0$ ou que $a_\gamma = 0$ respectivement. $\sigma(\tau)$ est appelé l'*ordre* de τ. Les (τ-)*algèbres* sont les structures pour τ et un (τ-)-*homomorphisme* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une fonction $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre les ensembles sous-jacents telle que $f(c_\gamma) = c_\gamma$ (on confondra toujours par la suite les opérateurs avec leur interprétation dans les structures) et pour toute formule atomique ψ et pour toute suite $(s_1, s_2, \ldots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} \models \psi\ [s_1, s_2, \ldots]$ implique $\mathcal{B} \models \psi\ [f(s_1), f(s_2), \ldots]$. $V(\tau)$ désignera indifféremment la catégorie ainsi déterminée ou la classé de ses objects.

Le foncteur oubli $G\colon V(\tau) \to Ens$ a un adjoint à gauche F, et si X est un ensemble de cardinalité α, GFX est (à un isomorphisme près) l'algèbre absolument libre sur α générateurs (= algèbre des polynômes α-aires de [3]), qu'on notera W^α. W désignera W^0ou W^1selon qu'il existe $\gamma < \sigma(\tau)$ avec $a_\gamma = 0$ ou non. Pour $\mathcal{A} \in V(\tau)$, on notera $|\mathcal{A}|$ la cardinalité de $G\mathcal{A}$. Si $|\mathcal{A}|=1$, on dira que $\mathcal{A}$ est *triviale*. Remarquons que les algèbres triviales sont toutes isomorphes entre elles.

Si K est une famille de τ-algèbres, θ_K désignera la relation de congruence sur W^α définie de la façon suivante: si $p, q \in W^\alpha$, alors $p \equiv q(\theta_K)$ si et seulement si $p(b_0, b_1, \ldots, b_\delta, \ldots) = q(b_0, b_1, \ldots, b_\delta, \ldots)$ pour toute suite $\langle b_0, b_1, \ldots, b_\delta, \ldots\rangle_{\delta<\alpha}$ dans $\mathcal{B}$ et pour tout $\mathcal{B} \in K$. On notera également par K la sous-catégorie pleine de $V(\tau)$ déterminée par K. Pour alléger l'écriture, on écrira parfois $\mathcal{A}$ pour $G\mathcal{A}$.

Soit α un cardinal. K est dit *avoir l'algèbre libre sur* α s'il existe un ensemble X de cardinalité α, une algèbre $\mathfrak{X}$ dans K et une fonction $\eta_X : X \to \mathfrak{X}$ telle que pour toute fonction $f\colon X \to \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in K$, il existe un unique homomorphisme $f^\#:\mathfrak{X} \to \mathcal{A}$ tel que $f^\#\eta_X = f$. On dira alors que $\mathfrak{X}$ (on η_X) est *l'algèbre libre sur* α *(ou sur X) pour* K. Il est ais de voir que $\mathfrak{X}$ est déterminé, à un isomorphisme près, par la cardinalité de X, et que la restriction à K du foncteur $G\colon V(\tau) \to Ens$ a un adjoint à gauche si et seulement si K a les algèbres libres sur tous les cardinaux. On remarque également que η_X est injectif si K possède une algèbre non-triviale. Un sous-ensemble A de $G\mathcal{A}$ détermine une plus petite sous-algèbre $\langle A\rangle$ de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset G \subset \langle A\rangle$, appelée la sous-algèbre engendrée par A. Si η_X est injectif et que $\mathfrak{X} = \langle\eta_X(X)\rangle$, alors $\mathfrak{X}$ (ou η_X) est dite *l'algèbre libre sur* α *générateurs pour* K. Cette dernière notion est celle utilisée le plus souvent en algèbre universelle (voir par exemple [3]). Les éléments de $\eta_X(X)$ sont les *générateurs libres de* $\mathfrak{X}$.

Les deux notion, distinctes en général, sont bien entendu liées entre elles. On sait que la τ-algèbre W^α/Θ_K, qui est toujours l'algèbre libre sur α générateurs pour la variété $HSP(K)$ engendrée par K, est la seule candidate au poste d'algèbre libre sur α générateurs pour K, et elle est "élue" si et seulement si elle est dans K([3], p. 167). La proposition suivante montre que l'algèbre libre sur α pour K, si elle existe, est toujours une extension de W^α/Θ_K. Plus précisément:

Proposition 1.1. *Si $\eta_X\colon X \to \mathfrak{X}$ est l'algèbre libre sur α pour K, alors sa restriction $\eta'_X : X \to \langle\eta_X(X)\rangle$ est l'algèbre sur α générateurs pour $HSP(K)$.*

Preuve. Il est aisé de voir que η_X, et donc η'_X, a la propriété universelle pour $P(K)$ (= la classe des produits des algèbres dans K)

Si $f\colon X \to \mathcal{B}$ est une fonction quelconque avec $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A} \in P(K)$, on considère le diagramme commutatif où $(if)^\#$ est induit par if

$$\begin{tikzcd} \langle\eta_X(X)\rangle \arrow[r, hook, "j"] & \mathfrak{X} \arrow[r, dashed, "(if)^\#"] & A \\ X \arrow[u, "\eta'_X"] \arrow[ur, "\eta_X"'] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

et l'universalité de η_X. On montre sans difficulté que $\operatorname{Im}((if)^\#.j) \subset \mathcal{B}$, d'où, par restriction, il existe un homomorphisme $f^\#:\langle\eta_X(X)\rangle \to \mathcal{B}$ tel que $f^\#\ \eta_X = f$. Son unicité est immédiate puisque $\operatorname{Im}(\eta'_X)$ engendre $\langle\eta_X(X)\rangle$.

Finalement, si $h:A \twoheadrightarrow C$ est un τ-homomorphisme surjectif avec $A \in SP(K)$, et g est une fonction de X dans C, on choisit une fonction $k:C \to A$ telle que $hk=1_C$, et même si l'homomorphisme induit $(kg)^{\#}\cdot j$: $\langle\eta_X(X)\rangle \to A$ dépend du choix de k, on peut vérifier aisément que tel n'est pas le cas pour $h(kg)^{\#}\cdot j:\langle\eta_X(X)\rangle \to C$, qui est l'homomorphisme cherché. □

Ainsi, les deux notions d'algèbre libre sont quelquefois confondues, par exemple lorsque K est fermée pour les sous-algèbres. La proposition suivante donne un autre cas de cette situation.

Proposition 1.2. *Si K a l'algèbre libre sur γ générateurs, alors les deux notion d'algèbre libre pour K coincident pour tout $\alpha \le \gamma$.*

Preuve. Si $[\ ]_{\Theta_K}$: $\{x_\mu\}_{\mu<\gamma} \to W^\alpha/\Theta_K$ est l'algèbre libre sur γ générateurs et $\eta_\alpha:\{x\}_{\mu\ \mu<\alpha} \to X_\alpha$ est l'algèbre libre sur α , on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
W^\gamma/\Theta_K \arrow[rr, "(\eta_\alpha\cdot p)^\#"] \arrow[dr, dashed, "(\eta'_\alpha\cdot p)^\#"'] & & X_\alpha \\
& \langle \mathrm{Im}\ \eta_\alpha\rangle \arrow[ur, hook] & \\
\{x_\mu\}_{\mu<\gamma} \arrow[uu, "{[\ ]_{\Theta_K}}"] \arrow[r, two heads, "p"'] & \{x_\mu\}_{\mu<\alpha} \arrow[u, "\eta'_\alpha"'] \arrow[uur, "\eta_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

où $p(x_\mu) = \begin{cases} x_\mu & \text{si } \mu < \alpha \\ x_0 & \text{si } \mu \ge \alpha \end{cases}$ et $(\eta'_\alpha\cdot p)^\#$ est induit par $(\eta'_\alpha\cdot p)$ puisque $[\ ]_{\Theta_K}$ à la propriété universelle pour $HSP(K)$. Comme $W^\alpha/\Theta_K \in K$, on voit aisément que $(\eta_\alpha\cdot p)^\#$ a un inverse à droite, (induit par l'inclusion $\{x\ \}_{\mu\ \mu<\alpha} \hookrightarrow \{x_\mu\}_{\mu<\gamma}$). En particulier il est surjectif et donc l'inclusion $\langle \mathrm{Im}\ \eta_\alpha\rangle \hookrightarrow X_\alpha$ est l'identité. □

Quelques notations avant de poursuivre:

Si Σ est une théorie, $M(\Sigma)$ désignera la famille des modèles de Σ. $\Theta_{M(\Sigma)}$ sera noté simplement Θ_Σ. Si τ est tel que $a_\gamma > 0$ pour tout $\gamma < \sigma(\tau)$, alors $CW^* = \emptyset$ et dans ce cas les mots "pour tout α " signifieront ici "pour tout $\alpha > 0$". Pour le reste du texte, Σ sera toujours supposé *non-triviale*, c'est-à-dire que $M(\Sigma)$ a une algèbre non-triviale.

Une formule *positive* est une formule construite à partir de formules atomiques en n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Une formule *négative* est la négation d'une positive; on peut toujours l'écrire sous la forme

$$(\phi) \qquad Q_1x_1\ldots Q_nx_n\ (\sim\psi_1\wedge\ldots\wedge\sim\psi_m)$$

qu'on dira *normale*, où chaque Q_i est $\forall$ ou $\exists$ et les ψ_i sont des conjonctions de formules atomiques. Une *théorie négative* est un ensemble d'énoncés négatifs. Remarquons qu'une théorie négative $\Sigma = \{\phi_i \mid i \in I\}$ est consistante si et seulement si chacun de ses éléments est consistant, puisque si $A_i \models \phi_i$ pour chaque i, alors $\prod_{i\in I} A_i \models \sum$. De plus, une algèbre triviale ne peut satisfaire un énoncé négatif, et donc une théorie négative consistante n'est jamais triviale.

Une formule *spéciale* de Horn* est une conjonction de formules de la forme $\forall x_1\ldots\forall x_n\ (\phi \vee \psi)$ (où ϕ ou ψ peut êntre absent) où ϕ est une formule négative et ψ une formule atomique. On sait que $M(\Sigma)$ est fermée pour les sous-produits directs non-triviaux si et seulement si Σ est équivalente à un ensemble d'énoncés spéciaux* de Horn ([6]).

Proposition 1.3. *Soit Σ équivalente à un ensemble d'énoncés spéciaux* de Horn. Alors $M(\Sigma)$ a l'algèbre libre sur χ_0 générateurs, et donc les deux notions d'algèbre libre y coincident pour tout cardinal.*

Preuve. Un résultat récent de S. Burris ([1],p.76) montre que pour toute classe K d'algèbre, il existe un cardinal infini α tel que W^{γ}/θ_K est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbre dans K pour tout $\gamma \geq \alpha$. Comme W^{γ}/θ_K est élémentairement équivalent à W^{χ_0}/θ_K, on a immédiatement le résultat annoncé si $K = M(\Sigma)$ (remarquons que $W^{\chi_0}/\theta_{\Sigma}$ ne peut être triviale si Σ n'est pas une théorie triviale). □

La proposition 1.3. s'applique en particulier aux théories négatives, mais dans ce dernier cas, on peut dire plus:

Theoreme 1.4. *Soit Σ une théorie négative. Alors*

a) $M(\Sigma)$ a l'algèbre libre sur α si et seulement si $W^{\alpha} \models \Sigma$.

b) $M(\Sigma)$ a toutes les algèbres libres si et seulement si $W \models \Sigma$.

Preuve.

a) Par 1.3, $M(\Sigma)$ a l'algèbre libre sur α si et seulement si $W^{\alpha}/\theta_{\Sigma} \models \Sigma$.

Le résultat suit alors de l'existence de l'épimorphisme canonique $W^{\alpha} \twoheadrightarrow W^{\alpha}/\theta_{\Sigma}$ et du fait que les épimorphismes contre-préservent les énoncés négatifs (car ils préservent les énoncés positifs ([3], p.282)), puisque W^{α} est l'algèbre libre sur α pour $V(\tau)$.

b) Ceci découle de l'existence d'épimorphismes de W^{α} dans W pour tout $\alpha > 0$. □

Remarquons que pour Σ négative, on a en fait toujours $W^{\alpha}/\theta_{\Sigma} \cong W^{\alpha}$ (ce qui revient à dire qu'aucune identité non-triviale ne peut découler d'une théorie négative). Plus généralement, on peut montrer que si $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$, où Σ' est un ensemble d'identités et Σ'' un ensemble d'énoncés négatifs, alors $M(\Sigma)$ a l'algèbre libre sur α si et seulement si $W^{\alpha}/\theta_{\Sigma'} \models \Sigma''$.

La partie b) du théorème 1.4. motive la question suivante.

2. Quels sont les enonces negatifs que verifie W ? (vue syntaxique)

Montrons d'abord comment on peut restreindre le champ d'investigation à un type d'énoncés plus simple.

Definition 2.1. *Soit ψ une conjonction de formules atomiques ne faisant intervenir que les variables $x_1,\dots,x_n$. ψ est dite décomposable si $W \models \exists x_1\dots\exists x_n \psi$ (si et seulement si $W^{\alpha} \models \exists x_1\dots\exists x_n \psi$ pour un α quelconque); dans ce cas, on effectue les manipulations suivantes sur ψ:*

1) on remplace les égalités du type "$\omega_i r_1\dots r_{a_i} = \omega_i s_1\dots s_{a_i}$" ($r_j$ et s_j des polynômes) par "$r_1 = s_1 \wedge\dots\wedge r_{a_i} = s_{a_i}$";
2) on remplace les couples d'égalités du type $\langle x_j = \omega_i r_1\dots r_{a_i},\ x_j = \omega_i s_1\dots s_{a_i}\rangle$ par "$x_j = \omega_i s_1\dots s_{a_i} \wedge \omega_i r_1\dots r_{a_i} = \omega_i s_1\dots s_{a_i}$"; ou bien par "$x_j = \omega_i r_1\dots r_{a_i} \wedge \omega_i r_1\dots r_{a_i} = \omega_i s_1\dots s_{a_i}$"; .
3) on remplace tout couple d'égalités du type $\langle x_i = x_j,\ x_j = b\rangle$ par "$x_i = b \wedge x_j = b$" si b n'est pas une variable;
4) on enléve les égalités triviales et les répétitions et on remplace tout triplet d'égalités du genre $\langle a=b,\ b=c,\ a=c\rangle$ par "$a=b \wedge b=c$";
5) on répète les manipulations 1) à 4) sur le résultat obtenu, et ce autant de fois que c'est possible.

Par l'hypothèse sur ψ on voit aisément qu'on peut écrire le résultat final, $\tilde{\psi}$, sous la forme

$$(\bullet)\begin{cases} "x_{u_1} = p_1 \wedge x_{u_2} = p_2 \wedge \ldots \wedge x_{u_r} = p_r" \text{ où les } x_{u_j} \text{ sont tous distincts, chaque} \\ \text{égalité de la forme } "x_i = x_j" \text{ est telle que } i < j, \text{ où } x_{u_j} \notin p_j \text{ pour chaque} \\ j \text{ et où les } p_j \text{ qui sont des variables sont tous distincts.} \end{cases}$$

Soit ϕ un énoncé positif sous forme normale $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$. Il suit de la définition que si ψ_i n'est pas décomposable, alors $W^\alpha \models \phi$ si et seulement si $W^\alpha \models Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{i-1} \vee \psi_{i+1} \vee \ldots \psi_m)$. (Si $i=l=m$, alors $W \models \phi$ clairement). Notons $\tilde{\phi}$ l'énoncé obtenu de ϕ enlevant les ψ_i non-décomposables, en remplacant les autres ψ_i par $\tilde{\psi}_i$ et en enlevant les quantificateurs devenus inutiles. Il est aisé de vérifier que $W^\alpha \models \phi$ si et seulement si $W^\alpha \models \tilde{\phi}$. Un énoncé $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$ où chaque ψ_i vérifie ($\bullet$) sera dit *décomposé*.

Proposition 2.2. *Soit* $\tau \neq \emptyset$ *et* $\neq\langle 0\rangle$ (*i.e.* $|W| \geq 2$). *Soit* ϕ *un énoncé négatif consistant sous forme normale* (ϕ) *telque* $m=1$. *Alors* $W \models \phi$.

Preuve. Il suffit de montrer que $W \models \sim\phi$ entraine $\mathcal{B} \models \sim\phi$ pour tout $\mathcal{B} \in V(\tau)$. On a vu que $W \models \sim\phi$ si et seulement si $W = (\sim\tilde{\phi})$; or, il est aisé de voir que pour $\mathcal{B} \in V(\tau)$ quelconque, $\mathcal{B} \models (\sim\tilde{\phi})$ entraine $\mathcal{B} \models \sim\phi$. On peut donc supposer $(\sim\phi)$ décomposée, et donc, ici, de la forme

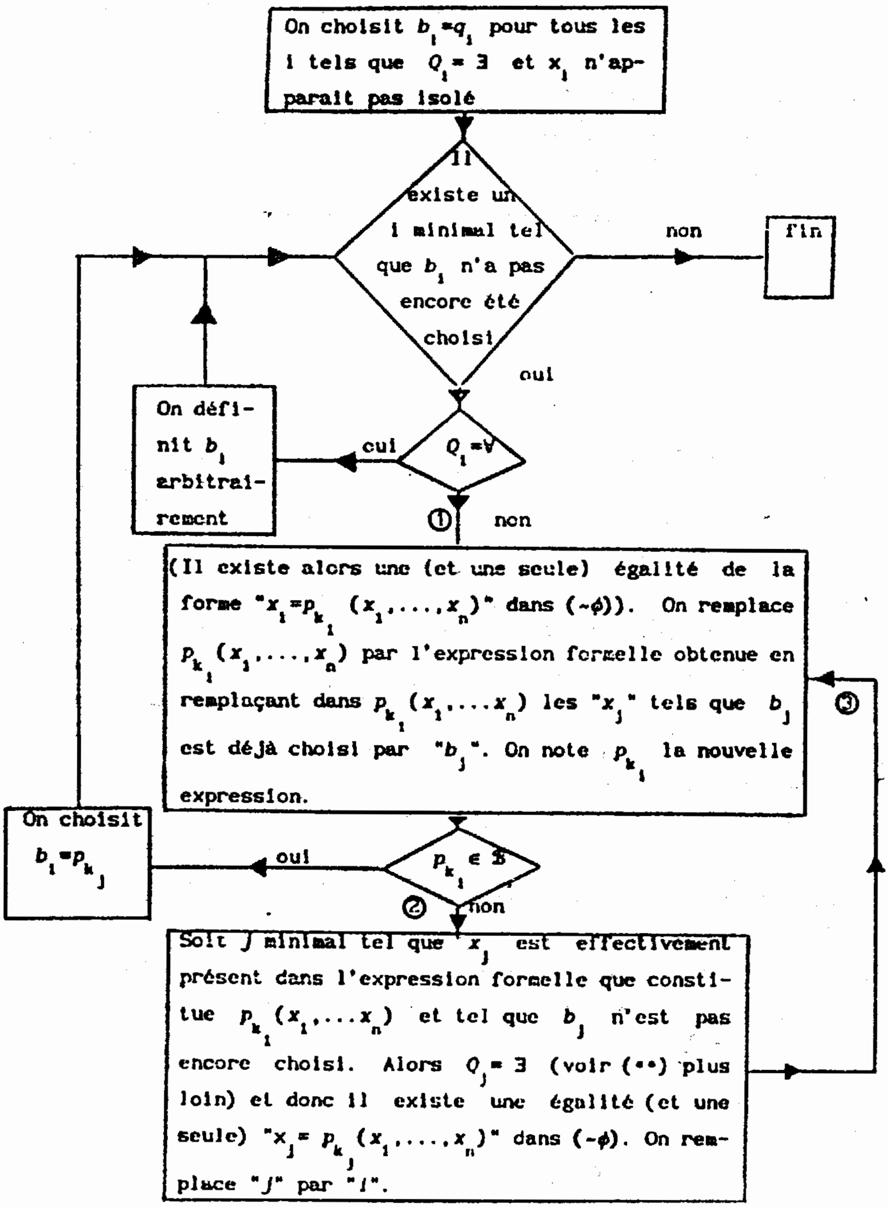
$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(x_{u_1} = p_1(x_1,\ldots,x_n) \wedge \ldots \wedge x_{u_r} = p_r(x_1,\ldots,x_n)).$$

Pour toute égalité de la forme $x_i = x_j$ (et donc $i < j$) dans $\sim\phi$, le fait que $|W| \geq 2$ et que $W \models \sim\phi$ entrai que $Q_j = \exists$. Si on remplace alors chaque occurence de "x_j" dans la matrice par "x_i" et qu'on enlève l'égalité triviale qui en résulte et le quantificateur "$\exists x_j$" de $(\sim\phi)$ alors, si on note $(\sim\phi)'$ le résultat, on a $W \models (\sim\phi)'$ et de plus $\mathcal{B} \models (\sim\phi)'$ entraine $\mathcal{B} \models (\sim\phi)$. On peut donc supposer que les $p_i(x_1,\ldots,x_n)$ ne sont jamais des variables.

Si le langage n'a pas d'opérateur non-nullaire, alors les égalités de $(\sim\phi)$ sont toutes de la forme "$x_i = c_j$", et donc $(\sim\phi)$ doit être de la forme $\exists x_1 \ldots \exists x_n(x_1 = c_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_n = c_{i_n})$, puisque $|W| \geq 2$, ce qui donne immédiatement le résultat. Pour la suite, on suppose donc qu'il existe au moins un symbole d'opérateur non-nullaire.

Soint $q_1, \ldots q_n$ des éléments de W tels que pour $i=1,\ldots,r$ on ait $q_{u_i} = p_{u_i}(q_1,\ldots,q_n)$, et soit $\mathcal{B} \in V(\tau)$. Si τ a des opérateurs nullaires (et que donc $W = W^0$) on notera également q_i l'interprétation de q_i dans $\mathcal{B}$. Sinon, q_i est un polynôme l-aire $q_i(x)$; on fixe alors un élément quelconque b de $\mathcal{B}$ (une fois pour toutes) et la même notation "q_i" désignera l'élément $q_i(b) \in \mathcal{B}$.

Pour montrer que $\mathcal{B} \models \sim\phi$, on doit trouver $b_1,\ldots,b_n \in \mathcal{B}$ tels que $b_{u_k} = p_k(b_1,\ldots b_n)$, $k=1,\ldots,r$ où on a choisi les b_j avec $Q_j = \forall$ arbitrairement après avoir choisi les b_i avec $i < j$. La seule contrainte consiste donc à trouver des b_i avec $Q_i = \exists$ *avant* de choisir les b_j avec $Q_j = \forall$ tels que $j > i$. Le choix de $b_1,\ldots,b_n$ s'effectue selon l'algorithme suivant:



On doit montrer que le programme n'a pas de boucle infinie. Montrons d'abord (**) (carré du bas).

Considérons une égalité "$x_i = p_{k_i}(x_1, \dots, x_n)$" au moment où elle arrive en ②. C'est une expression formelle du genre "$x_i = \omega_{i_t} \dots x_j \dots$" avec b_j non-encore choisi. Ou bien cette égalité provient directement de ①, ou bien elle est le résultat d'un nombre fini de passages par ③ après un passage par ①.

Dans le premier cas, i est minimal tel que b_i n'est pas encore choisi, et comme b_j n'est pas encore choisi, on a $j > i$. Comme $W \models (\neg\phi)$, on a forcément $Q_j = 3$.

Dans le second cas, peut supposer, par hypothèse d'induction, qu'il existe, dands $(\neg\phi)$, une suite finie d'expressions

$$(***)\qquad \begin{array}{l} x_{i_1} = \omega_{i_1} \dots x_{i_2} \dots, \qquad x_{i_2} = \omega_{i_2} \dots x_{i_3} \dots, \qquad \dots, \\[2ex] x_{i_{t-1}} = \omega_{i_{t-1}} \dots x_{i_t = i} \dots, \qquad x_{i_t = i} = \omega_{i_t} \dots x_j \dots \end{array}$$

où i_1 est minimal tel que b_{i_1} n'est pas encore défini, où $Q_{i_1} = Q_{i_2} = \dots = Q_{i_t = i} = 3$ et où $b_{i_2}, \dots, b_{i_{t-1}}, b_{i_t}$ ne sont pas encore choisis. Supposons que $Q_j = V$; pour $w \in W$, notons $\# w$ le nombre de symboles (en comptant les répétitions) dans w. Dans les hypothèses présentes, on peut trouver, pour tout $a \in \mathbb{N}$, un $w \in W$ tel que $\# w > a$. Or, $j > i_1$, (minimalité de i_1) et $W \models \neg\phi$; mais, une fois choisi $w_{i_1} \in W$ comme valeur pour x_{i_1}, si on prend w_j tel que $\# w_j > \# w_{i_1}$, la suite d'égalités (***) oblige

$$\# w_{i_1} > \# w_{i_2} > \dots > \# w_{i_t = i} > \# w_j ,$$

contradiction.

On a donc $Q_j = \exists$, ce qui prouve (••).
Pour s'assurer que les 2 carrés du bas ne forment pas une boucle infinie (via ③), il suffit de s'assurer que la suite (•••) ne peut contenir de répétition. Si on suppose par exemple que $i_t = i_k$ $(k < t)$, alors le choix d'éléments $w_1, \dots, w_n$, pour $x_1, \dots, x_n$, dans W, qui vérifient les égalités doit être tel que

$$\#w_{i_k} > w_{i_{k+1}} > \dots > \#w_{i_t} = \#w_{i_k}$$

contradiction.

Après un nombre fini de manipulations, les b_i sont donc tous déterminés, et on a les égalités formelles $b_{u_i} = p_i(b_1, \dots, b_n)$ pour chaque $i=1, \dots, r$, et donc à fortiori ce sont égalités dans $\mathcal{B}$.

La contrainte formulée avant l'algorithme a clairement été respectée, et on a donc $\mathcal{B} \models \sim\phi$. □

Corollaire 2.3. *Soit ϕ un énoncé négatif sous la forme normale $Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\psi_1 \wedge \dots \wedge \sim\psi_m)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

a) ϕ est consistante

b) $W \models Q_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ pour chaque ψ_i décomposable.

c) $Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ est consistante pour chaque ψ_i décomposable.

Preuve: b) ⇔ c) C'est la proposition précédente.

b) ⇒ a) Si ψ_i n'est pas décomposable, alors $W \models \forall x \dots \forall x_n(\sim\psi_i)$, par définition; si ψ_i est décomposable, on a vu que

$W \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ si et seulement si

$W \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$.

On a donc $W \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ pour $i=1, \dots m$; il est aisé de vérifier que dans ce cas $\underbrace{W \times \dots \times W}_{m \text{ fois}} \models \phi$.

a) ⇒ b) Soit $\mathcal{B} \models \phi$. Alors $\mathcal{B} \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ pour chaque i, d'où $W \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$ pour chaque ψ_i décomposable, par la proposition, et donc $W \models Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\sim\tilde{\psi}_i)$. □

Pour la suite, il nous sera utile de "décomposer" davantage certains énoncés:

Lemma 2.4. *Soit ϕ un énoncé positif sous forme normale, décomposé, tel que $(\neg\phi)$ est consistant et tel que $Q_n = Q_{n-1} = \ldots Q_{n-k} = \exists$. Alors si, pour chaque égalité de la forme "$x_{n-t} = p$" dans ψ_1 ($t \leq k$) on remplace toute occurence de "x_{n-t}" dans ψ_1 par "p", qu'on enlève l'égalité triviale résultante et qu'on note ψ_1' le résultat final, ψ_1' est non-vide et on a $W \models \phi$ si et seulement si $W \models Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\neg\psi_1' \vee \ldots \vee \psi_m')$. De plus, le nouvel énoncé est décomposé et sa négation est consistante.*

Preuve. On suppose l'existence dans ψ_1 de l'égalité "$x_n = p$" (notons que la démonstration inclura le cas où p est une variable, même si dans cette éventualité x_n se présentera en fait à droite de l'égalité).

Remarquons qu'il doit exister une autre égalité dans ψ_1, car sinon on a clairement $W \models \forall x_1\ldots\forall x_{n-1}\exists x_n(\psi_1)$ et donc, à fortiori, $W \models Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\psi_1)$ contredisant l'hypothése que $(\neg\phi)$ est consistant, par le corollaire 2.3 ($m > 1$ par la proposition 2.2).

Notons aussi que x_n ne peut réapparaitre sous forme isolée dans ψ_1 car ψ_1 est décomposé et n est le maximum des indices des variables. Si on enlève "$x_n = p$" et qu'on remplace chaque occurence de "x_n" dans ψ_1, par "p", le résultat ψ_1' est donc non-vide et décomposé. On doit montrer que

i) si $W \models \phi$, alors $W \models Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\ \psi_1' \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m)$: ceci est clair;

ii) si $W \models Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\psi_1' \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m)$, alors $W \models \phi$: l'hypothèse implique que $W \models Q_1x_1\ldots Q_{n-1}x_{n-1}(\psi_1' \vee \exists x_n(\psi_2) \vee \ldots \vee \exists x_n\psi_m)$ puisque $x_n \notin \psi_1'$; on en déduit que

$$W \models Q_1x_1\ldots Q_{n-1}x_{n-1}((\psi_1' \wedge \exists x_n(x_n = p)) \vee \exists x_n(\psi_2) \vee \ldots \vee \exists x_n(\psi_m))$$

(car $x_n \notin p$, par la forme (•) de ψ_1) d'où

$W \models Q_1x_1\ldots Q_{n-1}x_{n-1}(\exists x_n(\psi_1) \vee \exists x_n(\psi_2) \vee \ldots \vee \exists x_n(\psi_m))$, d'où $W \models \phi$.
Pour pouvoir itérer le processus, il suffit de voir que

$$\neg\ (Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\psi_1' \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m))$$

est consistant; mais puisque ψ_1' est décomposé, il suffit, par le corollaire 2.3 de vérifier que $W \models \neg(Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\psi_1'))$. Or, ceci découle du fait que $W \models \neg(Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\psi_1))$, et par la même démonstration qu'en ii). □

Definition 2.5. *Un énoncé positif ϕ sous forme normale est dit vérifier l'hypothèse de minimalité si $m > 1$ et que $W \models \neg (Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{i-1} \vee \psi_{i+1} \vee \ldots \vee \psi_m))$ pour $i=1,\ldots,m$. Notons que dans ce cas $(\neg\phi)$ est consistant.*

Lemme 2.6. *Soit ϕ un énoncé positif sous forme normale décomposé, vérifiant l'hypothèse de minimalité et tel que $W \models \phi$; alors*

a) si τ a au moins un opérateur non-nullaire, alors $Q_n = \exists$.

b) si $Q_{u+1} = Q_{u+2} = \ldots = Q_s = \forall$ et $Q_{s+1} = Q_{s+2} = \ldots = Q_n = \exists$, alors pour chacune des variables x_{u+k}, $1 \le k \le (s-u)$, il existe dans ϕ, pour chaque opérateur non-nullaire ω_i de τ, une égalité de la forme "$x_{u+k} = \omega_i r_1 \ldots r_{a_i}$" où le terme de droite ne contient rien d'autre que des variables x_j avec $j > s$ et des occurences du symbole "ω_i".

Preuve. b) Il suffit de prouver l'énoncé pour x_s. On procède par contradiction. Soient $w_1,\ldots,w_{s-1} \in W$ tels que

$$W \models \forall x_s \exists x_{s+1} \ldots \exists x_n \left(\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i \right) [w_1,\ldots,w_{s-1}] ,$$

et soit ω_i un opérateur non-nullaire tel que pour toute égalité de la forme "$x_s = \omega_i p_1 \ldots p_{a_i}$", il y ait une variable x_j dans le terme de droite avec $j < s$ (si $j=s$, on a tout de suite une contradiction) ou une occurence d'un symbole d'opération différent de ω_i.

Par le lemme 2.4, on peut supposer que $x_{s+1},\ldots x_n$ n'apparaissent pas isolés. Donc x_s n'apparait que dans des égalités des formes:

. $x_u = x_s$ $(u < s)$

. $x_s = \omega' r_1 \ldots r_a$

. $x_s = \omega_i \ldots x_v \ldots$ avec $v < s$

. $x_u = \omega_j \ldots x_s \ldots$ avec $u < s$

. $x_s = \omega_i \ldots \omega' \ldots$

où ω' est un symbole d'opération différent de ω_i, et possiblement nullaire. Soient $\psi_1,\ldots,\psi_k$ les composantes contenant x_s.

Pour $t \in \mathbb{N}$, notons $\omega_i^{(t)} c \ldots c$ (où c est un opérateur nullaire quelconque fixé; si il n'y en a pas, on est dans W^1 et on remplace c par "x", le générateur de W^1) l'élément de W^1 défini de la façon suivante:

$\omega_1^{(0)}c\ldots c = c$, et $\omega_1^{(t)}c\ldots c = \omega_1\omega_1^{(t-1)}c\ldots c\ldots\omega_1^{(t-1)}c\ldots c$ si $t \geq 1$.

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'égalités, il existe $t \in \mathbb{N}$ assez grand pour que pour $w_m = \omega_1^{(t)}c\ldots c$ aucune des égalités où x_m apparait ne soit vérifiée pour $x_1 = w_1,\ldots,x_m = w_m$, et ce quelles que soient les valeurs $w_{m+1},\ldots,w_n$ donnés à $x_{m+1},\ldots,x_n$. Or, on a, par hypothèse, que

$$W \models \exists x_{m+1}\ldots\exists x_n(\psi_1\vee\ldots\vee\psi_k\vee\psi_{k+1}\vee\ldots\vee\psi_m)\ [w_1,\ldots,w_m]$$

puisque $Q_u = \forall$. Donc, par le choix de w_m, on en tire que

$$W \models \exists x_{m+1}\ldots\exists x_n(\psi_{k+1}\vee\ldots\vee\psi_m)\ [w_1,\ldots,w_m]\ .$$

Comme $x_u \notin (\psi_{k+1}\vee\ldots\vee\psi_m)$, on a trivialement

$$W \models \forall x_m\ \exists x_{m+1}\ldots\exists x_n(\psi_{k+1}\vee\ldots\vee\psi_m)\ [w_1,\ldots,w_{m-1}]\ .$$

On a donc montré que pour tout $w_1,\ldots,w_{m-1}$ dans W tels que

$$W \models \forall x_m\ \exists x_{m+1}\ldots\exists x_n(\psi_1\vee\ldots\vee\psi_m)\ [w_1,\ldots,w_{m-1}]\ ,$$

on a en fait

$$W \models \forall x_m\ \exists x_{m+1}\ldots\exists x_n(\psi_{k+1}\vee\ldots\vee\psi_m)\ [w_1,\ldots,w_{m-1}]\ ,$$

ce qui contredit la minimalité de m.

a) Si ϕ est existenctiel, c'est trivial. Sinon, il existe un quantificateur universel d'indice minimal s, et l'existence d'un symbole d'opérateur non-nullaire rend $s=n$ impossible, par b). □

Theorem 2.7. *Soit $\sigma(\tau)$ fini et $\{\omega_1,\ldots,\omega_s,c_1,\ldots,c_k\}$ les opérateurs de τ. Soit ϕ un énoncé négatif consistant $Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\neg\psi_1\wedge\ldots\wedge\neg\psi_m)$. Alors $W \models \phi$ dans chacun des cas suivants:*

1) *Il existe un ω_1 pour lequel il n'existe, dans $(\neg\tilde{\phi})$, aucune égalité du type "$x_j = \omega_1p_1\ldots p_{a_1}$" où $Q_j = \exists$ et où le terme de droite ne contient rien d'autre que des variables x_u avec $Q_u = \forall$ et $u > j$ et des occurences de "ω_1".*

2) *$s > 0$ et ϕ est un π_2^0-énoncé (i.e. $Q_1\ldots Q_lQ_{l+1}\ldots Q_n = \forall\ldots\forall\ \exists\ldots\exists$)*

3) *$s > 0$, $k=0$ et $m \leq s$*

4) *$(s+k) > 1$ et $m < s+k$.*

b) *Soit $\sigma(\tau)$ infini. Alors $W \models \phi$ pour tout énoncé négatif consistant (et* *donc $M(\Sigma)$ a toutes les algèbres libres pour toute théorie négative consistante Σ).*

Demonstration

a) 1) Si $(\sim\tilde{\phi})$ est existentiel, alors le fait que $W^0 \models \sim(\sim\tilde{\phi})$ et l'existence d'un monomorphisme $W \overset{\chi_0}{\rightarrowtail} W^0$ impliquent que $W \models \sim(\sim\tilde{\phi})$ et que donc $W \models \phi$. Sinon, le résultat découle immédiatement du lemme 2.6 b) puisqu'on peut clairement supposer que $(\sim\tilde{\phi})$ vérifie l'hypothèse de minimalité. Pour les 3 autres cas, supposons $W \models \sim\phi$. Comme la décomposition de $(\sim\phi)$ ne peut que réduire m, et éliminer certains quantificateurs, on peut supposer $(\sim\tilde{\phi})$ décomposé. De plus, comme il existe un sous-ensemble $\{i_1, \dots i_l\}$ de $\{1, \dots, m\}$ tel que $\sim(Q_1 x_1 \dots Q_n x_n(\sim\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \sim\psi_{i_l}))$ vérifie l'hypothèse de minimalité ($l > 1$ par la proposition 2.2), on peut supposer que $(\sim\phi)$ vérifie l'hypothèse de minimalité.

2) Le résultat suit immédiatement du lemme 2.6 a) (sauf le cas où ϕ est universel, qui est réglé comme en 1)).

3) Ici, $W = W^1$.
Comme en 1), on peut éliminer le cas où $(\sim\phi)$ existentiel et donc, par le lemme 2.6 a), on peut supposer

$$Q'_1 x_1 \dots Q'_n x_n = Q'_1 x_1 \dots \forall x_r \; \exists x_{r+1} \dots \exists x_n \quad \text{avec} \quad n > r$$

(où $Q'_i = \forall$ si $Q_i = \exists$ et vice versa). Par la partie b) du même lemme, $(\sim\phi)$ doit avoir au moins une égalité de chacune des formes "$x_r = \omega_1 \dots$",...., "$x_r = \omega_m \dots$". Par l'hypothèse de décomposition, il ne peut y avoir plus d'une de ces égalités dans une même composante ψ_i. On a donc tout de suite une contradiction si $m < s$. Si $m = s$, on voit aisément que

$W^1 \models \forall x_1 \dots \forall x_{r-2} \forall x_{r-1} \forall x_{r+1} \dots \forall x_n (\sim\psi_1 \wedge \dots \wedge \sim\psi_m)$ $[x]$ (où x est le générateur libre de W) et donc

$$W^1 \models \forall x_1 \dots \forall x_{r-1} \exists x_r \forall x_{r+1} \dots \forall x_n (\sim\psi_1 \wedge \dots \wedge \sim\psi_m) \; .$$

A fortiori $W^1 \models \phi$, contradiction.

4) On peut supposer que $k \geq 1$ (sinon, on est dans le cas 3)), et donc que $W = W^{\circ}$. Soit $Q'_1 x_1 \dots Q'_n x_n = Q'_1 x_1 \dots \forall x_r \exists x_{r+1} \dots \exists x_n$ (où $r = n$ est possible si $s = 0$). Par le lemme 2.4, on peut supposer que $x_{r+1}, \dots, x_n$ n'apparaissent pas

isolés. Notons $\psi_1, \ldots \psi_u$ les composantes contenant une égalité de la forme "$x_r = \omega_1 \ldots$" pour $l \in \{1, \ldots, s\}$.
Pour les même raisons qu'en 3), on a $u \geq s$ (où $u=0$ est possible).
Soient $\psi_1, \ldots, \psi_u, \psi_{u+1}, \ldots, \psi_{u+p}$ les composantes où x_r apparait. Dans $\psi_{u+1}, \ldots, \psi_{u+p}$, x_r ne peut apparaitre que dans des égalités des formes suivantes:

. $x_j = x_r \quad (j < r)$

. $x_r = c_1$

. $x_j = \omega_1 \ldots x_r \ldots$ avec $j < r$.

On considère $w_1, \ldots, w_{r-1}$ dans W^* tels que

$W^* \models \forall x_r \; \exists x_{r+1} \ldots \exists x_n (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) [w_1, \ldots, w_{r-1}]$.

Par la présence d'égalités "$x_r = \omega_1 \ldots$" dans $\psi_1, \ldots, \psi_u$, on a alors

(+) $W^* \models \exists x_{r+1} \ldots \exists x_n (\psi_{u+1} \vee \ldots \vee \psi_m) [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_j]$ pour chacun des $j=1, \ldots, k$.

D'après les types d'égalités possibles contenant x_r, si ψ_{u+i} $(i>0)$ contient x_r, il y a au plus une valeur w_r pour x_r telle que

$$W^* \models \exists x_{r+1} \ldots \exists x_n (\psi_{n+i}) [w_1, \ldots, w_{r-1}, w_r] .$$

Comme $p < k$, il existe (au moins) un c_{j_0} tel que

(++) $$W^* \models \forall x_{r+1} \ldots \forall x_n (\sim\psi_{u+1} \wedge \ldots \wedge \sim\psi_{u+p}) \; [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_{j_0}]$$

. Si $u+p = m$, on a une contradiction avec (+).
. Si $u+p < m$, on a par hypothèse qu'en particulier

(+++) $$W^* \models \exists x_{r+1} \ldots \exists x_n (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{u+p} \vee \ldots \vee \psi_m) [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_{j_0}].$$

Or,

$$W^* \models \forall x_{r+1} \ldots \forall x_n (\sim\psi_1 \wedge \ldots \wedge \sim\psi_u) [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_{j_0}]$$

et avec (++), on a alors

$$W^\circ \models \forall x_{r+1} \ldots \forall x_n (\sim\psi_1 \wedge \ldots \wedge \sim\psi_{u+p}) [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_{j_0}] .$$

Donc

$$W^* \models \exists x_{r+1} \ldots \exists x_n (\psi_{u+p+1} \vee \ldots \vee \psi_m) [w_1, \ldots, w_{r-1}, c_{j_0}]$$

par (+++).

Mais $x_r \notin \psi_{u+p+1},\ldots,x_r \notin \psi_m$, et donc

$$W^\circ \models \forall x_r\ \exists x_{r+1}\ldots\exists x_n(\psi_{u+p+1}\vee\ldots\vee\psi_m)[w_1,\ldots,w_{r-1}]$$

trivialement.

Ceci étant vrai pour tout $(r-1)$-uple d'éléments $w_1,\ldots,w_{r-1}$ dans W° tels que $W^\circ \models \forall x_r \exists x_{r+1}\ldots\exists x_n(\psi_1\vee\ldots\vee\psi_m)[w_1,\ldots,w_{r-1}]$ on a donc

$W^\circ \models Q'_1x_1\ldots Q'_nx_n(\psi_{u+p+1}\vee\ldots\vee\psi_m)$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité, puisque $u+p+1>1$.

b) On peut supposer $(\sim\psi)$ décomposé et vérifiant l'hypothèse de minimalité. S'il existe une infinité d'opérateurs non-nullaires, le résultat découle immédiatement du lemme 2.6. Sinon, il existe une infinité d'opérateurs nullaires et la démonstration est la même qu'en a)4). □

Remarques.

1) L'exemple suivant montre que les bornes pour m en a)3) et 4) sont les meilleures possibles et que dans a)1), on ne peut remplacer "ω_1" par "c_1": dans les hypothèses de a) sur τ, soit ϕ l'énoncé

$$\text{i)}\quad \exists x_1\ldots\exists x_k\forall x_{k+1}\ \exists x_{k+2}\ldots\ \exists x_{k+M+1}\left[\bigvee_{i=1}^{k}(x_i=x_{k+1})\bigvee_{j=1}^{m}(x_{k+1}=\omega_j x_{k+2}\ldots x_{k+a_j+1})\right]$$

(où a_j est l'arité de ω_j et $M=\max_{j=1,\ldots,m}\{a_j\}$) dans le cas où $k\neq 0$ et

$$\text{ii)}\quad \exists x_0\forall x_1\exists x_2\ldots\exists x_{M+1}\left[(x_0=x_1)\bigvee_{j=1}^{m}(x_1=\omega_j x_2\ldots x_{a_j+1})\right]$$ dans le cas où $k=0$.

Il est alors aisé de vérifier que $(\sim\phi)$ est consistant et que $W \models \phi$.

2) Pour faire pendant à a)2), notons que si ϕ et $\sigma(\tau)$ sont comme dans les hypothèses de a) avec $Q_1x_1\ldots Q_nx_n = \exists x_1\ldots\exists x_t\forall x_{t+1}\ldots\forall x_n$, on peut montrer que $W^r \models \phi$ pour tout $r \geq t$ et que t est minimal avec cette propriété: si on pose en effet

$$\phi = \exists x_1\ldots\exists x_t\forall x_{t+1}\ldots\forall x_{M+t}\left[\bigwedge_{\substack{i,j=1,\ldots,t\\ i\neq j}}(x_i\neq x_j)\bigwedge_{\substack{i=j,\ldots,t\\ j=1,\ldots,s}}(x_i\neq\omega_j x_{t+1}\ldots x_{t+a_j})\right.$$
$$\left.\bigwedge_{\substack{i=1,\ldots,t\\ j=1,\ldots,k}}(x_i\neq c_j)\right]$$

où a_j = arité de ω_j et $M=\max_{j=1,\ldots,m}\{a_j\}$. alors $W^r \models \phi$ si et *seulement si* $r\geq t$.

3) La partie b) du théorème dépend évidemment du fait que le langage n'admet pas d'énoncé de longueur infinie. Si on admet les disjonctions à $\sigma(\tau)$ composantes, on construit en effet aisément un contre-exemple pour b) sur le modèle de ceux de la remarque 1).

Notons également que la classe des énoncés négatifs est résoluble (i.e. il existe une procédure effective qui détermine si un énoncé négatif donné est consistant ou non). En fait, D. Kozen a montré que le problème de déterminer si un énoncé positif est valide ou non est NP-complet (voir [5]).

4) Les résultats de cette section s'étendent aux énoncés qui ont une "partie négative consistante":

On peut décomposer un énoncé quelconque de la façon suivante. Soit sous forme normale disjonctive $Q_1x_1\dots Q_nx_n(\psi_1 \vee\dots\vee \psi_m)$. On enlève d'abord les composantes ψ_j contenant des formules atomiques dont la conjoction est non-décomposable (au sens de 2.1). S'il ne reste plus rien dans la matrice, alors $W^\alpha \models \sim\phi$ pour tout cardinal α. Sinon, on enlève des ψ_j qui restent les négations de formules atomiques non-décomposables. Si l'un des ψ_j est vidé de cette façon, alors $W^\alpha \models \phi$ pour tout α. Sinon, on remplace ensuite chaque conjonction de formules atomiques dans chaque ψ_j restant par sa décomposition, et chaque négation de formule atomique restante par la négation de sa décomposition. Si on note $\tilde{\phi}$ le résultat final, il est aisé de voir que pour α quelconque, $W^\alpha \models \phi$ si et seulement si $W^\alpha \models \tilde{\phi}$.

Supposons maintenanat que k composantes $(k\neq 0)$ $\psi_1,\dots,\psi_k$ de ϕ soient négatives et telles que l'énoncé $Q_1x_1\dots Q_nx_n(\psi_1 \vee\dots\vee \psi_k)$ (une *partie négative de* ϕ) soit consistante; alors $W^{\chi_0} \models Q_1x_1\dots Q_nx_n(\psi_1 \vee\dots\vee \psi_k)$ et donc $W^{\chi_0} \models \phi$. Ainsi, si Σ est un ensemble d'énoncés de ce type, $M(\Sigma)$ aura l'algèbre libre sur χ_0 générateurs, les deux notions d'algèbre libre coincideront pour tout cardinal et le même raisonnement que celui utilisé à la fin de la section §1 montre que $W^\alpha/\theta_\Sigma = W^\alpha$ our tout α, et que donc $M(\Sigma)$ aura l'algèbre libre sur α si et seulement si $W^\alpha \models \Sigma$, si et seulement si $W^\alpha \models \tilde{\Sigma}\left[=\{\tilde{\phi} \mid \phi\in\Sigma\}\right]$. Notons finalement que si une partie négative (ou sa décomposition) de chaque énoncé de Σ vérifie une des conditions de la partie a) de 2.7, ou si τ est d'ordre infini, alors $M(\Sigma)$ a toutes les algèbres libres.

3. Quels sont les enonces negatifs que verifie W ? (vue semantique)

Le cas infini étant réglé, on supposera pour la suite que les symboles d'opérations de τ sont $\omega_1,\dots,\omega_m,c_1,\dots,c_k$.

Il est facile de voir que pour tout énoncé positif ϕ, $W^n \models \phi$ si et seulement si $A \models \phi$ pour tout $A \in V(\tau)$ engendré par n éléments (à cause de l'homomorphisme surjectif de W^n dans A qui envoie les générateurs libres de W^n dans les générateurs de A). On considère l'énoncé $\bar{\Phi}^n_\tau$ de $L_{\omega^+\omega}(\tau)$ (le langage construit comme τ mais où on permet aux disjonctions et aux conjonctions de porter sur tout ensemble de formules de cardinalité dénombrable-voir [2]) suivant

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall x \left[\bigvee_{p \in W^n} (x = p(x_1, \ldots, x_n)) \right].$$

Clairement $A \models \bar{\psi}^n_\tau$ signifie que A est engendrée par n éléments. Ainsi, pour tout énoncé ϕ positif (de $L_{\infty\omega}(\tau)$, et donc en particulier de tout énoncé de τ), on a $W^n \models \phi$ si et seulement si $\bar{\psi}^n_\tau \models \phi$.

Malheureusement, cette notion de "engendré par n éléments" n'est pas axiomatisable dans τ lorsque τ a des opérateurs non-nullaires. En effet, puisque $|W^n| = \chi_0$ le théorème "vers le haut" de Löwenheim-Skolem implique l'existence d'une extension élémentaire $\mathcal{B}$ de W^n de cardinalité supérieure à χ_0. Comme W^n est engendré par n éléments, il en serait même pour $\mathcal{B}$, d'où l'existence d'une surjection de W^n dans $\mathcal{B}$ (qui envoie les générateurs libres standards de W^n dans les générateurs de $\mathcal{B}$), ce qui est absurde. Toutefois, même s'il n'existe pas d'énoncé de τ qui exprime l'idée "engendré par n éléments", l'énoncé (plus faible) suivant de τ remplira le même rôle dans notre contexte:

$$\psi^n_\tau : \exists z_1 \ldots \exists z_n \forall x \exists y_1 \ldots \exists y_M \left[\bigvee_{i=1}^{n} (x = z_i) \bigvee_{i=1}^{k} (x = c_i) \bigvee_{i=1}^{s} (x = \omega_i y_1 \ldots y_{a_i}) \right]$$

où, comme à la section 2, a_i=arité de ω_i et $M = \max_{i=1,\ldots,s} \{a_i\}$.

Cet énoncé dit simplement que tous les éléments (dans une structure le vérifiant), sauf au plus n d'entre eux, sont dans l'image de l'une des fonctions qui interprètent les symboles d'opération de τ. On notera ψ_τ l'énoncé ψ^0_τ ou ψ^1_τ selon que $W = W^0$ ou $W = W^1$ respectivement (i.e. selon que $k > 0$ ou $k=0$).

Proposition 3.1. *Pour tout énoncé positif ϕ de τ et tout $n \in \mathbb{N}$, $W^n \models \phi$ si et seulement si $\psi^n_\tau \models \phi$.*

Preuve. 1) Cas où $s > 0$, $k > 0$ et $n=0$.

L'idée de la démonstration est de construire, pour chaque algèbre $\mathcal{A}$ vérifiant ψ_τ, une extension élémentaire $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ de W, puis une sous-algèbre $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ telle que tout énoncé positif vrai dans $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ est vrai dans $\mathcal{B}_1$, et enfin un épimorhisme de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{A}$. Ceci montrera la direction ($\Rightarrow$) de la proposition. La direction inverse découle du fait que $W^n \models \psi^n_\tau$.

On considère un ensemble $\{c^\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de nouveaux symboles de constante, et on définit récursivement un ensemble d'énoncés atomiques dans $\tau_\gamma = \tau \cup \{c^\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante.

Appelons *arbre de* τ un ensemble infine dénombrable d'énoncés de τ_γ $\{I_0, I_1, \dots, I_n, \dots\}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n est de la forme

$$c^\gamma_n = \omega_{\gamma(n)} d^{\gamma(n)}_1 \dots d^{\gamma(n)}_{a_{\gamma(n)}}$$

et vérifie les conditions suivantes

(i) au moins un des $d^{\gamma(n)}_i$ est dans $\{c^\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

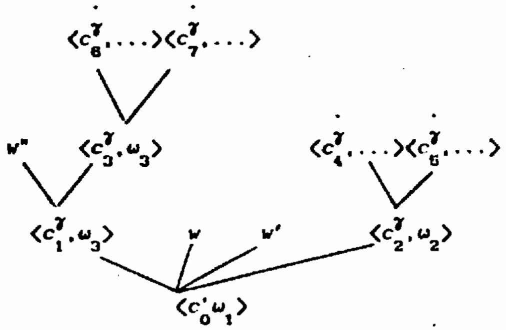
(ii) les $d^{\gamma(n)}_i$ qui ne sont pas dans $\{c^\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de W (i.e. des polinômes 0-aires de τ).

(iii) les éléments de $\{c^\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ présents dans la suite $d^{\gamma(n)}_1 \dots d^{\gamma(n)}_{a_{\gamma(n)}}$ apparaissent selon l'ordre croissant de leur indice inférieur, en commençant par l'entier ($\mathrm{Max}\ \{m | c^\gamma_m$ apparait dans I_k pour un $k < n\} + 1$) si $n > 0$ et par c^γ_1 si $n=0$.

Le terme "arbre" est justifié par la représentation qu'on peut en faire. Par exemple, à un arbre de τ commençant par les énoncés

$$c^\gamma_0 = \omega_1 c^\gamma_1 w w' c^\gamma_2\ ,\quad c^\gamma_1 = \omega_3 w'' c^\gamma_3\ ,\quad c^\gamma_2 = \omega_2 c^\gamma_4 c^\gamma_5\ ,\quad c^\gamma_3 = \omega_3 c^\gamma_6 c^\gamma_7\ , \dots$$

(où w, w', w'' sont dans W) on peut faire correspondre le schéma suivant



Remarquons que la condition (i) force le schéma à s'étendre indéfiniment vers le haut.

Soit $\mathcal{A}$ une τ-algèbre vérifiant ψ_τ. Tout élément a de $G\mathcal{A}\setminus G\langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$ (où $\langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$ est la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par $\{c_1,\dots,c_k\}$) donne lieu à un ensemble d'arbres de τ : en effet, $\mathcal{A}\models\psi_\tau$ implique qu'il existe ω_1 tel que $a = \omega_1 d_1\dots d_{a_1}$ pour des $d_j\in G\mathcal{A}$, avec un des d_j dans $G\mathcal{A}\setminus G\ \langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$. On peut en dire autant de chaque d_j dans $G\mathcal{A}\setminus G\ \langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$, et ainsi engendrer un schéma du type de celui plus haut. Notons qu'un même élément peut engendrer plusieurs de ces structures.

On considère l'ensemble Γ'de toutes ces structures possibles, pour tous les éléments de $G\mathcal{A}\setminus G\ \langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$. Pour chaque $\gamma'\in\Gamma'$, on renomme les sommets du schéma qui ne sont pas dans $\langle\{c_1,\dots,c_k\}\rangle$ à l'aide des symboles $\{c^{\gamma}_m\,|\,m\in\mathbb{N},\ \gamma'\in\Gamma'\}$, en procédant de bas en haut et de gauche à droite (comme dans l'exemple plus haut). Chaque autre sommet est réétiqueté du nom de l'un quelconque des éléments de W dont il est l'interprétation. On obtient ainsi un arbre de τ qu'on nommera γ. L'ensemble de tous les arbres, vus dans $\hat{\tau} = \bigcup_{\gamma'\in\Gamma'} \tau_\gamma$, sera noté Γ.

Notons $Th_\tau(W)$ l'ensemble des énoncés de τ vérifiés par W.

Lemma 3.2. *$Th_\tau(W)\cup\Gamma\cup\{c_n^{\gamma_i}\neq c_m^{\gamma_j}\,|\ n,m\in\gamma_i,\gamma_j\in\Gamma$ et $(n,i)\neq(m,j)\}\ \cup$ $\{c_n^{\gamma}\neq w\,|\ n\in\mathbb{N},\ \gamma\in\Gamma$ et $w\in W\}$, vue comme théorie dans $\hat{\tau}$, est consistante.*

Preuve. Par le théoreme de compacité, il suffit de trouver un modèle pour la théorie suivante, et ce quels que soient p, q, r et N dan $\mathbb{N}$:

$$Th_\tau(W)\ \cup\ \Gamma(p,q)\ \cup\ \left\{\left[c_n^{\gamma_i}\neq c_m^{\gamma_j}\right]\wedge\left[c_n^{\gamma_i}\neq w\right]\,\middle|\, c_n^{\gamma_i}\ \text{et}\ c_m^{\gamma_j}\ \text{apparaissent dans}\ \Gamma(p,q)\ \text{et}\ \# w\le N\right\}$$

où $\# w$, la *langueur* de w, désigne le nombre d'éléments dans l'expression formulle $s_1\dots s_{\# w}$ de w, et $\Gamma(p,q)$ est le sousensemble suivante de Γ :

$$\begin{array}{ccc}
\left\{c_0^{\gamma_1}=\omega_{\gamma_1(0)}\, d_1^{\gamma_1(0)}\cdots d_{a_{\gamma_1(0)}}^{\gamma_1(0)}\right\} & \cdots & \left\{c_q^{\gamma_1}=\omega_{\gamma_1(q)}\, d_1^{\gamma_1(q)}\cdots d_{a_{\gamma_1(q)}}^{\gamma_1(q)}\right\}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\left\{c_0^{\gamma_p}=\omega_{\gamma_p(0)}\, d_1^{\gamma_p(0)}\cdots d_{a_{\gamma_p(0)}}^{\gamma_p(0)}\right\} & \cdots & \left\{c_q^{\gamma_p}=\omega_{\gamma_p(q)}\, d_1^{\gamma_p(q)}\cdots d_{a_{\gamma_p(q)}}^{\gamma_p(q)}\right\}
\end{array}$$

Or, on peut trouver une $\hat{\tau}$-expansion de W qui vérifie ces énoncés: en effet, chaque ligne de $\Gamma(p,q)$ se représente par la partie inférieure (finie) de la représentation d'un arbre de τ qu'on aurait coupée en certains de ses sommets, et il suffit d'interpréter les constantes c^{γ}_{j} sur les sommets où a eu lieu la coupe par des éléments de longueur supérieure à N (ce qui est clairement possible puisqu'ils sont en nombre fini) pour que toutes les autres constantes situées plus bas dans ces arbres reçoivent une interprétation automatique dans W qui vérifie les conditions. □

Notons $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ la τ-réduction ("τ-reduct") d'un modèle de la théorie de l'énoncé du lemme 3.2. Il est aisé de voir que $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ doit être une extension élémentaire de W (en fait, W est un *modèle atomique* au sens de [2]). On peut écrire $C\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ comme réunion disjointe

$$C\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = C\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

où $\mathcal{B}_1 = \langle c^{\gamma}_{n} \mid \gamma \in \Gamma \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}\rangle$. La question reste ouverte si $\mathcal{B}_1$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$, mains ce qui importe ici est que pour tout énoncé positif ϕ, $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \models \phi$ implique $\mathcal{B}_1 \models \phi$.

Pour montrer cela, soulignons d'abord deux faits simples qui nous seront utiles: aucun élément de $\mathcal{B}_2$ ne peut s'écrire comme une suite formelle de symboles d'opérateurs (de τ) et d'éléments da $C\mathcal{B}_1$ exclusivement, et si $b_1 \in C\mathcal{B}_1$, alors aucune suite formelle de symboles d'opérateur et d'éléments de $C\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ représentant b_1 ne peut contenir d'éléments de $\mathcal{B}_2$.

Soit ϕ un énoncé positif tel que $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \models \phi$. On peut écrire ϕ sous la forme $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots \forall x_n \exists y_n \psi$, ψ ouverte; on peut aussi supposer ϕ décomposée, puisque $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \equiv W$ et que pour tout $C \in V(\tau)$ et tout énoncé positif σ, $C \models \bar{\sigma} \Rightarrow C \models \sigma$. Dans une formulation libre, il suffit de montrer que

$$\text{si} \quad \left[\begin{array}{l} \forall \bar{x}_1 \in C\mathcal{B}_1,\ \exists \bar{y}_1 \in C\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \ \text{tel que}\ \forall \bar{x}_2 \in C\mathcal{B}_1\ \exists \bar{y}_2 \in C\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \ldots \\ \text{tel que}\ \forall \bar{x}_n \in C\mathcal{B}_1,\ \exists \bar{y}_n \in C\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\ \text{tel que}\ \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \models \psi[\bar{x}_1, \ldots, \bar{y}_n] \end{array}\right],$$

$$\text{alors} \left[\begin{array}{l} \forall \bar{x}_1 \in C\mathcal{B}_1,\ \exists \bar{y}'_1 \in C\mathcal{B}_1 \ \text{tel que}\ \forall \bar{x}_2 \in C\mathcal{B}_1\ \exists \bar{y}'_2 \in C\mathcal{B}_1 \ldots \\ \text{tel que}\ \forall \bar{x}_n \in C\mathcal{B}_1,\ \exists \bar{y}'_n \in C\mathcal{B}_1\ \text{tel que}\ \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \models \psi[\bar{x}_1, \ldots, \bar{y}_n] \end{array}\right].$$

Or, toutes les égalités dans ψ étant de forme $x_i = p_i$ ou $y_i = q_i$ (voir (•)), les deux faits soulevés un peu plus haut permettent aisément de voir que si on peut choisir les $\bar{y}_i$ dans $C\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$, alors on peut les choisir dans $C\mathcal{B}_1$.

On établit alors $h: \mathcal{B}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ comme l'unique homomorphisme qui étend la fonction qui envoie chaque c^{γ}_{n} sur l'élément de $C\mathcal{A}$ qui a servi à le définir. Autrement dit, la représentation dans $\mathcal{B}_1$ d'un arbre γ est envoyée sur la structure γ' qui a induit γ (remarquons que tout $w \in W$ présent dans la représentation de γ se trouve là précisément parce que son interprétation dans $\mathcal{A}$ se trouve au même endroit dans γ'). Les c_n^{γ} étant tous distincts, la fonction est bien définie. L'homomorhisme h est clairement surjectif. Ceci montre que $\mathcal{A} \models \phi$ et complète la démonstration pour le cas considéré.

2) $s=0$, $k > 0$ et $n=0$.

Dans ce cas, toute algèbre $\mathcal{A}$ vérifiant ψ_τ est finie et l'existence d'un épimorphisme canonique $W \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ donne le résultat.

3) $s > 0$, $k=0$ et $n=1$.

Si $\mathcal{A} \models \psi_\tau$ $(=\psi_\tau^1)$, alors $\mathcal{A}$ a une expansion $\mathcal{A}'$ dans $\tau'=\tau \cup \{c\}$, c un symbole de constante, telle que $\mathcal{A}' \models \psi_{\tau'}(=\psi_{\tau'}^0)$.

Notons, W_τ, respectivement $W_{\tau'}$, les algèbres W correspondant respectivement à τ et τ'. $W_{\tau'}(=W_{\tau'}^0)$ est en fait une τ'-expansion de $W_\tau(=W_\tau^1)$. Ainsi, si un énoncé ϕ de τ est vrai dans W_τ, alors $W_{\tau'} \models \phi$ (vu dans τ'), d'où $\mathcal{A}' \models \phi$, par la partie 1), et donc $\mathcal{A} \models \phi$.

4) Les autres cas se résolvent à partir de 1) et 2) en utilisant le même raisonnement qu'en 3). □

Ainsi, ψ_τ^n est essentiellement tout ce qu'on peut dire positivement de W^n (dans un langage du premier ordre).

Corollaire 3.3. *Soit $\sigma(\tau) < \chi_0$ et Σ une théorie négative. Alors $M(\Sigma)$ a l'algèbre libre sur $n \in \mathbb{N}$ (respectivement, toutes les algèbres libres) si et seulement si $\Sigma \cup \{\psi_\tau^n\}$ (respectivement, $\Sigma \cup \{\psi_\tau\}$) est consistant (si et seulement si $\{\phi \wedge \psi_\tau^n\}$ (respectivement $\{\phi \wedge \psi_\tau\}$) est consistant pour chaque $\phi \in \Sigma$).*

Preuve. La direction $(\Rightarrow)$ est une conséquence immédiate du théorème 1.3, puisque $W^n \models \psi_\tau^n$. Inversement si $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\psi_\tau^n\}$ mais que $M(\Sigma)$ n'a pas l'algèbre libre sur n, alors $W^n \models \phi$ pour un ϕ positif tel que $\neg\phi \in \Sigma$, d'où $\mathcal{A} \models \phi$, par la proposition pécédente, ce qui contredit $\mathcal{A} \models \Sigma$. □

Bibliographie

1. S. Burris, H.P. Sankappanavar: A Course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 78, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1981.
2. C.C. Chang, H.J. Keisler: Model Theory, North-Holland, Amsterdam New-York Oxford, 1977.
3. G. Grätzer: Universal Algebra, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1979.
4. M. Hébert: On the existence of free algebras for negative theories, Abstracts of AMS, february 1983, p. 188.
5. D. Kozen: Positive first-order logic is NP-complete, IBM J. of Res. Develop. 25 (1981), no.4, pp. 327-332.
6. R.C. Lyndon: Properties preserved by subdirect products, Pacific J. Math. 9 (1959), pp. 155-164.

Rezime

O EGZISTENCIJI SLOBODNIH ALGEBRI ZA NEGATIVNE TEORIJE

Dati su uslovi na skup Σ negativnih rečenica (u finitarnom algebarskom jeziku) za koji njegova klasa modela $M(\Sigma)$ ima slobodne algebre (u klasičnom smislu, a takođe i u smislu kategorija). Pokazano je da je to ekvivalentno sa identifikacijom "pozitivnih osobina" apsolutno slobodnih algebri. Odgovor bitno zavisi od skupa τ operacionih simbola u jeziku. Na primer, ako je τ beskonačan, onda $M(\Sigma)$ sadrži sve slobodne algebre. Kada je τ konačan, postoji (pozitivna) rečenica ψ (koja zavisi samo od τ), takva da $M(\Sigma)$ ima slobodne algebre ako i samo ako je $\Sigma \cup \{\psi\}$ neprotivrečno.

Recived by the editors August 15, 1985.